

# Capitolo 5

## Geometria euclidea

### 5.1 Spazi vettoriali euclidei e unitari

Riprendiamo alcune nozioni di Algebra Lineare sugli spazi vettoriali euclidei. Dovremo distinguere i due casi: quello reale e quello complesso.

**Definizione 5.1.1.** Sia  $V$  un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale. Una *forma bilineare simmetrica* su  $V$  è una applicazione

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

che verifica le seguenti proprietà:

i) bilinearità, cioè

- $\forall v \in V$ , l'applicazione  $g(v, -) : V \rightarrow \mathbb{R}$  è lineare;
- $\forall w \in V$ , l'applicazione  $g(-, w) : V \rightarrow \mathbb{R}$  è lineare;

ii) simmetria, cioè  $\forall v, w \in V$ , vale  $g(v, w) = g(w, v)$ .

Infine, tale forma bilineare si dice *definita positiva* o *prodotto scalare reale* se  $\forall v \in V$ , si ha  $g(v, v) \geq 0$  e inoltre  $g(v, v) = 0$  se e solo se  $v = 0_V$ .

In questo caso, diciamo che  $V$  è uno *spazio vettoriale reale euclideo* o un  $\mathbb{R}$ - *spazio vettoriale euclideo*.

In modo analogo, ma con i dovuti adattamenti, vediamo la corrispondente nozione relativa ai numeri complessi.

Utilizzeremo le seguenti notazioni: se  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , denotiamo il suo coniugato  $a - ib$  con  $\bar{z}$  e il suo modulo  $\sqrt{a^2 + b^2}$  con  $|z|$ . Chiaramente, se  $z \in \mathbb{R}$ , il suo modulo coincide col valore assoluto.

**Definizione 5.1.2.** Sia  $V$  un  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale. Una *forma sesquilineare hermitiana* su  $V$  è una applicazione

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

che verifica le seguenti proprietà:

i) *sequilinearità*, cioè

–  $\forall v \in V$ , l'applicazione  $g(v, -) : V \rightarrow \mathbb{C}$  è additiva e verifica

$$g(v, \lambda w) = \bar{\lambda}g(v, w),$$

per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $w \in V$ ;

–  $\forall w \in V$ , l'applicazione  $g(-, w) : V \rightarrow \mathbb{C}$  è lineare;

ii) *simmetria coniugata*, cioè  $\forall v, w \in V$ , vale  $g(v, w) = \overline{g(w, v)}$ .

Infine, tale forma si dice *definita positiva* o *prodotto hermitiano complesso* se  $\forall v \in V$ , si ha  $g(v, v) \geq 0$  e inoltre  $g(v, v) = 0$  se e solo se  $v = 0_V$ .

In questo caso, diciamo che  $V$  è uno *spazio vettoriale complessounitario*.

Si osservi che la richiesta  $g(v, v) \geq 0$  ha senso in quanto, per la simmetria coniugata,  $g(v, v) = \overline{g(v, v)}$ , dunque  $g(v, v) \in \mathbb{R}$ .

**Osservazione 5.1.3.** Ricordiamo inoltre che, come accade per le applicazioni lineari, anche alle forme bilineari si può associare una matrice, una volta che si è fissata una base per lo spazio vettoriale. Infatti, se  $V$  è un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale e  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  è una sua base, a ogni forma bilineare

$$\tau : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

si associa la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(\tau)_{i,j} := (\tau(v_i, v_j)) \in M_n(\mathbb{R}).$$

Viceversa, a una matrice  $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  si associa, rispetto a  $\mathcal{B}$ , la forma bilineare definita, su una qualunque coppia di vettori  $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$  e  $w = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$ , da:

$$\tau(v, w) := \sum_{i,j=1}^n m_{ij}a_ib_j.$$

Associando ad ogni vettore  $v$  la matrice colonna  $a := {}^t(a_1, \dots, a_n)$  delle sue coordinate rispetto alla base scelta, e analogamente a  $w$  la matrice colonna  $b := {}^t(b_1, \dots, b_n)$ , l'uguaglianza precedente si scrive sinteticamente come

$$\tau(v, w) = {}^t a M b.$$

È noto, inoltre, che  $\tau$  è una forma bilineare simmetrica se e solo se  $M = M_{\mathcal{B}}(\tau)$  è una matrice simmetrica (cioè tale che  ${}^tM = M$ ).

In particolare, se  $V$  è uno spazio vettoriale reale euclideo, si associa al prodotto scalare, rispetto a una base fissata  $\mathcal{B}$ , una matrice  $M$  simmetrica reale definita positiva che verifica

$$\langle v, w \rangle = {}^t_a M b.$$

e viceversa.

**Definizione 5.1.4.** Se  $V = \mathbb{R}^n$ , il *prodotto scalare standard* è quello associato alla matrice identica rispetto alla base canonica.

Pertanto, se  $v = {}^t(a_1, \dots, a_n)$  e  $w = {}^t(b_1, \dots, b_n)$ , allora

$$\langle v, w \rangle = {}^t v \mathbb{I}_n w = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

In modo analogo si prova la corrispondenza tra un prodotto hermitiano complesso in un  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale euclideo e una matrice  $M \in M_n(\mathbb{C})$  hermitiana (cioè tale che  ${}^tM = \overline{M}$ ) definita positiva, data da

$$g(v, w) = {}^t v M \overline{w}.$$

Ricordiamo un risultato fondamentale, di cui omettiamo la dimostrazione.

**Teorema 5.1.5.** Se  $V$  è un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale euclideo, comunque scelti  $v, w \in V$ , vale

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle.$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se  $v$  e  $w$  sono linearmente dipendenti.

**Definizione 5.1.6.** Se  $V$  è un  $\mathbb{R}$  (rispettivamente,  $\mathbb{C}$ )-spazio vettoriale euclideo, diciamo *norma* di  $v \in V$  il numero reale non negativo

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Con tale nozione, possiamo riscrivere il risultato precedente nella sua formulazione più generale (che vale anche sui numeri complessi).

**Teorema 5.1.7** (Diseguaglianza di Cauchy - Schwarz). Se  $V$  è un spazio vettoriale euclideo reale o complesso, comunque scelti  $v, w \in V$ , si ha

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|.$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se  $v$  e  $w$  sono linearmente dipendenti.

**Proposizione 5.1.8.** Sia  $V$  un spazio vettoriale euclideo reale o complesso. Provare che, per ogni  $v \in V$  e per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  (rispettivamente,  $\mathbb{C}$ ) valgono le seguenti proprietà:

a)  $\|v\| \geq 0$  (qui 0 denota  $0_{\mathbb{R}}$ );

b)  $\|v\| = 0 \iff v = 0_V$ ;

c)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ .

Dalla Disuguaglianza di Schwarz discende un'altra nota relazione.

**Teorema 5.1.9** (Disuguaglianza triangolare). Se  $V$  è un spazio vettoriale euclideo reale o complesso, comunque scelti  $v, w \in V$ , si ha

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza allora  $v$  e  $w$  sono linearmente dipendenti.

In uno spazio vettoriale euclideo si può introdurre la nozione di ortogonalità fra vettori e, di conseguenza, anche fra sottospazi vettoriali.

**Definizione 5.1.10.** Diciamo che due vettori  $v, w \in V$  sono *ortogonali* se  $\langle v, w \rangle = 0$ .

**Osservazione 5.1.11.** Si noti che in uno spazio vettoriale euclideo reale vale

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle.$$

Dunque, se  $v$  e  $w$  sono ortogonali si ha

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

cioè il Teorema di Pitagora, che dunque vale in un qualunque spazio vettoriale euclideo.

In uno spazio vettoriale euclideo si rivela essenziale la nozione di *base ortonormale*, cioè di una base costituita da vettori di norma 1 e a due a due ortogonali. Se  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  è una base ortonormale, allora per ogni  $v \in V$  si ha

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Inoltre ogni cambiamento di base tra basi ortonormali è associato a una matrice ortogonale  $M$  (cioè tale che  ${}^t M = M^{-1}$ ), nel caso reale. Mentre nel caso complesso  $M$  è unitaria (cioè tale che  ${}^t \bar{M} = M^{-1}$ ).

Infine ricordiamo la seguente nozione

**Definizione 5.1.12.** Sia  $W$  un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Diciamo *complemento ortogonale di  $W$*  l'insieme

$$W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}.$$

Il nome di "complemento ortogonale" è giustificato dalle seguenti proprietà, le cui dimostrazioni sono già state viste nel corso di Algebra Lineare.

**Proposizione 5.1.13.** Sia  $W$  un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora valgono i seguenti fatti:

- i)  $W^\perp$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ ;
- ii)  $W^\perp \cap W = \{0_V\}$ ;
- iii)  $W^\perp + W = V$ .

In particolare, la somma  $W^\perp + W$  è diretta e si denota dunque con  $W^\perp \oplus W$ . Conseguentemente,  $\dim(W^\perp) + \dim(W) = \dim(V)$ .

**Osservazione 5.1.14.** Se  $W_1$  e  $W_2$  sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ , provare che

$$W_1 \subseteq W_2^\perp \iff W_2 \subseteq W_1^\perp.$$

**Definizione 5.1.15.** Due sottospazi vettoriali  $W_1$  e  $W_2$  di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  sono *ortogonali* se

$$W_1 \subseteq W_2^\perp, \quad \text{oppure} \quad W_2 \subseteq W_1^\perp.$$

**Osservazione 5.1.16.** Per la Proposizione 5.1.13, se  $W_1$  e  $W_2$  sono ortogonali si ha

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) \leq \dim(V).$$

**Esempio 5.1.17.** Sia  $W$  un iperpiano dello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^n$  con prodotto scalare standard. La sua equazione cartesiana è del tipo

$$W : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Osserviamo che il vettore  $(a_1, \dots, a_n) \in W^\perp$ . D'altro canto,  $\dim(W) = n - 1$  dunque  $\dim(W^\perp) = 1$ . Pertanto  $W^\perp$  è la retta vettoriale  $\text{Span} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ .

Concludiamo il paragrafo con una nozione relativa solo al caso reale.

**Definizione 5.1.18.** Siano  $v, w$  due vettori non nulli di un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si dice *angolo convesso tra  $v$  e  $w$*  l'unico angolo  $\theta$ , con  $0 \leq \theta \leq \pi$  tale che

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Si noti che, per la Disuguaglianza di Cauchy - Schwarz, tale frazione è compresa tra  $-1$  e  $1$ . Si osservi infine che, se  $v$  e  $w$  sono proporzionali, cioè se  $w = \lambda v$ , allora

$$\cos \theta = \frac{\langle v, \lambda v \rangle}{\|v\| \|\lambda v\|} = \frac{\lambda \|v\|^2}{|\lambda| \|v\|^2} = \pm 1$$

dove  $\cos \theta = 1 \iff \theta = 0 \iff \lambda > 0$ ,  $\cos \theta = -1 \iff \theta = \pi \iff \lambda < 0$ .

## 5.2 Spazi affini euclidei

Introduciamo ora un nuovo ambiente geometrico relativamente ai due casi, reale e complesso.

**Definizione 5.2.1.** Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale (rispettivamente, complesso) euclideo, diciamo *spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario)* lo spazio affine  $\mathbb{A}(V)$  su  $V$  che verrà denotato con

$$\mathbb{E}.$$

I sottospazi affini di  $\mathbb{E}$  sono detti suoi *sottospazi euclidei (rispettivamente, unitari)*.

In particolare, se  $V = \mathbb{R}^n$  con il prodotto scalare standard, il corrispondente *spazio affine euclideo canonico* si denota con

$$\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n.$$

Se  $V = \mathbb{C}^n$ , il corrispondente *spazio affine unitario canonico* si denota

$$\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^n.$$

Grazie al prodotto scalare su  $V$ , è possibile definire l'ortogonalità e gli angoli tra sottospazi euclidei (risp. unitari).

**Definizione 5.2.2.** Sia  $\mathbb{E}$  uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario) e  $S, T \subseteq \mathbb{E}$  due suoi sottospazi euclidei (rispettivamente, unitari) di dimensione  $\geq 1$ .

Diciamo che  $S$  e  $T$  sono *ortogonali* se lo sono le rispettive giaciture come sottospazi di  $V$  e scriveremo

$$S \perp T.$$

Si osservi che, se  $S$  e  $T$  sono ortogonali in  $\mathbb{E}$ , con  $n = \dim(\mathbb{E})$ , allora

$$\dim(S) + \dim(T) \leq n. \quad (5.2.1)$$

Per poter fare calcoli, come nel caso affine, occorre introdurre un sistema di riferimento. Ma qui terremo conto che lo spazio vettoriale soggiacente è euclideo.

**Definizione 5.2.3.** Sia  $\mathbb{E}$  uno spazio affine euclideo sullo spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si dice *riferimento cartesiano* in  $\mathbb{E}$  un riferimento affine  $(O, \mathcal{B})$ , dove  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale di  $V$ .

**Esempio 5.2.4.** Si consideri un iperpiano  $H$  di  $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$  che, rispetto a un fissato riferimento cartesiano, abbia equazione

$$H : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

La sua giacitura è  $H_0 : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ . Per definizione, un sottospazio euclideo  $S = Q + S_0$  è ortogonale a  $H$  se e solo se  $\dim(S_0) \geq 1$  e  $S_0 \subseteq H_0^\perp$ .

Osserviamo che  $H_0^\perp$  è una retta vettoriale e precisamente  $H_0^\perp = \text{Span}(v)$ , dove  $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ .

Dunque  $S$  è necessariamente una retta affine di giacitura  $S_0 = \text{Span}(v)$ .

Ad esempio, il piano  $H$  e la retta  $r$  di  $\mathbb{E}^3$  dati da

$$H : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \quad r : (x_1, x_2, x_3) = (1 + 2t, 2 - 3t, 43 + t)$$

sono ortogonali.

**Esempio 5.2.5.** Si considerino due rette  $r$  e  $s$  di  $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$  aventi come vettori direzionali (rispetto a un riferimento cartesiano)

$$v_r = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad v_s = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

rispettivamente. Per definizione,  $r \perp s$  se e solo se  $\text{Span}(v_r) \subset \text{Span}(v_s)^\perp$  e questo si verifica se e solo se  $v_r \perp v_s$  cioè se e solo se

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = 0.$$

Come visto in (5.2.1), se  $S, T \subset \mathbb{E}^n$  sono ortogonali, allora necessariamente  $\dim(S) + \dim(T) \leq n$ . Volendo estendere tale nozione a sottospazi di dimensione qualunque, partiamo dalla seguente osservazione.

Siano  $S \ni P$  e  $T \ni Q$  due sottospazi euclidei di giaciture rispettive  $S_0$  e  $T_0$  e denotiamo le rispettive dimensioni con

$$s := \dim(S) = \dim_{\mathbb{R}}(S_0), \quad t := \dim(T) = \dim_{\mathbb{R}}(T_0).$$

Se accade che

$$\dim(S) + \dim(T) \geq n,$$

allora

$$\dim(S_0^\perp) + \dim(T_0^\perp) = (n - s) + (n - t) = 2n - (s + t) \leq n.$$

Questo induce a introdurre la seguente nozione.

**Definizione 5.2.6.** Siano  $S \ni P$  e  $T \ni Q$  due sottospazi euclidei di  $\mathbb{E}^n$  di giaciture rispettive  $S_0$  e  $T_0$ . Se  $\dim(S) + \dim(T) \geq n$ , diciamo che  $S$  e  $T$  sono *perpendicolari* se  $S_0^\perp$  e  $T_0^\perp$  sono ortogonali.

**Esempio 5.2.7.** Si considerino due piani di  $\mathbb{E}^3$  di equazioni

$$S : ax + by + cz + d = 0, \quad T : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Per definizione, essi sono perpendicolari se e solo se le rette vettoriali

$$S_0^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad T_0^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

sono ortogonali. Tale condizione equivale a

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \text{cioè} \quad aa' + bb' + cc' = 0.$$

### 5.3 Angolo tra sottospazi euclidei

Per quanto riguarda l'angolo tra due sottospazi euclidei, ci limiteremo a due classi di esempi: l'angolo fra due rette e quello fra una retta e un iperpiano.

Tenendo presente la definizione di angolo acuto fra due vettori di un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale euclideo, si noti che due rette individuano due angoli, uno acuto e uno ottuso. Sceglieremo quello acuto, per convenzione.

**Definizione 5.3.1.** Siano  $r, s \subset \mathbb{E}^n$  due rette nello spazio affine euclideo di vettori direzionali rispettivi  $v_r$  e  $v_s$ .

Si dice *angolo fra le rette  $r$  e  $s$* , e si denota con  $\widehat{rs}$ , l'unico angolo  $\theta \in [0, \pi/2]$  tale che

$$\cos \theta = \frac{|\langle v_r, v_s \rangle|}{\|v_r\| \|v_s\|}.$$

Si osservi che, nella definizione precedente,  $0 \leq \cos \theta \leq 1$  e dunque  $\widehat{rs}$  è un angolo acuto. Inoltre è chiaro che  $r \perp s$  se e solo se  $\widehat{rs} = \pi/2$ .

**Osservazione 5.3.2.** Si noti che l'angolo fra due rette, come accadeva con l'ortogonalità, non ha nulla a che vedere con l'incidenza delle due rette: infatti lo si può definire e calcolare sia nel caso in cui le rette siano incidenti, sia nel caso in cui siano sghembe.

**Definizione 5.3.3.** Siano  $r$  una retta e  $H$  un iperpiano in  $\mathbb{E}^n$ ; sia inoltre  $t$  una retta ortogonale a  $H$ . Si dice *angolo fra  $r$  e  $H$* , e si denota con  $\widehat{rH}$ , l'unico angolo  $\alpha$  complementare dell'angolo  $\widehat{rt}$ .

In altre parole, posti  $v_r$  e  $n$  due vettori direzionali di  $r$  e  $t$ , rispettivamente,

$$\widehat{rH} := \pi/2 - \widehat{rt}$$

ove  $\widehat{rt}$  è l'unico angolo (tra 0 e  $\pi/2$ ) tale che

$$\cos \widehat{rt} = \frac{|\langle v_r, n \rangle|}{\|v_r\| \|n\|}.$$

Si osservi che anche  $\widehat{rH}$  è un angolo acuto.

### 5.4 Distanze negli spazi affini euclidei

Grazie al prodotto scalare su  $V$ , è possibile definire anche una distanza in  $\mathbb{E}$ , rendendolo uno spazio metrico e, di conseguenza, uno spazio topologico.

**Definizione 5.4.1.** Sia  $\mathbb{E}$  uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario). Se  $P, Q \in \mathbb{E}$ , diciamo *distanza tra  $P$  e  $Q$*  il numero reale non negativo

$$d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

**Proposizione 5.4.2.** Se  $P, Q, R \in \mathbb{E}$  allora:

- i)  $d(P, Q) \geq 0$  e vale  $d(P, Q) = 0$  se e solo se  $P = Q$ ;
- ii)  $d(P, Q) = d(Q, P)$ ;
- iii)  $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ .

*Dimostrazione.* (i) e (ii) sono lasciate per esercizio, in quanto immediate. (iii) Per la Relazione di Chasles (SA2) si ha  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$ , dunque

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}\| \leq \|\overrightarrow{RQ}\| + \|\overrightarrow{PR}\|,$$

per la proprietà triangolare della norma indotta da un prodotto scalare □

Più in generale, diamo la seguente nozione.

**Definizione 5.4.3.** Sia  $\mathbb{E}$  uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario). Se  $X, Y \subseteq \mathbb{E}$  sono due sottoinsiemi non vuoti, diciamo *distanza tra  $X$  e  $Y$*  il numero reale non negativo

$$d(X, Y) := \inf \{d(P, Q) \mid P \in X, Q \in Y\}.$$

Si osservi che tale estremo inferiore esiste in quanto l'insieme su cui si calcola è costituito da numeri reali maggiori o uguali di zero.

Per i sottospazi euclidei vale il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione; ne vedremo un caso particolare.

**Teorema 5.4.4.** In uno spazio euclideo  $\mathbb{E}$  sullo spazio vettoriale euclideo  $V$ , si considerino due sottospazi euclidei  $X \ni A$  e  $Y \ni B$ , dove  $A, B \in \mathbb{E}$  e con  $U, W \subseteq V$  le rispettive giaciture.

Allora esistono  $P_0 \in X$  e  $Q_0 \in Y$  tali che il vettore  $Q_0 - P_0$  è ortogonale sia a  $U$  che a  $W$  e, per ogni  $P \in X$  e  $Q \in Y$ , si ha  $\|Q_0 - P_0\| \leq \|Q - P\|$ . Pertanto  $d(X, Y) = d(P_0, Q_0)$ .

In quanto segue considereremo come ambiente lo spazio affine euclideo canonico  $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$  con un riferimento cartesiano  $(O, \mathcal{B})$ .

In tale ambito, diamo la seguente nozione.

**Definizione 5.4.5.** Se  $A, B \in \mathbb{E}^n$  diciamo *punto medio del segmento*  $\overline{AB}$  l'unico punto  $M \in \overline{AB}$  tale che

$$d(A, M) = d(M, B).$$

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto la proiezione, su un sottospazio affine  $S$  di  $\mathbb{A}^n$ , parallela a un sottospazio vettoriale  $U$  di  $\mathbb{R}^n$  (complementare alla giacitura di  $S$ ).

In uno spazio euclideo possiamo considerare la situazione particolare in cui  $U$  è l'ortogonale della giacitura di  $S$  e dare la seguente nozione.

**Definizione 5.4.6.** Sia  $S \ni Q$  un sottospazio euclideo di  $\mathbb{E}^n$ , con giacitura  $W \subset V$ . Si dice *proiezione ortogonale su  $S$*  l'applicazione

$$p_W : \mathbb{E}^n \longrightarrow S \quad \text{data da} \quad P \mapsto T_P(U) \cap S$$

dove  $U = W^\perp$ .

Il punto  $P_0 = T_P(W^\perp) \cap S$  si dice *proiezione ortogonale di  $P$  su  $S$* .

**Esempio 5.4.7.** Si considerino il punto  $P = (1, 2, 3) \in \mathbb{E}^3$  e il piano di equazione  $H : x - y + 3z + 1 = 0$ . Per determinare la proiezione ortogonale  $P_0$  di  $P$  su  $H$ , calcoliamo anzitutto la giacitura  $W$  di  $H$  e il sottospazio  $W^\perp$ . Quest'ultimo è la retta vettoriale

$$W^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Per definizione  $P_0 = T_P(W^\perp) \cap H$ . Poiché  $r : (x, y, z) = (1 + t, 2 - t, 3 + 3t)$ , bisogna determinare  $t$  in modo che

$$(1 + t) - (2 - t) + 3(3 + 3t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -9/11.$$

Sostituendo nell'equazione parametrica di  $r$  si ottiene infine

$$P_0 = (1 - 9/11, 2 + 9/11, 3 - 27/11) = (2/11, 31/11, 6/11).$$

La nozione di proiezione ortogonale verrà ora utilizzata nel trovare dei metodi per determinare alcune distanze.

Il primo caso è quello di distanza di un punto da un sottospazio euclideo.

**Proposizione 5.4.8.** Siano  $S$  un sottospazio euclideo e  $Q \in \mathbb{E}^n$ . Allora, posta  $Q_0$  la proiezione ortogonale di  $Q$  su  $S$ , si ha

$$d(Q, S) = d(Q, Q_0).$$

*Dimostrazione.* Basta provare che, comunque scelto un punto  $P \in S$ , si ha  $d(Q, P) \geq d(Q, Q_0)$  o, equivalentemente, che

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 \geq \|\overrightarrow{Q_0Q}\|^2.$$

Se  $W$  è la giacitura di  $S \ni P$ , si ha  $\overrightarrow{Q_0P} \in W$ . D'altro canto, per definizione di proiezione ortogonale,  $\overrightarrow{Q_0Q} \in W^\perp$ . Per (SA2) si ha inoltre

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ_0} + \overrightarrow{Q_0Q}.$$

Quindi

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ_0}\|^2 + \|\overrightarrow{Q_0Q}\|^2 \geq \|\overrightarrow{Q_0Q}\|^2.$$

□

**Proposizione 5.4.9.** *Si fissi un riferimento cartesiano di  $\mathbb{E}^n$  e si considerino un punto  $Q = (q_1, \dots, q_n)$  e un iperpiano  $H : a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$ . Allora*

$$d(Q, H) = \frac{|a_1q_1 + \dots + a_nq_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

*Dimostrazione.* Si consideri un versore (cioè un vettore di norma 1) ortogonale a  $H$ , ad esempio

$$n := \frac{(a_1, \dots, a_n)}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Essendo anche  $\overrightarrow{Q_0Q}$  ortogonale a  $H$ , si ha

$$|\langle \overrightarrow{Q_0Q}, n \rangle| = \|\overrightarrow{Q_0Q}\| = d(Q, Q_0) = d(Q, H),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla Proposizione precedente.

Per calcolare il suddetto prodotto scalare, basta scegliere un qualunque punto  $P \in H$ , applicare la Relazione di Chasles (SA2) e la bilinearità, ottenendo

$$\langle \overrightarrow{Q_0Q}, n \rangle = \langle \overrightarrow{PQ}, n \rangle + \langle \overrightarrow{Q_0P}, n \rangle.$$

Ma  $\langle \overrightarrow{Q_0P}, n \rangle = 0$  in quanto  $\overrightarrow{Q_0P}$  appartiene alla giacitura di  $H$ , che è  $\text{Span}(n)^\perp$ .

Pertanto

$$d(Q, H) = |\langle \overrightarrow{Q_0Q}, n \rangle| = |\langle \overrightarrow{PQ}, n \rangle|.$$

Denotando le coordinate di  $P$  con  $(y_1, \dots, y_n)$  e tenendo conto che  $P \in H$ , vale  $a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = -b$ . Quindi

$$d(Q, H) = \frac{|\langle (q_1 - y_1, \dots, q_n - y_n), (a_1, \dots, a_n) \rangle|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

da cui la tesi. □

**Osservazione 5.4.10.** Se  $S$  e  $T$  sono due sottospazi paralleli di  $\mathbb{E}^n$  e  $S \cap T = \emptyset$  allora la loro distanza è non nulla. Vediamo come determinarla.

Sia  $\dim(T) \leq \dim(S)$ . Allora, scelto un qualunque punto  $Q \in T$  e denotando con  $Q_0$  la proiezione ortogonale di  $Q$  su  $S$ , si ha

$$d(T, S) = d(Q, S) = d(Q, Q_0).$$

Chiaramente, se  $\dim(T) = \dim(S)$ , i ruoli di  $S$  e  $T$  si possono scambiare.

**Esempio 5.4.11.** Si considerino la retta  $r$  e il piano  $\pi$  di  $\mathbb{E}^3$  dati da

$$r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, 2), \quad \pi : x + 2y + 4 = 0.$$

Poiché le rispettive giaciture sono  $W_r = \langle (2, -1, 2) \rangle$  e  $W_\pi : x + 2y = 0$ , si vede immediatamente che  $W_r \subset W_\pi$  e dunque  $r \parallel \pi$ . Tenendo conto che  $\dim(r) = 1 < 2 = \dim(\pi)$ , per l'Osservazione dispar si ha che  $d(r, \pi) = d(Q, \pi)$ , dove  $Q$  è un qualunque punto di  $r$ . Ad esempio, si scelga  $Q = (1, 0, 0)$  e si calcoli, per la Proposizione dishy,

$$d(Q, \pi) = \frac{|1 + 4|}{\sqrt{1 + 4}} = \sqrt{5}.$$

**Esempio 5.4.12.** Si considerino i due piani paralleli  $\pi_1$  e  $\pi_2$  di  $\mathbb{E}^3$  dati da

$$\pi_1 : x + 2y - z + 4 = 0, \quad \pi_2 : x + 2y - z + 10 = 0.$$

Si ha

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(Q, \pi_2),$$

dove  $Q$  è un qualunque punto di  $\pi_1$ . Ad esempio, si scelga  $Q = (0, 0, 4)$  e si calcoli, ancora per la Proposizione dishy,

$$d(Q, \pi_2) = \frac{|-4 + 10|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{6}.$$

**Esempio 5.4.13.** Si considerino le due rette parallele  $r_1$  e  $r_2$  di  $\mathbb{E}^3$  date da

$$r_1 : (x, y, z) = (3, -1, 1) + \lambda(2, -1, 2), \quad r_2 : (x, y, z) = (2, 1, 3) + \mu(2, -1, 2).$$

In questo caso si deve procedere diversamente dai due precedenti esempi. Osserviamo però che per l'Osservazione 5.4.10 abbiamo

$$d(r_1, r_2) = d(Q, Q_0),$$

dove  $Q \in r_1$  e  $Q_0$  è la proiezione ortogonale di  $Q$  su  $r_2$ . Invece di scegliere un punto su  $r_1$ , si noti che si può procedere ancora più rapidamente considerando un piano  $\pi$  ortogonale a entrambe le rette. Evidentemente  $\pi$  interseca ogni retta in un punto e questi due punti sono uno la proiezione ortogonale dell'altro sull'altra retta. Pertanto, posti  $Q_1 := \pi \cap r_1$  e  $Q_2 := \pi \cap r_2$ , si ha

$$d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2),$$

Si scelga, ad esempio,  $\pi : 2x - y + 2z = 0$ . Con facili calcoli si vede che

$$Q_1 := \pi \cap r_1 = (1, 0, -1), \quad Q_2 := \pi \cap r_2 = (0, 2, 1).$$

Pertanto

$$d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2) = \|Q_1 - Q_2\| = \|(1, -2, -2)\| = 3.$$

Concludiamo questo paragrafo con la determinazione della distanza tra due rette sghembe dello spazio euclideo canonico  $\mathbb{E}^3$ , assieme alle nozioni di *retta e segmento di minima distanza*.

**Teorema 5.4.14.** *Siano  $r$  e  $s$  due rette sghembe di  $\mathbb{E}^3$ . Allora si ha:*

- i) *esiste un'unica coppia  $\pi_r$  e  $\pi_s$  di piani paralleli a entrambe le rette (e paralleli tra loro) tali che  $r \subset \pi_r$  e  $s \subset \pi_s$ ;*
- ii) *esiste un'unica retta  $t$  ortogonale e incidente  $r$  e  $s$  (detta retta di minima distanza);*
- iii) *posti  $R := t \cap r$  e  $S := t \cap s$ , si ha*

$$d(r, s) = d(\pi_r, \pi_s) = d(R, S),$$

*dove il segmento  $\overline{RS}$  è detto segmento di minima distanza tra  $r$  e  $s$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $r$  determinata da  $A \in r$  e con giacitura  $\text{Span}(v_r)$  e  $s$  da  $B \in s$  e giacitura  $\text{Span}(v_s)$ .

*i)* I due piani cercati sono necessariamente i piani  $\pi_r$  e  $\pi_s$  determinati, ad esempio, da  $A \in \pi_r$  e  $B \in \pi_s$ , ed entrambi di giacitura

$$W_{\pi_r} = W_{\pi_s} = \text{Span}(v_r, v_s).$$

Si noti che questi sono veramente due piani in quanto  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Span}(v_r, v_s) = 2$  poiché  $v_r$  e  $v_s$  non sono paralleli per ipotesi.

*ii)* Si consideri l'unica (a meno di multipli) direzione  $w$  ortogonale sia a  $r$  che a  $s$  (e quindi anche ortogonale a  $\pi_r$  e  $\pi_s$ ), data da

$$\text{Span}(w) := \text{Span}(v_r, v_s)^\perp.$$

Denotiamo con  $\rho$  l'unico piano del fascio di piani  $\mathcal{F}_r$  di sostegno  $r$  che contiene  $w$  nella sua giacitura; e, analogamente, denotiamo con  $\sigma$  l'unico piano del fascio di piani  $\mathcal{F}_s$  di sostegno  $s$  che contiene  $w$  nella sua giacitura.

Si ha quindi

$$W_\rho = \text{Span}(v_r, w), \quad W_\sigma = \text{Span}(v_s, w).$$

Per costruzione  $t := \rho \cap \sigma$  è una retta di giacitura  $W_\rho \cap W_\sigma = \text{Span}(w)$ , che risulta dunque ortogonale sia a  $r$  che a  $s$ .

Inoltre,  $t$  e  $r$  giacciono entrambe sul piano  $\rho$  e sono ortogonali, quindi non parallele; pertanto sono incidenti.

Analogamente  $t$  e  $s$  sono incidenti.

Per provare l'unicità di  $t$ , supponiamo che esista un'altra retta  $t'$  ortogonale e incidente  $r$  e  $s$ . Per quanto osservato all'inizio, c'è un'unica direzione  $w$  ortogonale a  $r$  e a  $s$ , dunque  $t' \parallel t$ . In particolare,  $t$  e  $t'$  sono complanari. Per questo, denotando con  $R' := t' \cap r$  e  $S' := t' \cap s$ , si ha che i punti  $R, S, R', S'$  sono complanari. Il piano che li contiene, pertanto, deve contenere  $r$  (individuata da  $R$  e  $R'$ ) e analogamente  $s$ ; questo è un assurdo in quanto  $r$  e  $s$  sono sghembe per ipotesi.

*iii)* Si noti che

$$d(r, s) := \inf \{d(P, Q) \mid P \in r, Q \in s\} \geq d(\pi_r, \pi_s).$$

Se si prova che  $d(\pi_r, \pi_s)$  è raggiunta dalla coppia di punti  $R \in r$  e  $S \in s$ , allora si ha la tesi. Per fare questo, basta osservare che la retta  $t$  è ortogonale a  $\pi_r$  e  $\pi_s$  per (ii) e che

$$R = t \cap r = t \cap \pi_r, \quad S = t \cap s = t \cap \pi_s.$$

Dunque  $S$  è la proiezione ortogonale di  $R$  su  $\pi_s$ ; pertanto  $d(\pi_r, \pi_s) = d(R, S)$ . □

# Capitolo 6

## Isometrie

### 6.1 Isometrie e Matrici Ortogonali

**Definizione 6.1.1.** Sia  $(V, g)$  uno spazio vettoriale euclideo. Una isometria di  $(V, g)$  è un endomorfismo  $f : V \rightarrow V$  tale che  $\forall u, v \in V$ , vale:

$$g(f(u), f(v)) = g(u, v).$$

**Osservazione 6.1.2.** Se  $f : V \rightarrow V$  è una isometria e  $V$  ha dimensione finita, allora  $f$  è iniettiva. Infatti, se  $v \in \ker(f)$ , allora  $f(v) = 0_V$ , quindi  $g(f(v), f(v)) = g(0_V, 0_V) = 0$ . Sfruttando ora il fatto che  $f$  è una isometria abbiamo:  $0 = g(f(v), f(v)) = g(v, v)$ , quindi  $v = 0_V$ .

Infine, se  $\dim V = n < \infty$ , per il Teorema di Dimensione  $f$  è un automorfismo.

**Proposizione 6.1.3.** Sia  $(V, g)$  uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita. Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $f$  è una isometria di  $(V, g)$ .
2. Per una base ortonormale  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  di  $(V, g)$ , anche  $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$  è una base ortonormale di  $(V, g)$ .
3.  $\|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in V$ .

*Dimostrazione.* •  $(1 \Rightarrow 2)$  Se  $f \in \text{End}(V)$  è una isometria, e  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base ortonormale di  $(V, g)$ , allora  $g(f(v_i), f(v_j)) = g(v_i, v_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$ . Quindi  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  sono tutti non nulli (perché hanno norma = 1) e sono a due a due ortogonali. Quindi  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  sono linearmente indipendenti, perciò  $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$  è una base ortonormale di  $(V, g)$ .

- (2  $\Rightarrow$  3) Fissiamo una base ortonormale  $\{v_1, \dots, v_n\}$  di  $(V, g)$ . Per ipotesi anche  $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$  è una base ortonormale di  $(V, g)$ . Sia ora  $v \in V$ . Scriviamo  $v$  come combinazione lineare dei vettori  $v_1, \dots, v_n$ :  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ . Allora

$$f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n).$$

Siccome  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base ortonormale,

$$\|v\|^2 = g(v, v) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2.$$

Siccome anche  $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$  è ortonormale,

$$\|f(v)\|^2 = g(f(v), f(v)) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2.$$

Ne segue che  $\|v\|^2 = \|f(v)\|^2$ , da cui il risultato.

- (3  $\Rightarrow$  1) Siano  $v, w \in V$ . Dalla formula di polarizzazione si ha:

$$g(f(v), f(w)) = \frac{1}{2}g(f(v) + f(w), f(v) + f(w)) - g(f(v), f(v)) - g(f(w), f(w)).$$

Si ha quindi

$$= \frac{1}{2}\|f(v) + f(w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2.$$

Per ipotesi,  $\|f(u)\|^2 = \|u\|^2, \forall u \in V$ , quindi

$$\frac{1}{2}\|f(v + w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2 = \frac{1}{2}\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 = g(v, w),$$

nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato la formula di polarizzazione. Ne segue che  $g(f(v), f(w)) = g(v, w), \forall v, w \in V$ , quindi  $f$  è una isometria. □

**Proposizione 6.1.4.** Sia  $(V, g)$  uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita, e sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base ortonormale di  $(V, g)$ . Sia  $f \in \text{End}(V)$ .

Allora  $f$  è una isometria di  $(V, g)$  se e solo se

$${}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \mathbb{I}_n.$$

*Dimostrazione.* Dalla precedente proposizione segue che  $f$  è una isometria  $\iff g(f(v_i), f(v_j)) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$ . Per definizione di  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ , se indichiamo con  $a_{ij}$  il suo elemento di posto  $(i, j)$ , abbiamo:

$$f(v_\ell) = a_{1\ell} v_1 + \dots + a_{n\ell} v_n, \quad \forall \ell = 1, \dots, n.$$

Quindi  $f$  è una isometria  $\iff \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$ . Il risultato segue ora dal fatto che  $\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}$  è l'elemento di posto  $(i, j)$  della matrice  ${}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ . □

**Definizione 6.1.5.** Una matrice quadrata  $A \in M_n(\mathbb{R})$  è detta ortogonale, se vale la seguente uguaglianza:

$${}^t A \cdot A = \mathbb{I}_n.$$

L'insieme delle matrici  $n \times n$  ortogonali si denota con  $O(n)$ .

**Osservazione 6.1.6.** 1.  $A \in M_n(\mathbb{R})$  è ortogonale  $\iff A$  è invertibile ed  $A^{-1} = {}^t A$ .

2. Sia  $A \in O(n)$ , allora  $\det(A) = \pm 1$ . Infatti, dall'uguaglianza  $\mathbb{I}_n = {}^t A \cdot A$ , dal teorema di Binet, sfruttando il fatto che  $\det({}^t A) = \det(A)$ , si ha:

$$1 = \det(\mathbb{I}_n) = \det({}^t A \cdot A) = (\det(A))^2.$$

**Corollario 6.1.7.** Sia  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Allora  $A \in O(n) \iff L_A$  è una isometria di  $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ , dove  $\langle, \rangle$  è il prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.* L'enunciato segue ricordando che la base canonica  $\mathcal{E}$  di  $\mathbb{R}^n$  è ortonormale per  $\langle, \rangle$ , e si ha  $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(L_A) = A$ . □

**Proposizione 6.1.8.** Sia  $(V, g)$  uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita  $n$ . Sia  $\mathcal{B}$  una base ortonormale di  $(V, g)$ , e sia  $\mathcal{C}$  una base di  $V$ . Allora  $\mathcal{C}$  è ortonormale  $\iff M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \in O(n)$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $\mathcal{C}$  è ortonormale  $\iff M_{\mathcal{C}}(g) = \mathbb{I}_n$ , dove  $M_{\mathcal{C}}(g)$  è la matrice che rappresenta il prodotto scalare  $g$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$ . Quindi:

$$M_{\mathcal{C}}(g) = {}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}(g) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V).$$

Siccome  $\mathcal{B}$  è ortonormale,  $M_{\mathcal{B}}(g) = \mathbb{I}_n$ , quindi la precedente formula diventa:

$$M_{\mathcal{C}}(g) = {}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V),$$

da cui segue il risultato. □

**Corollario 6.1.9.** Sia  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Allora  $A \in O(n)$  se e solo se le colonne di  $A$ ,  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$  formano una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$  rispetto al prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^n$ .

## 6.2 Caratterizzazione delle matrici di $O(2, \mathbb{R})$

**Proposizione 6.2.1.** Sia  $A \in O(2, \mathbb{R})$ . Allora:

- se  $\det(A) = 1$ ,  $\exists \theta \in \mathbb{R}$  tale che

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

- se  $\det(A) = -1$ ,  $\exists \theta \in \mathbb{R}$  tale che

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2, \mathbb{C})$ . Allora, per definizione,  $A$  è ortogonale se e solo se

$$\mathbb{I}_2 = {}^t A \cdot A,$$

cioè se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Dalle equazioni  $a^2 + c^2 = 1$  e  $b^2 + d^2 = 1$ , segue che i punti  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  appartengono alla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine in  $\mathbb{R}^2$ .

In particolare esistono  $\phi, \psi \in \mathbb{R}$  tali che  $a = \cos \phi$ ,  $c = \sin \phi$ ,  $b = \cos \psi$  e  $d = \sin \psi$ .

Inoltre, dalla equazione  $ab + cd = 0$  deduciamo

$$0 = \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi = \sin(\theta + \varphi).$$

Di conseguenza,  $\theta + \varphi$  deve essere  $0 + 2k\pi$  o  $\pi + 2k\pi$ .

Nel primo caso si ottiene la matrice  $R_\theta$ ; nel secondo caso si ottiene la matrice  $S_\theta$ . □

Vediamo ora che possiamo caratterizzare anche autovalori e autospazi delle matrici di  $O(2, \mathbb{R})$ .

**Proposizione 6.2.2.** *Per una matrice  $M \in O(2)$  ci sono le seguenti possibilità:*

- i) se  $M = R_\theta$ , essa ha autovalori reali se e solo se  $\theta = 0$  oppure  $\theta = \pi$  se e solo se  $R_\theta = \pm \mathbb{I}_2$ .
- ii) Se  $M = S_\theta$ , essa ha sempre autovalori reali e precisamente  $\pm 1$ . Inoltre i relativi autospazi  $V_1$  e  $V_{-1}$  sono tra loro ortogonali.

*Dimostrazione.* *i)* Si consideri il polinomio caratteristico di  $R_\theta$  dato da

$$P_\lambda(R_\theta) = \det(R_\theta - \lambda \mathbb{I}_2) = (\cos \theta - \lambda)^2 + (\sin \theta)^2 = \lambda^2 - 2(\cos \theta)\lambda + 1.$$

Esso ha radici reali se e solo se il suo discriminante  $\Delta/4 = (\cos \theta)^2 - 1 \geq 0$ . Ma tale condizione equivale a  $(\cos \theta)^2 - 1 = 0$ ; questo si verifica se e solo se  $\cos \theta = \pm 1$  ovvero se e solo se  $\theta = 0$  oppure  $\theta = \pi$ . L'ultima affermazione è banale. *ii)* Si osservi anzitutto che  $S_\theta$ , essendo una matrice  $2 \times 2$  simmetrica reale, ha due autovalori reali e, se distinti, i suoi due autospazi sono ortogonali. Per calcolare tali autovalori, si consideri il polinomio caratteristico di  $S_\theta$  dato da

$$P_\lambda(S_\theta) = \det(S_\theta - \lambda \mathbb{I}_2) = \lambda^2 - 1.$$

Esso è indipendente da  $\theta$  e ha sempre come radici  $\pm 1$ . □

**Osservazione 6.2.3.** Per comprendere il significato geometrico di  $R_\theta$ , basta considerare l'automorfismo di  $\mathbb{R}^2$  ad essa associato:

$$L_{R_\theta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definito da

$$(x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Utilizzando le coordinate polari nel dominio e nel codominio, si ha una forma esplicita più significativa. Infatti

$$r(\cos \psi, \sin \psi) \mapsto (r \cos \psi \cos \theta - r \sin \psi \sin \theta, r \cos \psi \sin \theta + r \sin \psi \cos \theta)$$

e quest'ultima espressione è esattamente  $r(\cos(\psi + \theta), \sin(\psi + \theta))$ . Pertanto  $R_\theta$  è associata alla rotazione antioraria di angolo  $\theta$ .

Vediamo ora come anche le matrici  $S_\theta$  abbiano una interpretazione geometrica, e precisamente in termini di simmetrie assiali. Vediamo prima questo concetto in generale.

**Definizione 6.2.4.** Sia  $H$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ ; possiamo scrivere ogni vettore  $v \in \mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$  in modo unico come  $v = v_H + v_{H^\perp}$ , dove  $v_H \in H$  e  $v_{H^\perp} \in H^\perp$ .

Si dice *simmetria rispetto a  $H$*  l'applicazione

$$\text{sy}_H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{definita da} \quad v = v_H + v_{H^\perp} \mapsto v_H - v_{H^\perp}.$$

**Proposizione 6.2.5.** *Con le notazioni precedenti, l'applicazione  $\text{sy}_H$  è un automorfismo ortogonale di  $\mathbb{R}^n$  ed è diagonalizzabile.*

*Inoltre, se  $H$  è un iperpiano,  $\text{sy}_H$  è ortogonale non speciale.*

*Dimostrazione.* È facile verificare che  $\text{sy}_H$  è un'applicazione lineare. Sia  $s := \dim(H)$ . Se  $s = 0$ , la tesi segue banalmente. Sia dunque  $s \geq 1$  e sia  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_s)$  una base ortonormale di  $H$ . Si consideri il suo completamento a una base ortonormale  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_s, \dots, v_n)$  di  $\mathbb{R}^n$ . La matrice associata alla simmetria, rispetto a  $\mathcal{B}$ , risulta

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{sy}_H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

dove sulla diagonale compare 1 per  $s$  volte e  $-1$  per  $n - s$  volte. Tale matrice è ortogonale.

Pertanto, per la Proposizione 6.1.4, l'endomorfismo  $\text{sy}_H$  è un automorfismo ortogonale.

Infine, se  $H$  è un iperpiano, allora  $s = n - 1$  e dunque  $\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{sy}_H)) = -1$ , pertanto la matrice è ortogonale non speciale.  $\square$

**Esempio 6.2.6.** Vediamo due esempi di matrici non speciali  $S_{\theta}$  nei casi  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ :

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_{\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso, il corrispondente automorfismo ortogonale di  $\mathbb{R}^2$  è dato da  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ .

Nel secondo caso, il corrispondente automorfismo ortogonale è dato da  $(x, y) \mapsto (-x, y)$ .

Le matrici  $S_0$  e  $S_{\pi}$  sono associate, rispettivamente, alla simmetria rispetto a  $\text{Span}(e_1)$  (asse  $x$ ) e a quella rispetto a  $\text{Span}(e_2)$  (asse  $y$ ).

Vediamo ora che le matrici  $S_{\theta}$  sono sempre associate a delle opportune simmetrie.

**Proposizione 6.2.7.** *Per ogni matrice del tipo  $S_{\theta}$ , l'applicazione lineare associata  $L_{S_{\theta}}$  è una simmetria rispetto al sottospazio  $\text{sy}_{V_1} \subset \mathbb{R}^2$ , dove  $V_1$  è l'autospazio di  $S_{\theta}$  associato all'autovalore 1.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_1^{\perp} = V_1 \oplus V_{-1}$ . Quindi, per ogni  $v \in \mathbb{R}^2$ , si può scrivere  $v = v_{V_1} + v_{V_{-1}}$ . Da una parte, per definizione di autovettore, si ha  $S_{\theta}(v_{V_1}) = v_{V_1}$  e  $S_{\theta}(v_{V_{-1}}) = -v_{V_{-1}}$ . Pertanto, per la linearità,

$$S_{\theta} \cdot v = v_{V_1} - v_{V_{-1}}.$$

D'altra parte, per definizione di simmetria rispetto a  $V_1$ , si ha

$$\text{sy}_{V_1}(v) = v_{V_1} - v_{V_{-1}}.$$

$\square$

**Osservazione 6.2.8.** Determiniamo, in generale, l'autospazio  $V_1$  di

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Una equazione cartesiana di  $V_1$  è data da una riga del sistema lineare omogeneo

$$(S_\theta - \mathbb{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Se  $\theta \neq 0$ , una equazione è, ad esempio,

$$V_1 : (\cos \theta - 1)x + (\sin \theta)y = 0.$$

Possiamo, inoltre, determinare l'angolo acuto  $\alpha$  tra  $V_1$  e l'asse  $x$  data da  $\text{Span}(e_1)$ . Si ha:

$$\cos \alpha = \frac{\left| \left\langle \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right|}{\left\| \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \right\|} = \frac{|\sin \theta|}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)}}.$$

Infine, usando le formule di duplicazione  $\sin \theta = 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2$  e  $\cos \theta = \cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2$ , si trova

$$\cos \alpha = |\cos \theta/2|,$$

quindi  $\alpha = \theta/2$  se  $0 < \theta \leq \pi$ , e invece  $\alpha = \pi - \theta/2$  se  $\pi \leq \theta < 2\pi$ .

Le seguenti semplici proprietà sono lasciate come esercizio (alcune di queste possono essere dimostrate utilizzando note formule trigonometriche).

**Proposizione 6.2.9.** *Comunque scelti  $\theta$  e  $\varphi$ , valgono:*

- i)  $S_\theta S_\varphi = R_{\theta-\varphi} \in SO(2)$ ;
- ii)  $R_\theta R_\varphi = R_{\varphi+\theta} \in SO(2)$ ;
- iii)  $R_\theta S_\varphi = S_{\varphi+\theta} \notin SO(2)$ ;
- iv)  $S_\varphi R_\theta = S_{\varphi-\theta} \notin SO(2)$ ;
- v)  $S_{2\theta} = R_\theta S_0 R_{-\theta}$ .

*In particolare, la composizione di una rotazione e di una simmetria non è commutativa.*

Dalla ii) segue che  $SO(2)$  è un gruppo abeliano (però  $SO(n)$  non è abeliano per  $n \geq 3$ ).



Diamo soltanto lo schema della dimostrazione del teorema, senza entrare in tutti i dettagli, che comunque non sono difficili.

*Dimostrazione.* La dimostrazione è per induzione su  $n = \dim V$ .

La base dell'induzione consiste nei casi  $n = 1$  e  $n = 2$ . Se  $n = 1$ , una matrice ortogonale è uguale a  $(1)$  o a  $(-1)$ , quindi del tipo (6.3.1). Se  $n = 2$ , fissata una base ortonormale di  $V$ ,  $f$  è rappresentata da una matrice del tipo  $R_\alpha$  o  $S_\alpha$ . Nel primo caso abbiamo uno dei blocchi  $2 \times 2$  della (6.3.1), nel secondo caso la matrice è diagonalizzabile con autovalori  $1, -1$ ; prendendo due versori  $v_1, v_2$  nei relativi autospazi, otteniamo una base ortonormale rispetto a cui la matrice di  $f$  è  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Per dimostrare il passo induttivo, avremo bisogno del seguente lemma.

**Lemma 6.3.2.** *Sia  $V$  un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale di dimensione finita, e sia  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo. Allora esiste un sottospazio vettoriale  $W \subset V$ , con  $\dim W = 1$  o  $\dim W = 2$ , tale che  $f(W) \subset W$ ; un tale sottospazio è detto invariante rispetto a  $f$ .*

*Idea della dimostrazione del Lemma.* Se  $f$  ha un autovalore  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sia  $v$  un suo autovettore:  $f(v) = \lambda v$ . Allora  $W = \langle v \rangle$  ha dimensione 1 ed è invariante per  $f$ , perchè  $f(cv) = cf(v) = c\lambda v \in W$ .

Altrimenti, se  $f$  non ha autovalori reali, sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$  e sia  $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ , matrice reale  $n \times n$ . Passiamo quindi all'ambiente complesso, considerando l'applicazione lineare

$$L_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad z \rightarrow A \cdot z.$$

Ora, poichè siamo su  $\mathbb{C}$ , l'applicazione  $L_A$  ha almeno un autovalore (non reale)  $\lambda \in \mathbb{C}$ ; infatti,  $\lambda$  è una radice complessa di  $p_{L_A}(x) = p_A(x)$ , polinomio a coefficienti reali perchè  $A$  è reale.

Si provano ora i seguenti fatti:

1. anche il numero complesso coniugato  $\bar{\lambda}$  è radice di  $p_A(x)$  ed è dunque autovalore di  $L_A$ ;
2. fissato  $v$  un autovettore di  $\lambda$ , allora il suo coniugato  $\bar{v}$  è un autovettore di  $\bar{\lambda}$ , e  $v, \bar{v}$  sono linearmente indipendenti;
3. i vettori  $v + \bar{v}, i(v - \bar{v})$  sono reali, linearmente indipendenti e generano un sottospazio  $W'$  di  $\mathbb{R}^n$  invariante per  $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ossia  $L_A(W') \subset W'$ ;
4. consideriamo l'isomorfismo  $\kappa_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ; in questo isomorfismo  $W'$  corrisponde a un sottospazio  $W$  di  $V$  invariante per  $f$ , di dimensione 2.

Questo conclude la dimostrazione del Lemma. □

Torniamo a  $f : V \rightarrow V$  isometria lineare, con  $\dim V = n > 2$ . Per il Lemma precedente esiste un sottospazio  $W \subset V$  invariante per  $f$  di dimensione 1 o 2, ovvero tale che  $f(W) \subset W$ . Siccome  $f$  è un isomorfismo,  $\dim W = \dim f(W)$ , e perciò  $f(W) = W$ . Da ciò si dimostra che anche  $f(W^\perp) = W^\perp$ .

Ora possiamo considerare le restrizioni

$$f|_W : W \rightarrow W, \text{ e } f|_{W^\perp} : W^\perp \rightarrow W^\perp;$$

entrambi gli endomorfismi ristretti risultano delle isometrie. Possiamo quindi prendere due basi ortonormali  $\mathcal{B}_1$  di  $W$  come nella base dell'induzione, e  $\mathcal{B}_2$  di  $W^\perp$  come da ipotesi induttiva; essendo  $V = W \oplus W^\perp$ , l'unione di  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  è una base  $\mathcal{B}$  ortonormale di  $V$ , e  $M_{\mathcal{B}}(f)$  è una matrice a blocchi della forma

$$\left( \begin{array}{c|c} M_{\mathcal{B}_1}(f|_W) & 0 \\ \hline 0 & M_{\mathcal{B}_2}(f|_{W^\perp}) \end{array} \right)$$

come richiesto dal teorema. □

**Corollario 6.3.3** (Corollario per le matrici ortogonali). *Se  $A$  è una matrice ortogonale, allora esiste una matrice ortogonale  $S$  tale che  $S^{-1}AS = {}^tSAS$  è della forma descritta dal Teorema 6.3.1.*

## 6.4 Isometrie lineari di $\mathbb{R}^3$

Applichiamo il teorema appena visto al caso  $n = 3$ .

In questo caso il polinomio caratteristico  $p_f(x) \in \mathbb{R}[x]$  ha grado 3, dunque può avere o 3 radici reali, o una radice reale e due radici complesse coniugate.

In ogni caso  $f$  ha almeno un autovalore reale  $\lambda_1$ ; affermiamo che  $\lambda_1$  è uguale a 1 o a  $-1$ . Questo vale, in generale, per gli autovalori reali di isometrie lineari per il seguente risultato.

**Lemma 6.4.1.** *Sia  $A \in O(n)$ , e sia  $\lambda \in Sp(A)$ . Allora  $\lambda = \pm 1$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $v \in \mathbb{R}^n$  un autovettore di  $A$  relativo all'autovalore  $\lambda$ , quindi  $v \neq 0$  e  $A \cdot v = \lambda v$ . Poiché  $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una isometria, abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$\langle v, v \rangle = \langle A \cdot v, A \cdot v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle.$$

Siccome  $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 \neq 0$ , segue che  $\lambda^2 = 1$ , da cui il risultato. □

Torniamo al caso  $n = 3$ ; sia  $v_1$  un versore autovettore di  $\lambda_1$ ; allora

$$W := \text{Span}(v_1)^\perp$$

ha dimensione 2 ed è invariante:  $f(W) = W$ . Presa una base ortonormale  $\mathcal{B}'$  di  $W$  formata da  $v_2, v_3$ , la matrice di  $f$  rispetto a  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  è del tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & A' & \end{pmatrix}$$

dove  $A'$  rappresenta  $f|_W$  rispetto a  $\mathcal{B}'$ , dunque  $A' \in O(2)$ .

Ora distinguiamo i seguenti casi:

1.  $\det(A) = 1, \lambda_1 = -1$ : allora  $\det(A') = -1$  e la forma normale è  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  :

rotazione di  $\pi$  intorno all'asse  $y$ ;

2.  $\det(A) = 1, \lambda_1 = 1$ : allora  $\det(A') = 1$  e la forma normale è  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  :

rotazione di  $\alpha$  intorno all'asse  $x$ ;

3.  $\det(A) = -1, \lambda_1 = 1$ : allora  $\det(A') = -1$  e la forma normale è  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  : riflessione

rispetto al piano  $xy$  che è fisso, ed è l'autospazio di autovalore 1;

4.  $\det(A) = -1, \lambda_1 = -1$ : allora  $\det(A') = 1$  e la forma normale è  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  .

Nei due casi in cui  $\det(A) = 1$ , abbiamo una rotazione intorno a un asse, in effetti il gruppo ortogonale speciale  $SO(3)$  è detto anche gruppo delle rotazioni di  $\mathbb{R}^3$ .

# Capitolo 7

## Isometrie degli spazi affini euclidei

**Definizione 7.0.1.** Si dice *isometria affine* dello spazio affine euclideo  $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$  una affinità  $f$  la cui parte lineare  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una isometria lineare. L'insieme delle isometrie di  $\mathbb{E}^n$  si denota con  $\text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ .

**Proposizione 7.0.2.** L'insieme  $\text{Iso}(\mathbb{E}^n)$  è un gruppo rispetto alla composizione, ed è un sottogruppo di  $\text{Aff}(\mathbb{E}^n)$ .

*Dimostrazione.* Basta ricordare che le isometrie lineari di  $\mathbb{R}^n$  costituiscono un sottogruppo di  $GL(n)$ , che è infatti il gruppo ortogonale  $O(n)$ .  $\square$

Si osservi che, in quanto affinità, una isometria  $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$  di parte lineare  $\varphi$  in un riferimento cartesiano  $(O, \mathcal{B})$  ammette un'equazione matriciale del tipo

$${}^tY = M{}^tX + {}^tC,$$

con  $M = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \in O(n, \mathbb{R})$ ,  ${}^tX$  e  ${}^tY$  colonne delle coordinate del generico punto  $P \in \mathbb{E}^n$  e di  $f(P) \in \mathbb{E}^n$ , mentre  ${}^tC$  rappresenta la colonna delle coordinate di  $C = f(O)$ .

**Esempio 7.0.3.** Un immediato esempio di isometria è dato dalle traslazioni.

Infatti, abbiamo osservato che un'affinità  $f \in \text{Aff}(\mathbb{E}^n)$  di equazione  $Y = MX + C$  è una traslazione se e solo se  $M = \mathbb{I}_n$ . In tal caso  $f = t_v$ , dove  $v = \overrightarrow{Of(O)}$ . Avendo  $\mathbb{I}_n \in O(n)$ , l'affermazione è verificata.

Le "proprietà euclidee", cioè quelle che vengono mantenute per isometria, sono le distanze e gli angoli.

**Proposizione 7.0.4.** Sia  $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$  di parte lineare  $\varphi$ . Allora, per ogni  $P, Q \in \mathbb{E}^n$  vale

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q)).$$

*Dimostrazione.* Per definizione

$$d(P, Q)^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2$$

e, analogamente, tenendo conto che  $f$  è un'affinità di parte lineare  $\varphi$ ,

$$d(f(P), f(Q))^2 = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\|^2 = \|\varphi(\overrightarrow{PQ})\|^2.$$

Si conclude osservando che  $\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\varphi(\overrightarrow{PQ})\|^2$  perché  $\varphi$  è un'isometria lineare.  $\square$

Vediamo ora che le isometrie affini conservano gli angoli tra rette.

**Proposizione 7.0.5.** *Sia  $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$  di parte lineare  $\varphi$ . Allora, se  $r$  e  $s$  sono due rette di  $\mathbb{E}^n$ , si ha*

$$\widehat{r\hat{s}} = \widehat{f(r)f(s)}.$$

*Dimostrazione.* Ricordiamo che l'angolo  $\theta = \widehat{r\hat{s}}$  è individuato da

$$\cos \theta = \frac{|\langle v_r, v_s \rangle|}{\|v_r\| \|v_s\|}.$$

L'angolo  $\theta' = \widehat{f(r)f(s)}$  è individuato da

$$\cos \theta' = \frac{|\langle \varphi(v_r), \varphi(v_s) \rangle|}{\|\varphi(v_r)\| \|\varphi(v_s)\|}.$$

Essendo  $\varphi$  un'isometria lineare, si ha

$$\langle \varphi(v_r), \varphi(v_s) \rangle = \langle v_r, v_s \rangle, \quad \|\varphi(v_r)\| = \|v_r\|, \quad \|\varphi(v_s)\| = \|v_s\|$$

e quindi  $\cos \theta = \cos \theta'$ .  $\square$

Terminiamo con un risultato sui cambi di riferimenti cartesiani in  $\mathbb{E}^n$ .

**Teorema 7.0.6.** *Siano  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  e  $\Sigma' = (O', \mathcal{B}')$  due riferimenti cartesiani di  $\mathbb{E}^n$  e siano  $(c_1, \dots, c_n)$  le coordinate del punto  $O$  nel riferimento  $\Sigma'$ .*

*Se un punto  $P \in \mathbb{E}^n$  ha coordinate  $(x_1, \dots, x_n)$  rispetto a  $\Sigma$  e coordinate  $(y_1, \dots, y_n)$  rispetto a  $\Sigma'$ , allora, posti*

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad A := M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^n})$$

si ha

$$Y = AX + C.$$

## 7.1 Classificazione delle isometrie del piano

Tenuto conto della Proposizione 6.2.1, abbiamo una prima suddivisione delle isometrie del piano.

**Definizione 7.1.1.** Sia  $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^2)$  data dall'equazione, rispetto a un riferimento cartesiano  $(O, \mathcal{B})$ ,

$$Y = MX + C, \quad M \in O(2).$$

Se  $M = R_\theta \in SO(2)$ , diremo che  $f$  è una *isometria diretta* o *rototraslazione*. Se invece  $M = S_\theta$ , diremo che  $f$  è una *isometria inversa*.

Vediamo alcuni casi particolari.

**Esempio 7.1.2.** Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano  $(O; v_1, \dots, v_n)$ .

Se  $C = O$ , allora un'isometria affine di equazione  $Y = MX$  può essere identificata con una rotazione di tipo  $R_\theta$  o con una simmetria di tipo  $S_\theta$ , a seconda che  $M = R_\theta$  o  $M = S_\theta$ .

**Definizione 7.1.3.** Una *rotazione di angolo  $\theta$  e di centro il punto  $P_0$*  è l'isometria

$$\rho_{\theta, P_0} := t_w \circ R_{\theta, O} \circ t_{-w}$$

dove  $w = \overrightarrow{OP_0}$  e  $R_{\theta, O}$  indica l'affinità che fissa l'origine  $O$  e con parte lineare  $R_\theta$ .

**Osservazione 7.1.4.** Determiniamo la forma matriciale di  $\rho_{\theta, P_0}$ . Ricordiamo che dato un vettore  $v\overrightarrow{OP_0}$ , si ha

$$t_v(P) = P + P_0, \quad t_{-v}(P) = P - P_0,$$

dove con  $P + P_0$  intendiamo il punto di coordinate date dalla somma delle coordinate di  $P$  e di quelle di  $P_0$ . Pertanto l'equazione di  $\rho_{\theta, P_0}$  risulta

$$Y = P_0 + R_\theta(X - P_0)$$

o anche

$$Y = R_\theta X + (\mathbb{I}_2 - R_\theta)P_0.$$

Dunque  $\rho_{\theta, P_0}$  è una rototraslazione.

Come vedremo nel Teorema di classificazione, le traslazioni e le rotazioni di dati angolo e centro sono le uniche isometrie dirette.

**Definizione 7.1.5.** Data una retta affine  $r \subset \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ , la simmetria  $\sigma_r$  di asse  $r$  è

$$\sigma_r = t_w \circ S_\theta \circ t_{-w}$$

dove  $w = \overrightarrow{OP_0}$ ,  $P_0 \in r$  e  $S_\theta$  è la matrice associata alla simmetria lineare con autospazio  $V_1$  uguale alla giacitura  $W_r$  di  $r$ :

$$V_1 = W_r.$$

**Osservazione 7.1.6.** Data una simmetria assiale affine  $\sigma_r$ , la retta  $r$  risulta una retta di punti fissi, e una qualunque retta  $s$  ortogonale a  $r$  è invariante per  $\sigma_r$ , cioè

$$\sigma_r(s) = s.$$

Infatti, fissato un sistema di riferimento cartesiano  $(O; v_1, \dots, v_n)$ , un'equazione per  $\sigma_r$  è data da

$$\sigma_r(X) = S_\theta(X - P_0) + P_0.$$

Se  $r$  è data dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + l_1 t \\ x_2 = p_2 + l_2 t' \end{cases}$$

dove  $P_0 = (p_1, p_2)$ , il suo generico punto  $Q = (q_1, q_2)$  verifica

$$\sigma_r(Q) = S_\theta(Q - P_0) + P_0 = t S_\theta \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} + P_0.$$

Essendo  $W_r = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right) = V_1$ , si ha

$$S_\theta \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix},$$

quindi  $\sigma_r(Q) = Q$ .

Inoltre, se  $s \perp r$ , la giacitura di  $s$  corrisponde all'autospazio  $V_{-1}$  corrispondente all'autovalore  $-1$  di  $S_\theta$ , quindi delle equazioni parametriche per  $s$  sono date da

$$\begin{cases} x_1 = q_1 - l_2 t \\ x_2 = q_2 + l_1 t' \end{cases}$$

dove  $Q = (q_1, q_2) = r \cap s$  e per il generico punto  $R = (r_1, r_2) \in s$  si ha

$$\sigma_r(R) = S_\theta(R - P_0) + P_0 = S_\theta(Q - P_0) + t S_\theta \cdot \begin{pmatrix} -l_2 \\ l_1 \end{pmatrix} + P_0 = S_\theta(Q - P_0) + t \begin{pmatrix} l_2 \\ -l_1 \end{pmatrix} + P_0.$$

Ricordiamo ora che  $Q - P_0$  sono le coordinate del vettore  $\overrightarrow{P_0Q} \in W_r = V_1$ , quindi possiamo ancora scrivere

$$\sigma_r(R) = Q - P_0 + t \begin{pmatrix} l_2 \\ -l_1 \end{pmatrix} + P_0 = Q + t \begin{pmatrix} l_2 \\ -l_1 \end{pmatrix},$$

ed essendo

$$\begin{pmatrix} l_2 \\ -l_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_2 \\ l_1 \end{pmatrix},$$

vediamo che  $\sigma_r(R) \in s$ .

Osserviamo, infine che  $d(R, Q) = d(\sigma_r(R), Q)$ . Diciamo che  $\sigma_r(R)$  è il punto simmetrico di  $R$  rispetto all'asse  $r$ .

**Definizione 7.1.7.** Sia  $r \subset \mathbb{E}^2$  una retta e  $v$  un vettore parallelo a  $r$ ; si dice *glissoriflessione rispetto a  $r$  e  $v$*  l'isometria definita da

$$gl_{r,v} := t_v \circ \sigma_r.$$

**Teorema 7.1.8.** (Classificazione delle isometrie del piano euclideo) *Sia  $f$  un'isometria di  $\mathbb{E}^2$ . Allora  $f$  è uno dei seguenti tipi:*

- Se  $f$  ha almeno un punto fisso, allora

$$f = \rho_{\theta, P_0}, \text{ uadoppure } f = \sigma_r.$$

*Nel primo caso  $f$  ha esattamente un punto fisso, il centro di rotazione; nel secondo caso  $f$  ha una retta di punti fissi, l'asse  $r$  della simmetria.*

- Se  $f$  non ha punti fissi, allora

$$f = t_v, \text{ uadoppure } f = gl_{r,v},$$

dove  $v \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ .

*Dimostrazione.* • Scriviamo  $f$  in coordinate

$$Y = MX + C, \tag{7.1.1}$$

e supponiamo che  $f$  abbia almeno un punto fisso  $P_0$ :

$$P_0 = MP_0 + C.$$

Questa relazione implica che

$$C = (\mathbb{I}_2 - M)P_0.$$

Sostituendo in (7.1.1) otteniamo

$$Y = MX + (\mathbb{I}_2 - M)P_0,$$

ovvero

$$Y = M(X - P_0) + P_0. \quad (7.1.2)$$

Infine, essendo  $M \in O(2, \mathbb{R})$ , essa è del tipo  $M = R_\theta$  oppure  $M = S_\theta$ , e l'espressione (7.1.2) rappresenta proprio  $\rho_{\theta, P_0}$ , rispettivamente  $\sigma_r$ .

• Supponiamo ora che  $f$  non abbia punti fissi, cioè che l'equazione  $X = MX + C$  non abbia soluzioni in  $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ . Ciò equivale a dire che il sistema lineare

$$(\mathbb{I}_2 - M)X = C$$

non è compatibile. Dal Teorema di Rouché - Capelli questo accade se e solo se

$$\text{rg}(\mathbb{I}_2 - M) \neq \text{rg}(\mathbb{I}_2 - M \mid C).$$

Essendo la matrice completa  $(\mathbb{I}_2 - M \mid C)$  di tipo  $2 \times 3$ , abbiamo solo due possibilità:

1.  $\text{rg}(\mathbb{I}_2 - M) = 0 < 1 = \text{rg}(\mathbb{I}_2 - M \mid C)$ ; questo equivale a dire che

$$M = \mathbb{I}_2, \text{ uad}C \neq (0, 0),$$

cioè  $f$  è una traslazione di un vettore non nullo;

2.  $\text{rg}(\mathbb{I}_2 - M) = 1 < 2 = \text{rg}(\mathbb{I}_2 - M \mid C)$ ; questo implica che 1 è un autovalore di  $M$  e  $\dim V_1 = \dim \ker(\mathbb{I}_2 - M) = 1$ ; per la classificazione delle isometrie lineari, vediamo che questo è possibile solo se  $M = S_\theta$  per un  $\theta$  opportuno. Inoltre,  $\text{rg}(\mathbb{I}_2 - M \mid C)$  ci assicura che  $C$  non è combinazione lineare delle colonne di  $\mathbb{I}_2 - S_\theta$ ; si può verificare facilmente che, geometricamente, ciò corrisponde al fatto che il vettore  ${}^tC$  non appartiene a  $V_1^\perp = V_{-1}$ , dove  $V_1$  e  $V_{-1}$  sono i due autospazi di  $S_\theta$ .

Quindi, se scriviamo

$${}^tC = v_1 + v_{-1}, \text{ uad}v_1 \in V_1, \quad v_{-1} \in V_{-1},$$

abbiamo  $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ . Inoltre, possiamo scrivere

$$Y = S_\theta X + v_1 + v_{-1} = S_\theta X + v_1 + 2\frac{v_{-1}}{2} = S_\theta(X - \frac{1}{2}v_{-1}) + \frac{1}{2}v_{-1} + v_1,$$

quindi  $f$  è del tipo

$$f = t_v \circ \sigma_r,$$

con  $r$  retta di giacitura  $W_r = V_1$  e passante per il punto  $\frac{1}{2}{}^t v_{-1}$ , e  $v = v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ .

□

Infine, vediamo un risultato che ci mostra che le simmetrie sono delle trasformazioni che ci permettono di trovare tutte le isometrie affini.

**Teorema 7.1.9.** *Ogni isometria affine del piano è una composizione finita di simmetrie affini.*

*Dimostrazione.* Consideriamo dapprima le traslazioni  $t_v$  lungo un vettore non nullo  $v$ . Poniamo

$$c := \|v\|/2.$$

Siano  $r$  e  $s$  due rette ortogonali a  $v$  tali che  $d(r, s) = c$  e siano  $\sigma_r$  e  $\sigma_s$  le riflessioni corrispondenti.

Vogliamo provare che

$$t_v = \sigma_s \circ \sigma_r \quad \text{oppure} \quad t_v = \sigma_r \circ \sigma_s.$$

Non è restrittivo scegliere un riferimento cartesiano tale che le due rette abbiano equazione

$$r : x = 0, \quad s : x = c.$$

Si osservi che, in tale riferimento,  $v = (\pm 2c, 0)$  e le riflessioni sono

$$\sigma_r(x, y) = (-x, y), \quad \sigma_s(x, y) = (2c - x, y).$$

Dunque

$$\sigma_r(\sigma_s(x, y)) = \sigma_r(2c - x, y) = (x - 2c, y) = (x, y) + (-2c, 0)$$

e quindi  $\sigma_r \circ \sigma_s$  è la traslazione lungo il vettore  $(-2c, 0)$ . Analogamente

$$\sigma_s(\sigma_r(x, y)) = \dots = (x, y) + (2c, 0)$$

e quindi  $\sigma_s \circ \sigma_r$  è la traslazione lungo il vettore  $(2c, 0)$ . Questo conclude la dimostrazione.

Passiamo ora alle rotazioni del tipo  $\rho_{\theta, P_0}$ . Ricordiamo che per la Proposizione 6.2.9 abbiamo

$$S_\alpha \cdot S_\beta = R_{\alpha-\beta};$$

in particolare, possiamo scrivere  $R_\theta = S_\theta \cdot S_0$ , da cui  $\rho_{\theta, P_0} = t_w \circ R_\theta \circ t^{-w} = t_w \circ S_\theta \cdot S_0 \circ t^{-w}$ , e si conclude perché abbiamo già dimostrato la tesi per le traslazioni.

Consideriamo, infine, le glissoriflessioni: sono del tipo  $gl_{r,v} = t_v \circ \sigma_r$ , dove  $r$  è una retta e  $v$  un vettore direzionale di  $r$ ; si conclude nuovamente perché abbiamo già dimostrato la tesi per le traslazioni. □

Come nel caso delle isometrie del piano, anche lo studio delle isometrie dello spazio euclideo si fonda sulla descrizione delle matrici ortogonali reali  $3 \times 3$ .

Enunciamo, senza dimostrarlo, l'analogo risultato di classificazione delle isometrie affini in  $\mathbb{E}^3$  (Eulero, 1776).

**Teorema 7.1.10.** (Classificazione delle isometrie dello spazio affine euclideo) Sia  $f$  un'isometria di  $\mathbb{E}^3$  espressa, in un riferimento cartesiano ortogonale, da  $Y = f(X)$  dove

$$Y = AX + C,$$

con  $A \in O(3)$  e  $C \in \mathbb{E}^3$ . Allora  $f$  è uno dei seguenti tipi:

1. traslazione  $t_v$  (diretta, senza punti fissi);
2. riflessione  $\rho_\pi$  (inversa, con un piano fisso  $\pi$  che è l'asse della riflessione);
3. rotazione  $\sigma_{r,\theta}$  (diretta, con una retta fissa  $r$  che è l'asse della rotazione di angolo  $\theta$ );
4. glissoriflessione  $gl_{\pi,v} = t_v \circ \rho_\pi$  (inversa senza punti fissi, con  $v$  vettore parallelo a  $\pi$ );
5. glissorotazione  $t_v \circ \sigma_{r,\theta}$  (diretta senza punti fissi, con  $v$  vettore parallelo a  $r$ );
6. riflessione rotatoria  $\rho_\pi \circ \sigma_{r,\theta}$  (inversa, con un punto fisso, con  $r$  retta ortogonale al piano  $\pi$ ).