# Lezione 8 aprile 2026

mercoledì 8 aprile 2026 11:19

Visto : $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$L_{S_\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è simmetria

$sy_{V_1}$ con $V_1$ autosp. relativo $\lambda = 1$

## Dim. Teo. Forma normale per isometrie lineari

Idea: per induz. su $n = \dim V$

Base di induzione $n = 1$ e $n = 2$

$n = 1$ : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $f(x) = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$

$\|f(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in \mathbb{R}$

$v = x$ , $\langle v, v \rangle = x^2$

$\|v\| = \sqrt{x^2} = |x|$

$f$ lineare $|c x| = |x| \Rightarrow c = \pm 1$ ok

$n = 2$ : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometria lineare ok

**Lemma:** Sia $V$ un $\mathbb{R}$-sp. vett. di dim $n$

$f : V \to V$ endomorfismo (qualunque)

Allora $\exists$ un SSV $W \subseteq V$ con

$\dim W = 1$ opp. $\dim W = 2$

t.c. $f(W) \subseteq W$, cioè $W$

è invariante rispetto a $f$.

Dim. Se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore, cons.

$v$ autovettore; $\mathrm{Span}(v) = W$, $\dim W = 1$

$f(W) \subseteq W$

Se invece $f$ non ha autovalori reali,

sia $\mathcal{B}$ base di $V$, cons.

$$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in M_n(\mathbb{R})$$

e cons.

$$L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

Per Teo. Fond. Algebra, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di $L_A$

Fatti:

- siccome $A$ reale, $p_A(x)$ ha coeff. reali $\Rightarrow \bar{\lambda}$ è radice di $p_A(x)$
  ($p_A(\lambda)=0 \Rightarrow \overline{p_A(\lambda)} = \bar{0} = p_A(\bar{\lambda})$)

- se $v \in \mathbb{C}^n$ è autovettore relativo a $\lambda$
  $\Rightarrow$ se $\bar{v} \in \mathbb{C}^n$ è autovettore relativo a $\bar{\lambda}$
  & $v$ e $\bar{v}$ sono LIN. INDIP.

- i vettori $v+\bar{v}$ & $i(v-\bar{v})$
  sono 2 vettori di $\mathbb{R}^n$ e sono LIN. INDIP.

- si verifica che $W' = \text{Span}(v+\bar{v}, i(v-\bar{v}))$
  è SSV invariante per

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$L_A(W') \subseteq W' \subseteq \mathbb{R}^n$$

- infine, cons. $f_B : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$
  $f_B(v) = (\text{coordinate di } v \text{ nella } B)$

  è ISOMORF. di SV

Pongo $W := f_B^{-1}(W')$
$\dim W = 2$

e si verifica che $f(W) \subseteq W$.

## Dim. del Teorema:

Supp. $n \geq 3$; $f : V \longrightarrow V$ isometria

Per il Lemma, $\exists$ $W$ invariante, $\dim W = 1, 2$

$f$ isometria $\Rightarrow f(W^\perp) \subseteq W^\perp$

$$V = W \oplus W^{\perp} \quad , \quad \left.\begin{array}{l} f|_{W} : W \longrightarrow W \\ f|_{W^{\perp}} : W^{\perp} \longrightarrow W^{\perp} \end{array}\right\} \text{isometrie lineari}$$

Fisso base $B_1$ ortonormale di $W$

applico ipotesi induttiva a $f|_{W^{\perp}}$ : $\exists$ base ortonormale $B_2$ di $W^{\perp}$ t.c. $M^{B_2}_{B_2}(f|_{W^{\perp}})$ è del tipo nell'enunciato

$\Longrightarrow$ $B_1 \cup B_2 = B$ è base ortonormale di $V$

$$M^{B}_{B}(f) = \left(\begin{array}{c|c} M^{B_1}_{B_1}(f|_{W}) & 0 \\ \hline 0 & M^{B_2}_{B_2}(f|_{W^{\perp}}) \end{array}\right)$$

## ISOMETRIE LINEARI DI $\mathbb{R}^3$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ isometria

Autovalori?

$p_f(x) \in \mathbb{R}[x]$, di grado $n = 3$

ha 3 radici complesse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$
(non nec. distinte)

Noto: se $\lambda_1$ è radice, anche $\bar{\lambda}_1$ è radice

$\Longrightarrow$ c'è almeno una radice reale $\lambda \in \mathbb{R}$

Lemma: se f è isometria lineare reale, e se $\lambda$ è autovalore reale, allora $\lambda = \pm 1$.

Dim. sia $v \neq 0_V$ autovettore relativo ad $\lambda$:

$$f(v) = \lambda v$$

$$\|f(v)\| = \|v\| \quad f \text{ isometria}$$

$$= \|\lambda v\|$$

$$= |\lambda| \cdot \underset{\neq 0}{\|v\|} = \underset{\neq 0}{\|v\|}, \quad v \neq 0_V$$

$$\Rightarrow |\lambda| = 1$$

CLASS. DELLE ISOMETRIE di $\mathbb{R}^3$:

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isom.;
allora $\exists$ $\mathcal{B}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ t.c.

se $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$, si ha:

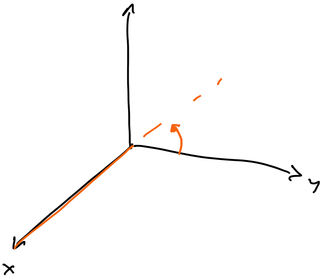
$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\quad f(v_1) = \lambda v_1$

$\lambda = \pm 1$

$\{v_2, v_3\}$ base ort. di $\operatorname{Span}(v_1)^{\perp}$:

① $\det A = 1$, $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right)$$



② $\det A = 1$, $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

③ $\det A = -1$, $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad sy_{\{z=0\}}$$

④ $\det A = -1$, $d = -1$ $\quad \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right)$

* * *

## ISOMETRIE DEGLI SPAZI AFFINI EUCLIDEI

Def: $f: E^n_\mathbb{R} \to E^n_\mathbb{R}$ affinità si dice ISOMETRIA AFFINE se la sua parte lineare $\varphi$ è un'isometria lineare.

Prop.: L'insieme $Iso(E^n_\mathbb{R})$ è un sottogruppo di $Aff(E^n_\mathbb{R})$.

Oss.: Le traslazioni $t_v : E^n_\mathbb{R} \to E^n_\mathbb{R}$

$t_v(P) = Q$ dove $\overrightarrow{PQ} = v$

$v \in \mathbb{R}^n$

La parte lineare di $t_v$ è $Id_{\mathbb{R}^n}$, che è isometria.

Prop.: $f \in Iso(E^n_\mathbb{R})$ ; $\forall P, Q \in E^n_\mathbb{R}$ si ha

$$d(P,Q) = d(f(P), f(Q))$$

Dim. $d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\varphi(\overrightarrow{PQ})\| = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| = d(f(P), f(Q))$

$\varphi$ è isom. lineare

Prop. $f \in Iso(E^n_\mathbb{R}) \Rightarrow f$ mantiene angoli tra ssA.

Dim.: Segue dal fatto $\varphi$ mantiene prodotto scalare.

Esempi di $f \in Iso(E^2_\mathbb{R})$

- traslazioni

- ROTAZIONI DI ANGOLO $\theta$ e centro $P_0 \in E^2_{\mathbb{R}}$ : $\rho_{\theta,P_0}$

Premesse: fissiamo un S RIF. CARTESIANO $(O; v_1, v_2)$

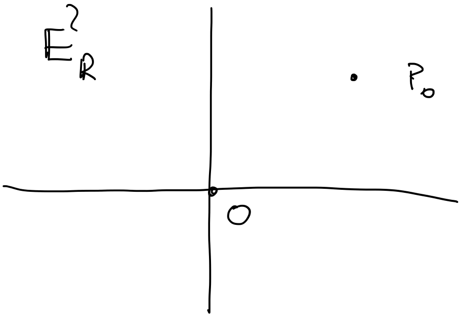
indichiamo con $R_{\theta,O}$ l'affinità

$R_{\theta,O}(O) = O$, con parte lineare rappres.

dalla matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\rho_{\theta,P_0} := t_w \circ R_{\theta,O} \circ t_{-w}$$

$w = \overrightarrow{OP_0}$



- Simmetria di asse $r \subseteq E^2_{\mathbb{R}}$ retta affine

$P_0 \in r$, $w = \overrightarrow{OP_0}$

$$\sigma_r := t_w \circ S_{\theta,O} \circ t_{-w}$$

- GLISSORIFLESSIONE risp. a $r$ e $v$

$$gl_{r,v} := t_v \circ \sigma_r$$

con $v \in W_r$ giacitura dir