Lezione 9 aprile 2026

giovedì 9 aprile 2026 11:07

Abbiamo visto: isom. affine

Fissiamo $(O; v_1, v_2)$ SIST. RIF. CARTESIANO

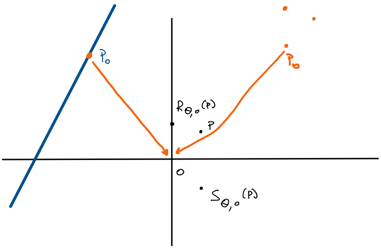
$R_{\theta,O}$: affinità t.c. $R_{\theta,O}(O) = O$

con parte lineare L_{R_θ}

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$S_{\theta,O}$: affinità t.c. $S_{\theta,O}(O) = O$

parte lineare S_θ



Def. $S_{\theta,P_0} := t_w \circ R_{\theta,O} \circ t_{-w}$, dove

$w := \vec{OP_0}$, r retta affine, $P_0 \in r$

$\sigma_r := t_w \circ S_{\theta,O} \circ t_{-w}$

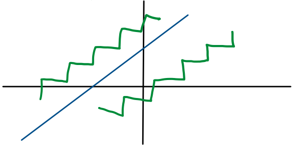
dove $w := \vec{OP_0}$,

S_θ ha come asse di simmetria

$V_1 = W_r$ giacitura di r

Def.: GLISSORIFLESSIONE

$gl_{r,v} := t_v \circ \sigma_r$, con $v \in W_r$



Teo: Tutte e sole le isom. affini f di $E^2_{\mathbb{R}}$ sono:

- f ha almeno 1 punto fisso
  - ρ_{θ, P_0}
  - σ_r
- f non ha punti fissi
  - t_v traslazione
  - $gl_{r,v}$

Dim. In coordinate $x = (x_1, x_2)$
$y = (y_1, y_2)$

$y = f(x)$

$(*)$ $\ {}^t y = M \cdot {}^t x + {}^t c$, $M \in O(2, \mathbb{R})$

$c = (c_1, c_2) = f(0,0)$
$= f(0)$

Dim: • f ha almeno 1 punto fisso

$f(P_0) = P_0$

$(*)$ $\ {}^t P_0 = M \cdot {}^t P_0 + {}^t c$

$(I_2 - M) \cdot {}^t P_0 = {}^t c$

sostituisco in $(*)$

$${}^t y = M \cdot {}^t x + (I_2 - M) \cdot {}^t P_0$$

$${}^t y = M \cdot ({}^t x - {}^t P_0) + {}^t P_0$$

$\Rightarrow y = f(x) = t_w \circ M_0 \circ t_{-w}$, con $M \in O(2, \mathbb{R})$

$w = \overrightarrow{OP}$

quindi trovo ρ_{θ, P_0} opp. σ_r con r retta passante per P_0 e di giacitura $W_r = V_1$ aut. di $S_\theta = M$

infatti in coordinate

$$(t_w \circ M_0 \circ t_{-w})(x) = M \cdot {}^t(x - P_0) + {}^t P_0$$

$w = \overrightarrow{OP_0}$,

$-w = \overrightarrow{P_0 O} = \begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$

$P_0 = (x_0, y_0)$

$$t_{-w}(x) = (x_1 - x_0, \cancel{x}_2 - y_0) = X - P_0$$

$$t_w(Z) = Z + P_0$$

$$Z = (z_1, z_2)$$

- Se invece f non ha punti fissi

$\forall \bar{x} : f(\bar{x}) \neq \bar{x}$

${}^t\bar{x} = M \cdot {}^t\bar{x} + {}^tC$ mai verificata

$(\mathbb{I}_2 - M) \cdot {}^tx = {}^tC$ è un SL

incompatibile

In particolare, NON è omogeneo

$C \neq 0 = (0,0)$

Rouché - Capelli

$$\mathrm{rg}(\mathbb{I}_2 - M) \neq \mathrm{rg}(\mathbb{I}_2 - M \mid {}^tC)$$

Possibili casi: $\downarrow$ $= 0$

$$\Downarrow$$

$\mathbb{I}_2 - M = 0$ matrice nulla

$\Rightarrow M = \mathbb{I}_2$

$$\Downarrow$$

f è una traslazione

$\underbrace{\mathrm{rg}(\mathbb{I}_2 - M) = 1}$, $\mathrm{rg}(\mathbb{I}_2 - M \mid {}^tC) = 2$

$$\Downarrow$$

$$\ker(\mathbb{I}_2 - M) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

$$\Rightarrow \ker(M - \mathbb{I}_2) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

$$= V_1$$

$M \neq \mathbb{I}_2 \Rightarrow M = S_\Theta$

Infine: ${}^tC = \overrightarrow{OC} \in \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_{-1}$ autosp. di S_Θ

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = v_1 + v_{-1}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad v_{-1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^ty = S_\Theta \cdot {}^tx + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{v_{-1}}$$

$$=$$

$$S_\Theta \cdot v_{-1} = (-1) \cdot v_{-1} = -v_{-1}$$

$$\frac{1}{2} v_{-1} = -S_\Theta \cdot \frac{1}{2} v_{-1}$$

$$= \underbrace{S_\Theta\left({}^tx - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{\sigma_r} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{v_1} = \overset{t_{v_1} \circ}{\vee}(t_w \circ S_{\Theta,0} \circ t_{-w})$$

con r retta affine per $P_0 = (\frac{1}{2} b_1, \frac{1}{2} b_2)$
e con giacitura V_1

$$\overrightarrow{OP_0} = w$$

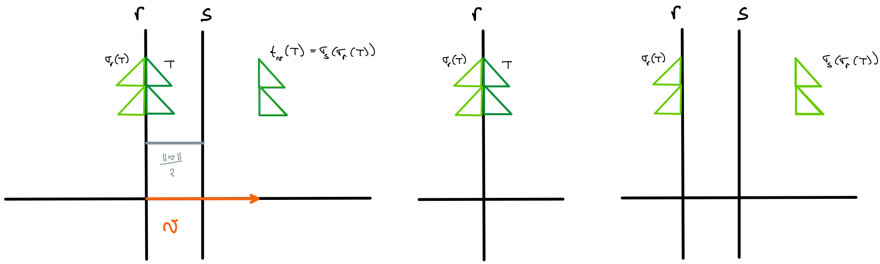
Infine:

Teorema: Ogni isometria del piano è composizione di un numero finito di riflessioni.

Dim.: Idea Ricordo: $S_\Theta = {}^t S_\Theta = S_\Theta^{-1}$

$$S_\Theta \cdot S_\Theta = I_2$$

Considero prima il caso delle traslazioni t_v



Poniamo $\frac{\|v\|}{2} =: c$

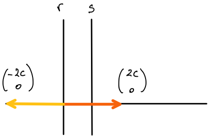
siano r e s ortogonali a v e t.c.

$$d(r, s) = c$$

e cons. σ_r e σ_s

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano in cui si abbia:

r: $x = 0$, s: $x = c$


r
s
$\begin{pmatrix} -2c \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2c \\ 0 \end{pmatrix}$

e quindi $v = \begin{pmatrix} \pm 2c \\ 0 \end{pmatrix}$

Con queste scelte abbiamo

$\sigma_r(x,y) = (-x, y)$

$\sigma_s(x,y) = (2c - x, y)$

$\sigma_r(\sigma_s(x,y)) = \sigma_r(2c-x, y) = (x-2c, y) = (x,y) + (-2c, 0) \; : \; t_v \quad v = \begin{pmatrix} -2c \\ 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_s(\sigma_r(x,y)) = \sigma_s(-x, y) = (2c+x, y) = (x,y) + (2c, 0) \; : \; t_v \quad v = \begin{pmatrix} 2c \\ 0 \end{pmatrix}$

Infine: Teo Class.: $\rho_{\theta, P_0} = t_w \circ R_{\theta, 0} \circ t_{-w}$

$R_\theta = S_{\theta+\alpha} \circ S_\alpha$

σ_r

$gl_{r,v} = t_v \circ \sigma_r$