Lezione 23 aprile 2026

giovedì 23 aprile 2026 11:14

Visto: fasci di rette proiettive:

$L, R \subseteq \mathbb{P}^2_K$ rette

Fascio di rette generato da L e R

Visto: fascio proiettivizzato:

$\mathcal{G}$ fascio di rette affini: ℓ e r: $a_1x + a_2y + a_0 = 0$

$b_1x + b_2y + b_0 = 0$

$\forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\lambda(a_1x + a_2y + a_3) + \mu(b_1x + b_2y + b_3) = 0$$

Di nuovo: se $(\lambda_2, \mu_2) = (\alpha\lambda_1, \alpha\mu_1)$

le coppie (λ_1, μ_1) e (λ_2, μ_2) definiscono

la stessa retta del fascio $\mathcal{G}$; difatti:

possiamo supp. $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1_K$

Anche in questo caso possiamo cons.

una funzione:

$$\Phi : \mathcal{G} \to \mathbb{P}^1_K$$

$$L_{(\bar\lambda : \bar\mu)} \to (\bar\lambda : \bar\mu)$$

e risulta una biezione.

* * *

FASCI DI IPERPIANI PROIETTIVI

IN $\mathbb{P}^n_K$

Def: $H_1, H_2 \subseteq \mathbb{P}^n_K$ iperpiani

di eq.: H_1 $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0x_0 = 0$

H_2 $b_1x_1 + \dots + b_nx_n + b_0x_0 = 0$

il FASCIO GENER. DA H_1 e H_2 è

l'insieme degli iperpiani$^{\mathcal{F}}$ di eq.:

$$\lambda(\underbrace{a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0x_0}_{}) + \mu(\underbrace{b_1x_1 + \dots + b_nx_n + b_0x_0}_{}) = 0$$

al variare di $(\lambda:\mu)\in\mathbb{P}^1_K$

OSS.: se $P\in H_1\cap H_2 \Rightarrow P\in H_{(\bar\lambda:\bar\mu)}\in\mathcal{F}$

$\forall(\bar\lambda:\bar\mu)\in\mathbb{P}^1_K$

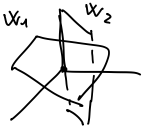
Cos'è $H_1\cap H_2$?

Ricordo Grassmann proiettivo: $H_1=\mathbb{P}(W_1)$, $H_2=\mathbb{P}(W_2)$

$$\dim(H_1\cap H_2) = \underbrace{\dim H_1}_{n-1} + \underbrace{\dim H_2}_{n-1} - \dim\underbrace{(\mathbb{P}(W_1+W_2))}_{=\underbrace{\mathrm{L}(\mathbb{P}(W_1)\cup\mathbb{P}(W_2))}_{}}$$

$$\dim\mathbb{P}(W_1+W_2) = \dim\underbrace{(W_1+W_2)}_{} - 1$$

W_1 e W_2 sono ip. vettoriali, $\dim W_1 = n$
$\subseteq K^{n+1}$ $= \dim W_2$



Se fisso una base di W_1 (n vettori) e scelgo

un vettore $w\in W_2\setminus W_1$

ottengo $n+1$ vettori LIN. INDIP di K^{n+1}

sono contenuti in W_1+W_2

$\Rightarrow W_1+W_2 = K^{n+1}$

$\Rightarrow \dim\mathbb{P}(W_1+W_2) = n$

$$\Rightarrow \dim(H_1\cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim\mathbb{P}(W_1+W_2)$$
$$= n-1 + n-1 - n$$
$$= n-2$$

In particolare: $n=2$: $\dim H_1\cap H_2 = 0$, cioè un punto

$n=3$ $\dim H_1\cap H_2 = 1$

Prop.: Ogni iperpiano $H_{(\bar\lambda:\bar\mu)} \in \mathcal{F}$ contiene il SSP $H_1 \cap H_2$, dove $\dim H_1 \cap H_2 = n-2$.

Inoltre: ogni iperpiano H contenente $H_1 \cap H_2$ soddisfa

$$H \in \mathcal{F}.$$

Dim. Come ieri

Def.: $H_1 \cap H_2$ si dice LUOGO BASE del fascio $\mathcal{F}$.

FASCI PROIETTIVIZZATI

Cons. fascio di iperpiani affini: in $\mathbb{A}^n_K$

$$\Pi_1 : a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0$$

$$\Pi_2 : b_1x_1 + \dots + b_nx_n + b_0 = 0$$

$$\lambda(a_1x_1 + \dots + a_0) + \mu(b_1x_1 + \dots + b_0) = 0$$

cons. $j_0 : \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$

$\forall\ \Pi_{(\bar\lambda:\bar\mu)} \in \mathcal{F}$

$\overline{j_0(\Pi_{(\bar\lambda:\bar\mu)})}$: ha eq.

$$\bar\lambda(a_1x_1 + \dots + a_0x_0) + \bar\mu(b_1x_1 + \dots + b_0x_0) = 0$$

Def.: Chiamiamo FASCIO PROIETTIVIZZATO il fascio proiettivo generato dalle chiusure proiettive dei 2 iperpiani affini:

$$\lambda(a_1x_1 + \dots + a_0x_0) + \mu(b_1x_1 + \dots + b_0x_0) = 0$$

TRASFORMAZI PROIETTIVE

Idea: cons. funzioni $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$

che mandino SSP in SSP.

Delle candidate sono le funzioni

che "provengono" da applicazioni lineari

$$f : V \to V' \quad AL$$

$$\left. V \setminus \{0_V\} \middle/ \sim \right. \qquad \left. V' \setminus \{0_{V'}\} \middle/ \sim \right.$$

cosa succede se scelgo $v \in V \setminus \{0_V\}$

$[v] \in \mathbb{P}(V)$, e cons.

$[f(v)]$

Affinché $[f(v)]$ sia definita,
bisogna che $f(v) \neq 0_{V'}$

Quindi: questa costruzione ha

senso solo per AL f INIETTIVE

Inoltre: sia f iniettiva; vediamo se

$f([v]) = [f(v)]$ è ben definita:

$[v] = [v']$

$\overset{?}{\Longrightarrow} f([v]) = f([v'])$?

$$[v] = [v'] \Longleftrightarrow v' = \lambda v \quad \text{per } \lambda \in K^*$$

$$f(v') = f(\lambda v) \underset{AL}{=} \lambda f(v)$$

$$\Rightarrow [f(v')] = [\lambda f(v)] = [f(v)]$$ ok.

Def.: Dati 2 spazi proiettivi

$\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$, una funzione

$f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ si dice

TRASFORM. PROIETTIVA

se $\exists$ AL $\varphi: V \to V'$ INIETTIVA

t.c. $\forall v \in V \setminus \{0_V\}$,

$$f([v]) = [\varphi(v)]$$

Def: Se φ è isomorfismo di SV

$$\varphi: V \to V'$$

la trasf. proiettiva associata

$f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ si chiama

ISOMORFISMO PROIETTIVO

e se $V = V'$,

$f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ isom. proiett.

si chiama PROIETTIVITÀ.

NOTAZIONE: se f proviene da φ,

scriveremo $f = [\varphi]$

OSS.: f isomorfismo, $f = [\varphi]$

$\Rightarrow$ f^{-1} è isom. proiettivo

$f^{-1} = [\varphi^{-1}]$

Prop.: Se $\mathbb{P}(V)$ è SP di $\dim \mathbb{P}(V) = n$, allora $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ isom. proiettivo con SP standard $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Dim: $\dim V = n+1$

Fisso base $\mathcal{B}$ di V; cons. l'isomorfismo lineare

$$F_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^{n+1}$$ FUNZ. COORDINATE

$$F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$ vettore delle coordinate di v

$$\Rightarrow \quad f_{\mathcal{B}} = [F_{\mathcal{B}}]$$

$$f_{\mathcal{B}} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$$

OSS.: $f : V \to V'$ AL, $\lambda \in \mathbb{K}^*$

posso cons. λf $\quad \left((\lambda f)(v) := \lambda \cdot f(v) \right)$

inoltre: se f è iniettiva $\xrightarrow[\lambda \neq 0]{}$ λf è iniettiva

$\Rightarrow$ posso cons. $f = [f] \equiv [\lambda f]$

$$f([v]) = [f(v)] = [\lambda f(v)]$$

Vediamo che vale anche il viceversa:

Teorema: Se f e $\psi : V \longrightarrow V'$ ISOMORF. PROIETT. t.c. $[f] = [\psi] : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$

$\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ t.c. $\psi = \lambda f$.

Dim.: $\forall\, v \in V \setminus \{0_V\}$, si ha

$$[\varphi(v)] = [\psi(v)]$$

$$f = [\varphi] \quad , \quad g = [\psi]$$

$$\forall\, [v] \in \mathbb{P}(V), \quad f([v]) = g([v])$$
$$= [\varphi(v)] = [\psi(v)]$$

$$\forall\, v \in V \setminus \{0_V\}, \quad \exists\, \lambda_v \in \mathbb{K}^*$$

$$\text{t.c. } \psi(v) = \lambda_v \cdot \varphi(v)$$

$$\varphi \text{ isomorf.} \implies \exists\, \varphi^{-1}$$

$$\underbrace{\varphi^{-1}(\psi(v))}_{(\varphi^{-1}\circ\psi)(v)} = \varphi^{-1}(\lambda_v \cdot \varphi(v))$$
$$= \lambda_v \cdot \varphi^{-1}(\varphi(v))$$
$$= \lambda_v \cdot v$$

$\implies \forall\, v \in V \setminus \{0_V\}$, l'AL $\varphi^{-1}\circ\psi : V \to V$ soddisfa $(\varphi^{-1}\circ\psi)(v) = \lambda_v \cdot v$, quindi ogni $v \in V \setminus \{0_V\}$ è autovettore di $\varphi^{-1}\circ\psi$; cosa posso dire sugli autovalori λ_v?

PARENTESI: Supp. che $g : V \to V$ sia t.c. $\forall\, v \in V \setminus \{0_V\}$, v è autovettore; supp. anche che

$g : V \to V$ ha (almeno) 2 autovalori diversi

$$g(v_1) = \lambda_1 v_1 \quad , \quad g(v_2) = \lambda_2 v_2$$

$v_1, v_2 \neq 0_V$ $\quad\quad$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$g(v_1+v_2) = g(v_1)+g(v_2)$$

$$= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_3 (v_1+v_2)$$

$$\underbrace{(\lambda_1-\lambda_3)}_{=0} v_1 + \underbrace{(\lambda_2-\lambda_3)}_{=0} v_2 = 0_V$$

v_1 e v_2 LIN INDIP. perché relativi ad autovalori diversi $\Rightarrow$ $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_2$ ASSURDO

$\Rightarrow$ g ha esattamente un autovalore.

$\Rightarrow$ $\underbrace{f^{-1}\circ\varphi}$ ha 1 autovalore λ

tutti vettori sono autovettori relativi a λ

$\Rightarrow$ $\forall v \in V$ si ha $(f^{-1}\circ\varphi)(v) = \lambda v$

$\Rightarrow$ $\underbrace{f^{-1}\circ\varphi}_{\text{isomorfismo}} = \lambda \cdot Id_V$; inoltre f e φ isom. $\Rightarrow$ $\lambda \in K^*$

$$\Rightarrow f\circ f^{-1}\circ\varphi = f\circ(\lambda\, Id_V)$$

$$\varphi = \lambda f$$