

Note del Corso di GEOMETRIA 2
A.A. 2025/2026

Prof. Valentina Beorchia

Gennaio 2026

Indice

1	Spazi affini	3
1.1	Sottospazi affini e loro equazioni	6
1.1.1	Passaggio da equazioni parametriche a cartesiane	9
1.1.2	Passaggio da equazione cartesiane a parametriche	9
1.2	Intersezioni tra sottospazi affini	10
1.3	Sottospazi affini generati da punti	11
1.4	Parallelismo, incidenza e sghembità	13
1.5	Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo e incidenza tra piani	14
1.6	Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo, incidenza e sghembità tra rette nello spazio	16
1.7	Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo e incidenza tra una retta e un piano nello spazio	18
1.8	Fasci di iperpiani	19
2	Applicazioni affini e affinità	23
2.0.1	Isomorfismi affini	25
2.0.2	Gruppi di trasformazioni affini	27
2.1	Rappresentazioni numeriche di affinità	30
2.1.1	Affinità di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$	30
2.1.2	Affinità di uno spazio affine arbitrario	31
2.2	Proprietà affini	32
2.3	Sottospazi fissi e sottospazi invarianti per affinità	35
2.4	Proiezioni su sottospazi affini	36
3	Spazi affini reali	38
4	Il prodotto vettoriale	41

5	Geometria euclidea	44
5.1	Spazi vettoriali euclidei e unitari	44
5.2	Spazi affini euclidei	49
5.3	Angolo tra sottospazi euclidei	52
5.4	Distanze negli spazi affini euclidei	52
6	Isometrie	59
6.1	Isometrie e Matrici Ortogonali	59
6.2	Caratterizzazione delle matrici di $O(2, \mathbb{R})$	61
6.3	Forma normale per isometrie lineari	66
6.4	Isometrie lineari di \mathbb{R}^3	68
7	Isometrie degli spazi affini euclidei	70
7.1	Classificazione delle isometrie del piano	72
8	Geometria proiettiva	78
8.1	Motivazioni e considerazioni preliminari	78
8.2	Spazi proiettivi	81
8.3	Sottospazi proiettivi	83
8.4	Equazioni cartesiane per sottospazi proiettivi	87
8.5	Equazioni parametriche per sottospazi proiettivi	89
8.6	Fasci di iperpiani	91
8.7	Fasci proiettivizzati	94

Capitolo 1

Spazi affini

Definizione 1.0.1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} . Uno spazio affine su V è un insieme non vuoto \mathbb{A} , i cui elementi si dicono i punti di \mathbb{A} , ed una funzione

$$\sigma : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V, \quad \sigma(P, R) = \overrightarrow{PR},$$

tale che valgano i seguenti assiomi:

(SA1) per ogni $P \in \mathbb{A}$ e per ogni $v \in V$, $\exists! R \in \mathbb{A}$ tale che $v = \overrightarrow{PR}$;

(SA2) per ogni terna di punti (non necessariamente distinti) $P, Q, R \in \mathbb{A}$ si ha $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Proposizione 1.0.2. *Dai due assiomi di spazio affine si hanno le seguenti proprietà:*

1. per ogni $P \in \mathbb{A}$ si ha $\overrightarrow{PP} = 0 \in V$;
2. per ogni $P, R \in \mathbb{A}$, si ha $\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR}$;
3. per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, la funzione $f_P : \mathbb{A} \rightarrow V$, $f_P(Q) = \overrightarrow{PQ}$ è una biiezione.

Dimostrazione. (1) Dall'assioma (SA2), ponendo $P = Q = R$, si ha

$$\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP},$$

e sommando ad entrambi i membri il vettore \overrightarrow{PP} si ha la tesi.

(2) Dall'assioma (SA2), ponendo $R = P$, si ha

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$$

per il primo punto, quindi \overrightarrow{QP} è il vettore opposto di \overrightarrow{PQ} .

(3) La tesi segue direttamente dall'assioma (SA1). □

Definizione 1.0.3. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Allora definiamo la dimensione di \mathbb{A} come

$$\dim \mathbb{A} := \dim V.$$

Se $\dim \mathbb{A} = 1$, allora \mathbb{A} si dice *retta affine*; se $\dim \mathbb{A} = 2$, allora \mathbb{A} si dice *piano affine*.

Proposizione 1.0.4. Se \mathbb{A} è uno spazio affine su V , l'applicazione

$$t : \mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A} \quad \text{definita da} \quad (P, v) \mapsto Q : \overrightarrow{PQ} = v$$

verifica: $\forall P \in \mathbb{A}, \forall v, w \in V$ vale $t(t(P, v), w) = t(P, (v + w))$

Dimostrazione. Per SA1, fissati P e v , esiste un unico punto Q tale che $v = \overrightarrow{PQ}$. D'altra parte, per la stessa ragione, esiste un unico punto R tale che $w = \overrightarrow{QR}$. Pertanto

$$v + w = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

dove la seconda uguaglianza segue da (SA2). In conclusione si ha

$$t(t(P, v), w) = t(t(P, \overrightarrow{PQ}), w) = t(Q, w) = t(Q, \overrightarrow{QR}) = Rt(P, \overrightarrow{PR}) = t(P, \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = t(P, v + w).$$

come volevamo. □

Fissando il vettore v nel secondo fattore del dominio di t si ottiene una biiezione di \mathbb{A} come segue.

Definizione 1.0.5. Se \mathbb{A} è uno spazio affine su V e $v \in V$ è un vettore fissato, l'applicazione

$$t_v : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \quad \text{definita da} \quad P \mapsto t_v(P) := Q, \quad v = \overrightarrow{PQ}$$

si dice *traslazione di \mathbb{A} lungo v* .

Osservazione 1.0.6. Dato V spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{K} , possiamo definire una *struttura di spazio affine in V su se stesso*, ponendo:

$$\overrightarrow{vw} := w - v.$$

Si verifica facilmente che gli assiomi sono verificati.

Definizione 1.0.7. In particolare, se $V = \mathbb{K}^n$, una struttura di spazio affine su \mathbb{K}^n è data da:

$$\sigma : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \sigma((p_1, p_2, \dots, p_n), (q_1, q_2, \dots, q_n)) := \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ}.$$

Lo spazio affine così definito verrà indicato con il simbolo $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, e si dice *spazio affine standard*.

Vediamo ora come associare delle coordinate a un punto di uno spazio affine arbitrario. Useremo la nozione di coordinate di un vettore in una base, e per fare ciò dobbiamo fissare un punto, che chiameremo origine.

Definizione 1.0.8. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su uno spazio vettoriale V . Un *riferimento affine* per \mathbb{A} è il dato di:

- un punto $O \in \mathbb{A}$;
- una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di V .

Il punto O si dice *origine del riferimento*.

Dato un punto $P \in \mathbb{A}$ qualsiasi, possiamo definire le *coordinate di P* come le coordinate del vettore \overrightarrow{OP} nella base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, cioè se

$$\overrightarrow{OP} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n,$$

definiamo l' n -upla (a_1, a_2, \dots, a_n) come le coordinate di P .

Convenzione 1.0.9. Per distinguere le coordinate di vettori dalle coordinate di punti di spazi affini, useremo la seguente notazione:

- le coordinate di un vettore verranno indicate in colonna: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$;
- le coordinate di un punto verranno indicate in riga: (b_1, b_2, \dots, b_n) .

Esempio 1.0.10. Se \mathbb{A} è una retta affine, un riferimento affine è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ e da un vettore non nullo $v \in V$.

Se \mathbb{A} è un piano affine, un riferimento affine è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ e da due vettori non nulli e non proporzionali $v_1, v_2 \in V$.

Definizione 1.0.11. In $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ possiamo scegliere il seguente riferimento:

- il punto $O \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ di componenti nulle $O = (0, \dots, 0)$;
- la base canonica di \mathbb{K}^n :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo riferimento si dice *riferimento affine canonico* di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

1.1 Sottospazi affini e loro equazioni

Definizione 1.1.1. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su V . Fissati

- un punto $Q \in \mathbb{A}$, e
- un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$,

il *sottospazio affine passante per Q e parallelo a W* è il sottoinsieme di \mathbb{A} definito da

$$S = \{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} \in W\}.$$

Il sottospazio $W \subseteq V$ si chiama *giacitura di S* .

Dalla definizione seguono subito le seguenti proprietà:

Proposizione 1.1.2. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su V . Si ha:

1. se S è un sottospazio affine passante per Q e di giacitura W , allora $Q \in S$.
2. Per ogni coppia di punti $P_1, P_2 \in S$, si ha $\overrightarrow{P_1P_2} \in W$.
3. S ha una struttura di spazio affine su W .

Definizione 1.1.3. Sia $S \subseteq A$ un sottospazio affine di giacitura W . Definiamo

$$\dim S := \dim W.$$

Se $\dim S = \dim A - 1$, allora S si dice *iperpiano* di A .

Vediamo ora che riscrivendo la definizione di sottospazio affine in coordinate, possiamo descrivere i sottospazi affini tramite equazioni parametriche.

Osservazione 1.1.4. Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ sottospazio affine passante per un punto $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ e di giacitura $W \subseteq \mathbb{K}^n$. Sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base del sottospazio vettoriale W . Fissiamo le componenti dei vettori w_i (come elementi di \mathbb{K}^n)

$$w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad w_m = \begin{pmatrix} w_{1m} \\ w_{2m} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{pmatrix}.$$

Allora abbiamo

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S \iff \overrightarrow{QP} \in W \iff \exists t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{K} : \overrightarrow{QP} = t_1 w_1 + t_2 w_2 + \dots + t_m w_m.$$

Definizione 1.1.5. Usando le stesse notazioni di cui sopra, le equazioni

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_m w_{1m} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \dots + t_m w_{2m} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_m w_{nm} \end{cases}$$

si dicono *equazioni parametriche* di S .

Osservazione 1.1.6. Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ può essere descritto da diversi sistemi di equazioni parametriche. Più precisamente, abbiamo che un sottospazio affine è univocamente determinate dalla sua giacitura e da uno qualsiasi dei suoi punti (esercizio).

Le equazioni parametriche non sono l'unico modo di codificare un sottospazio affine. Infatti, può essere anche assegnato mediante equazioni cartesiane nel modo seguente.

Teorema 1.1.7. Sia $A \cdot x = b$ un sistema di equazioni lineari di ordine n a coefficienti nel campo \mathbb{K} . Se $A \cdot x = b$ è compatibile, allora l'insieme delle sue soluzioni

$$S = \{s \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot s = b\}$$

è un sottospazio affine di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ la cui giacitura è il sottospazio vettoriale W di \mathbb{K}^n formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato:

$$W = \{s \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot s = 0\}.$$

In tal caso $\dim(S) = n - \text{rk}(A)$, e per ogni $s \in S$, il sottoinsieme S coincide con il sottospazio affine di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ passante per s e parallelo a W .

Dimostrazione. Poiché il sistema lineare è compatibile, S non è vuoto. Sia dunque \tilde{s} una sua soluzione. Per il teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, ogni altra soluzione s si può scrivere nella forma

$$s = \tilde{s} + w, \quad w \in W.$$

Quindi si ha

$$s \in S \iff s - \tilde{s} \in W.$$

Per definizione, S risulta il sottospazio affine di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ passante per \tilde{s} di giacitura W . Infine, per il Teorema di Dimensione, $\dim W = n - \text{rk}(A) = \dim S$. \square

Definizione 1.1.8. Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un sottospazio affine. Un sistema di equazioni cartesiane per S è un qualunque sistema di equazioni lineari $Ax = b$, tale che

$$S = \{s \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid A \cdot s = b\}.$$

Osservazione 1.1.9. (1) Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ può essere descritto da diversi sistemi di equazioni cartesiane.

Infatti, se $S = \{s \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid A \cdot s = b\}$, allora per ogni sistema di equazioni lineari $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ equivalente ad $A \cdot x = b$, le equazioni di $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ sono delle equazioni cartesiane per S .

(2) Sia $A \cdot x = b$ un sistema di equazioni cartesiane per il sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Allora il punto $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ appartiene a S se e solo se $b = 0$, cioè se e solo se il sistema di equazioni lineari è omogeneo.

1.1.1 Passaggio da equazioni parametriche a cartesiane

Vediamo ora che in realtà tutti i sottospazi affini ammettono delle equazioni cartesiane, e che esse possono essere ottenute dalle equazioni parametriche.

Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un sottospazio affine dato dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \cdots + t_m w_{1m} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \cdots + t_m w_{2m} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \cdots + t_m w_{nm} \end{cases}$$

Ricordiamo che un punto $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ appartiene a S se e solo se il vettore

$$\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \in \text{Span} \left(\begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} w_{1m} \\ w_{2m} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{pmatrix} \right),$$

e ciò succede se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1m} & x_1 - q_1 \\ w_{21} & \cdots & w_{2m} & x_2 - q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nm} & x_n - q_n \end{pmatrix}$$

ha rango m . Mettendo la matrice a scala, la condizione si traduce nell'annullamento delle ultime $n - m$ entrate dell'ultima colonna.

1.1.2 Passaggio da equazione cartesiane a parametriche

Vediamo ora come passare da equazioni cartesiane ad equazioni parametriche.

Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un sottospazio affine dato dalle equazioni cartesiane $A \cdot x = b$.

Per trovare delle equazioni parametriche per S , si risolve il sistema di equazioni lineari $A \cdot x = b$, esprimendo le sue soluzioni in funzione di opportune variabili libere t_1, \dots, t_m , che equivale a trovare una soluzione particolare Q di $Ax = b$, ed una base w_1, \dots, w_m dello spazio W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $A \cdot x = 0$, in modo che

$$S = Q + W = Q + t_1 w_1 + \cdots + t_m w_m,$$

al variare di $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K}$.

1.2 Intersezioni tra sottospazi affini

In questa sezione vedremo che data una famiglia arbitraria di sottospazi affini di un dato spazio affine \mathbb{A} , se la loro intersezione è non vuota, allora essa risulta un sottospazio affine, con giacitura data dalle intersezioni delle giaciture della famiglia.

La situazione è, quindi, analoga all'intersezione di una famiglia di sottospazi vettoriali, con la differenza che sottospazi vettoriali si intersecano sempre almeno nel vettore nullo.

Proposizione 1.2.1. *Sia $\{S_i\}_{i \in I}$ una famiglia arbitraria di sottospazi affini di \mathbb{A} , dove I è un insieme arbitrario di indici, e siano $\{W_i\}_{i \in I}$ le relative giaciture.*

Allora per $\bigcap_{i \in I} S_i$ si hanno due casi:

1. $\bigcap_{i \in I} S_i = \emptyset$, oppure
2. $\bigcap_{i \in I} S_i = S \neq \emptyset$, con $S \subset \mathbb{A}$ sottospazio affine di giacitura $W = \bigcap_{i \in I} W_i$.

Dimostrazione. Se $\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$, sia $Q \in \bigcap_{i \in I} S_i$; allora il sottospazio affine S passante per Q e con giacitura $W = \bigcap_{i \in I} W_i$ verifica per costruzione

$$S \subseteq \bigcap_{i \in I} S_i.$$

Per l'inclusione opposta, sia $P \in \bigcap_{i \in I} S_i$, $P \neq Q$; allora il vettore $\overrightarrow{QP} \in W_i$ per ogni $i \in I$, quindi $\overrightarrow{QP} \in W$ e $\bigcap_{i \in I} S_i \subseteq S$. □

Come conseguenza abbiamo la cosiddetta Formula di Grassmann affine:

Corollario 1.2.2 (Formula di Grassmann per sottospazi affini). *Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{A}$ due sottospazi affini di uno spazio affine \mathbb{A} di dimensione finita $\dim \mathbb{A} = n$.*

Se $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, allora

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - n, \quad (1.2.1)$$

dove $L(S_1, S_2)$ indica il più piccolo sottospazio affine contenente $S_1 \cup S_2$.

Vediamo ora un criterio che ci permette di dire quando due sottospazi affini si intersecano.

Proposizione 1.2.3. *Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{A}$ due sottospazi affini con giaciture $W_1, W_2 \subset V$. Allora si ha*

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \iff \forall Q_1 \in S_1, \forall Q_2 \in S_2, \text{ si ha } \overrightarrow{Q_1 Q_2} \in W_1 + W_2.$$

Dimostrazione. Supponiamo $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, e sia $P \in S_1 \cap S_2$. Scelti $Q_1 \in S_1$ e $Q_2 \in S_2$ arbitrari, si ha

$$\overrightarrow{Q_1 Q_2} = \overrightarrow{Q_1 P} + \overrightarrow{P Q_2} = w_1 + w_2,$$

con $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$.

Viceversa, se per ogni coppia di punti $Q_1 \in S_1$ e $Q_2 \in S_2$ si ha $\overrightarrow{Q_1 Q_2} \in W_1 + W_2$, allora esistono due vettori $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ tali che

$$\overrightarrow{Q_1 Q_2} = w_1 + w_2.$$

Per il primo assioma SA1 di spazio affine, esiste un unico $P \in \mathbb{A}$ tale che

$$\overrightarrow{Q_1 P} = w_1;$$

siccome $w_1 \in W_1$, che è la giacitura di S_1 , si ha $P \in S_1$. Inoltre, possiamo scrivere

$$w_1 + w_2 = \overrightarrow{Q_1 Q_2} = \overrightarrow{Q_1 P} + \overrightarrow{P Q_2} = w_1 + \overrightarrow{P Q_2},$$

da cui troviamo che $w_2 = \overrightarrow{P Q_2}$ e quindi si ha anche $P \in S_2$. □

1.3 Sottospazi affini generati da punti

Sia \mathbb{A} uno spazio affine su uno spazio vettoriale V . e siano $T_0, \dots, T_m \in \mathbb{A}$ dei punti distinti.

Definizione 1.3.1. Indichiamo con

$$L(T_0, \dots, T_m) \subseteq \mathbb{A}$$

il più piccolo sottospazio affine contenente i punti T_0, \dots, T_m , e viene detto *sottospazio affine generato da T_0, \dots, T_m* .

Il sottospazio $L(T_0, \dots, T_m)$ si può ottenere come intersezione di tutti i sottospazi affini contenenti $\{T_0, \dots, T_m\}$.

Proposizione 1.3.2. Dati $T_0, \dots, T_m \in \mathbb{A}$, il sottospazio affine $L(T_0, \dots, T_m)$ è determinato da T_0 e dalla giacitura

$$W = \text{Span}(\overrightarrow{T_0 T_1}, \overrightarrow{T_0 T_2}, \dots, \overrightarrow{T_0 T_m}).$$

In particolare si ha

$$\dim L(T_0, \dots, T_m) = \dim W \leq m.$$

Dimostrazione. Per definizione di sottospazio affine, i vettori $\overrightarrow{T_0T_i}$ devono appartenere alla giacitura di $L(T_0, \dots, T_m)$, quindi la giacitura di ogni sottospazio affine che lo contiene contiene W . \square

Osservazione 1.3.3. Per determinare $L(T_0, \dots, T_m)$ possiamo fissare un punto qualsiasi T_i invece di T_0 , e allora la giacitura sarà data da

$$W = \text{Span}(\overrightarrow{T_iT_1}, \overrightarrow{T_iT_2}, \dots, \overrightarrow{T_iT_m}).$$

Definizione 1.3.4. Se $\dim L(T_0, \dots, T_m) = 1$, allora i punti T_0, \dots, T_m si dicono *allineati*.

Definizione 1.3.5. Quando $\dim L(T_0, \dots, T_m) = m$, cioè la massima possibile, allora i punti si dicono *affinemente indipendenti*.

Osservazione 1.3.6. Se T_0, T_1 sono due punti distinti, allora $\dim L(T_0, T_1) = 1$, cioè per due punti in uno spazio \mathbb{A} qualsiasi passa sempre una retta. Abbiamo ritrovato così il primo postulato della Geometria Euclidea.

Possiamo anche affermare che tale retta è unica, in quanto abbiamo visto nelle sezioni precedenti che due rette distinte si intersecano al più in un punto.

Osservazione 1.3.7. Per tre punti non allineati T_0, T_1, T_2 passa un unico piano affine.

Infatti, in questo caso i vettori $\overrightarrow{T_0T_1}$ e $\overrightarrow{T_0T_2}$ risultano non proporzionali, quindi linearmente indipendenti, e $\dim L(T_0, T_1, T_2) = 2$.

Terminiamo con il seguente.

Proposizione 1.3.8. *Dati un sottospazio affine $S \subset \mathbb{A}$ e un punto $P \in \mathbb{A}$, esiste un unico sottospazio affine $S' \subset \mathbb{A}$ tale che*

$$P \in S', \text{ uad } \dim S = \dim S', \text{ uad } S' \parallel S.$$

Dimostrazione. L'enunciato segue dal fatto che S' è determinato da P e dal fatto di avere la stessa giacitura W_S di S . \square

Osservazione 1.3.9. Se $\dim S = 1$, l'enunciato appena visto si traduce nel quinto postulato di Euclide, sull'esistenza di un'unica retta parallela a una retta data e passante per un punto assegnato.

1.4 Parallelismo, incidenza e sghembità

Definizione 1.4.1. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su uno spazio vettoriale V , e siano $S_1 \subseteq \mathbb{A}$, $S_2 \subseteq \mathbb{A}$ due sottospazi affini di giaciture W_1 e W_2 rispettivamente.

- S_1 e S_2 si dicono *paralleli*, in simboli

$$S_1 \parallel S_2,$$

se

$$W_1 \subseteq W_2 \text{ oppure } W_2 \subseteq W_1;$$

- S_1 e S_2 si dicono *incidenti* se

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset;$$

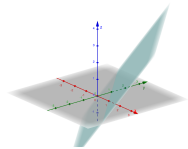
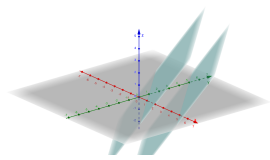
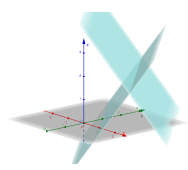
- S_1 e S_2 si dicono *sghembi* se non sono nè paralleli nè incidenti.

1.5 Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo e incidenza tra piani

Consideriamo due piani π, π' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni cartesiane:

$$\pi : ax + by + cz = d, \quad \pi' : a'x + b'y + c'z = d'.$$

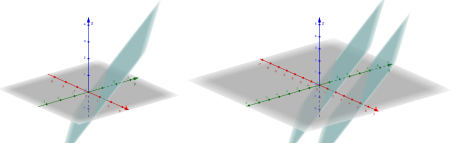
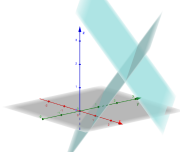
Allora si ha:

$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$	$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$	posizione	
1	1	$\pi \parallel \pi', \pi = \pi'$	
1	2	$\pi \parallel \pi', \pi \cap \pi' = \emptyset$	
2	2	$\pi \not\parallel \pi', \dim \pi \cap \pi' = 1$	

Consideriamo due piani π, π' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni parametriche:

$$\pi : \begin{cases} x = Q_1 + l_1 t_1 + l_2 t_2 \\ y = Q_2 + m_1 t_1 + m_2 t_2 \\ z = Q_3 + n_1 t_1 + n_2 t_2 \end{cases} \quad \pi' : \begin{cases} x = T_1 + o_1 s_1 + o_2 s_2 \\ y = T_2 + u_1 s_1 + u_2 s_2 \\ z = T_3 + w_1 s_1 + w_2 s_2 \end{cases}$$

Allora si ha:

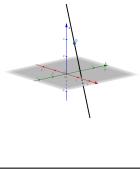
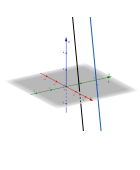
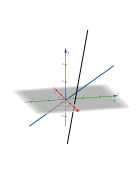
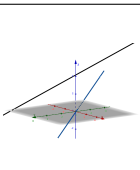
rk $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & o_1 & o_2 \\ m_1 & m_2 & u_1 & u_2 \\ n_1 & n_2 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$	posizione	
2	$\pi \parallel \pi', \pi = \pi'$ oppure $\pi \cap \pi' = \emptyset$	
3	$\pi \not\parallel \pi', \dim \pi \cap \pi' = 1$	

1.6 Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo, incidenza e sghembità tra rette nello spazio

Consideriamo due rette r, r' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} ex + fy + gz = h \\ e'x + f'y + g'z = h' \end{cases}.$$

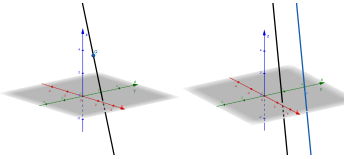
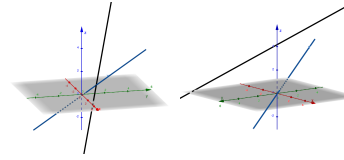
Allora si ha:

$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix}$	$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix}$	posizione	
2	2	$r \parallel s, r = s$	
2	3	$r \parallel s, r \cap s = \emptyset$	
3	3	$r \nparallel s, r \cap s = \{R\}$	
3	4	$r \nparallel s, r \cap s = \emptyset$	

Consideriamo due rette r, r' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = Q_1 + lt \\ y = Q_2 + mt \\ z = Q_3 + nt \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = T_1 + os \\ y = T_2 + us \\ z = T_3 + ws \end{cases}$$

Allora si ha:

rk $\begin{pmatrix} l & o \\ m & u \\ n & w \end{pmatrix}$	posizione	
1	$r \parallel r', r = r'$ oppure $r \cap r' = \emptyset$	
2	$r \nparallel r', r \cap r' = \{R\}$ un punto oppure $r \cap r' = \emptyset$	

1.7 Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo e incidenza tra una retta e un piano nello spazio

Consideriamo una retta r e un piano π nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}, \quad \pi : ex + fy + gz = h.$$

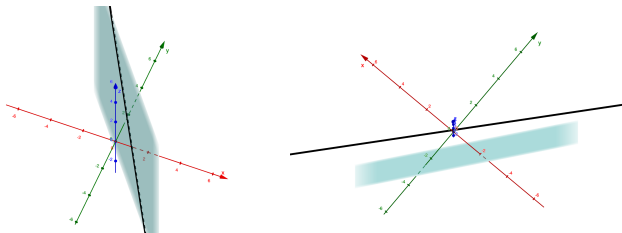
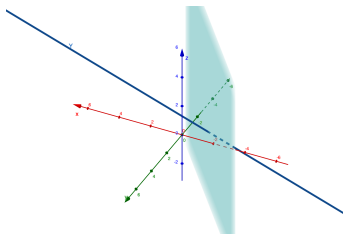
Allora si ha:

$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \end{pmatrix}$	$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$	posizione	
2	2	$r \parallel \pi, r \subseteq \pi$	
2	3	$r \parallel \pi, r \cap \pi = \emptyset$	
3	3	$r \nparallel \pi, r \cap \pi = \{R\}$	

Consideriamo una retta r e un piano π nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = Q_1 + lt \\ y = Q_2 + mt \\ z = Q_3 + nt \end{cases} \quad \pi : \begin{cases} x = T_1 + o_1s_1 + o_2s_2 \\ y = T_2 + u_1s_1 + u_2s_2 \\ z = T_3 + w_1s_1 + w_2s_2 \end{cases}$$

Allora si ha:

rk $\begin{pmatrix} l & o_1 & o_2 \\ m & u_1 & u_2 \\ n & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$	posizione	
2	$r \parallel \pi, r \subseteq \pi$ oppure $r \cap \pi = \emptyset$	
3	$r \not\parallel \pi, r \cap \pi = \{R\}$ un punto	

1.8 Fasci di iperpiani

Sia \mathbb{A} uno spazio affine su un \mathbb{K} -spazio vettoriale V , di dimensione finita n .

Ricordiamo che un iperpiano affine H in \mathbb{A} è, per definizione, un sottospazio affine di dimensione $\dim H = \dim \mathbb{A} - 1$.

Definizione 1.8.1. Siano $H, H' \subset \mathbb{A}$ due iperpiani affini, distinti, di equazioni cartesiane

$$H : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \text{ uad}H' : c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d = 0.$$

Si dice *fascio di iperpiani generato da H e H'* la famiglia Λ di iperpiani di \mathbb{A} il cui generico iperiano ha equazione cartesiana

$$\Lambda : uad\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + \mu(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0,$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sono due parametri liberi.

Osservazione 1.8.2. Siccome un'equazione cartesiana di un iperpiano è definita a meno di un fattore di proporzionalità, possiamo considerare due sottofamiglie di Λ , dipendenti da un unico parametro $t \in \mathbb{K}$, così definite:

- se $\lambda \neq 0$, il generico piano ha anche equazione

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + \frac{\lambda}{\mu}(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0.$$

Ponendo $t := \frac{\lambda}{\mu}$, il generico piano ha equazione $(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + t(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0$. Osserviamo che in questa famiglia manca un unico piano di Λ , quello relativo a $\lambda = 0$, che corrisponde al piano H' .

- se $\mu \neq 0$, il generico piano ha anche equazione

$$\frac{\mu}{\lambda}(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + (c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0.$$

Ponendo $t := \frac{\mu}{\lambda}$, il generico piano ha equazione $t(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + (c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0$. Osserviamo che in questa famiglia manca un unico piano di Λ , quello relativo a $\mu = 0$, che corrisponde al piano H .

Vediamo ora come si intersecano gli iperpiani appartenenti a un fascio.

Proposizione 1.8.3. *Siano $H, H' \subset \mathbb{A}$ due iperpiani distinti. Allora si hanno due casi:*

1. $H \parallel H'$; in questo caso $H \cap H' = \emptyset$;
2. $\dim H \cap H' = \dim \mathbb{A} - 2 = n - 2$.

Dimostrazione. Se $H \parallel H'$ sappiamo dalla teoria generale che i due iperpiani non si intersecano.

Supponiamo quindi $H \not\parallel H'$ e siano

$$H : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0, uadH' : c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d = 0.$$

delle loro equazioni cartesiane. Per la condizione di non parallelismo, le loro giaciture sono diverse, quindi il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0 \end{cases}$$

ha la matrice dei coefficienti A di rango 2. Ciò implica che anche la matrice completa associata al sistema lineare

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d = 0 \end{cases}$$

ha rango 2, e per il Teorema di Rouché - Capelli, l'insieme delle soluzioni corrisponde a un sottospazio affine di dimensione $n - \text{rg}A = n - 2$. \square

Proposizione 1.8.4. *Siano $H, H' \subset \mathbb{A}$ due iperpiani distinti, sia $\dim \mathbb{A} = n$, e sia Λ il fascio di iperpiani generato da H e H' . Allora si ha:*

1. se $H \parallel H'$, ogni iperpiano $M \in \Lambda$ soddisfa

$$M \parallel H.$$

Un tale fascio si chiama fascio improprio.

Inoltre, se un iperpiano $L \parallel H$, allora $L \in \Lambda$.

2. Se $S = H \cap H'$ con $\dim S = n - 2$, allora per ogni $M \in \Lambda$ si ha

$$M \supset S.$$

Un tale fascio si chiama fascio proprio.

Inoltre, ogni iperpiano $L \supset S$ verifica $L \in \Lambda$.

Dimostrazione. 1. Se $\parallel H'$, possiamo scrivere le equazioni cartesiane dei due iperpiani nella forma

$$H : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \text{ uad}H' : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + d = 0, \quad b \neq d.$$

Il generico iperpiano di Λ ha dunque equazione

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b) + \mu(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + d) = 0,$$

quindi

$$(\lambda + \mu)(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) + \lambda b + \mu d = 0,$$

e vediamo che la parte omogenea dell'equazione è proporzionale alla parte omogenea dell'equazione di H , pertanto hanno la stessa giacitura.

Infine, se L è un iperpiano parallelo ad H , possiamo scrivere una sua equazione cartesiana nella forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + k = 0,$$

per un opportuno $k \in \mathbb{K}$. Se poniamo (λ, μ) la coppia che soddisfa

$$\lambda + \mu = 1, \lambda b + \mu d = k,$$

vediamo che L appartiene a Λ .

2. È chiaro che tutti i punti le cui coordinate sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d = 0 \end{cases}$$

annullano anche l'equazione del generico iperpiano del fascio.

Infine, se $L \supset S$ è un iperpiano arbitrario contenente S , fissiamo un punto $Q \in L \setminus S$, e fissiamo $n - 1$ punti affinementemente indipendenti di S :

$$Q_1, \cdots, Q_{n-1}.$$

Osserviamo che per costruzione

$$Q, Q_1, \cdots, Q_{n-1}$$

sono ora n punti affinementemente indipendenti.

Consideriamo il generico iperpiano di Λ e imponiamo il passaggio per $Q(q_1, \cdots, q_n)$; otteniamo la relazione

$$\lambda(a_1q_1 + a_2q_2 + \cdots + a_nq_n + b) + \mu(c_1q_1 + c_2q_2 + \cdots + c_nq_n + d) = 0.$$

Siccome $Q \notin H \cap H'$, le sue coordinate non annullano entrambe le loro equazioni; l'iperpiano del fascio passante per Q è ottenuto quindi in corrispondenza della coppia

$$(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = (-(c_1q_1 + c_2q_2 + \cdots + c_nq_n + d), (a_1q_1 + a_2q_2 + \cdots + a_nq_n + b)),$$

o di una qualunque coppia proporzionale a questa. Tale iperpiano contiene gli n punti affinementemente indipendenti Q, Q_1, \cdots, Q_{n-1} , è quindi univocamente determinato e coincide con L .

□

Capitolo 2

Applicazioni affini e affinità

Avendo introdotto la struttura geometrica di spazio affine, consideriamo ora le applicazioni tra spazi affini che conservano la struttura, ovvero che mandano sottospazi affini in sottospazi affini (non necessariamente della stessa dimensione). Queste mappe verranno chiamate applicazioni (o trasformazioni) affini.

Definizione 2.0.1. Siano V e V' due \mathbb{K} -spazi vettoriali e siano \mathbb{A} e \mathbb{A}' due spazi affini, rispettivamente su V e V' .

Diciamo che una applicazione

$$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$$

è una *applicazione affine* se esiste un'applicazione \mathbb{K} -lineare

$$\varphi : V \rightarrow V',$$

detta *parte lineare* di f , tale che, per ogni $P, Q \in \mathbb{A}$, vale

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}).$$

In particolare, se f è biettiva, anche φ è biettiva, quindi è un isomorfismo di spazi vettoriali, e diremo che f è un' *affinità* o un *isomorfismo affine*. In tal caso, \mathbb{A} e \mathbb{A}' si dicono *isomorfi* e scriveremo

$$\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'.$$

Osservazione 2.0.2. Dalle definizione è chiaro che data una trasformazione affine f , la parte lineare φ è univocamente determinata.

Osservazione 2.0.3. Lo spazio affine standard $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ si può immergere come sottospazio affine in $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^m$ per ogni $m > n$, ad esempio mediante l'applicazione affine iniettiva

$$j : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$$

definita da

$$j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Nel caso particolare $n = 1$ e $m = 2$, si ottiene l'inclusione della retta affine \mathbb{A}^1 nel piano $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ mediante $x \mapsto (x, 0) \forall x \in \mathbb{A}^1$, cioè si ottiene la retta rappresentata dall'asse x .

Osservazione 2.0.4. Un sistema di equazioni parametriche per un sottospazio affine $S \subset \mathbb{A}^n$ di dimensione k determina un'applicazione affine iniettiva (*immersione affine*)

$$f : \mathbb{A}^k \rightarrow \mathbb{A}^n,$$

con $f(\mathbb{A}^k) = S$.

Infatti, se S ha equazioni

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_k w_{1k} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \dots + t_k w_{2k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

l'applicazione

$$f(t_1, \dots, t_k) = (q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_k w_{1k}, \dots, q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_k w_{nk})$$

ha come parte lineare l'applicazione data dalla moltiplicazione per la matrice

$$A = (w_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k}.$$

Notazione 2.0.5. Indicheremo con $\mathcal{L}(V, V')$, oppure con $\text{Hom}(V, V')$, lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari tra due spazi vettoriali V e V' .

Lemma 2.0.6. Fissati due punti arbitrari $O \in \mathbb{A}$ e $O' \in \mathbb{A}'$, per ogni $\varphi \in \mathcal{L}(V, V')$ esiste un'unica trasformazione affine

$$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$$

tale che $f(O) = O'$ e con parte lineare φ .

Dimostrazione. Per ogni $P \in \mathbb{A}$, consideriamo il vettore $\varphi(\overrightarrow{OP}) \in V'$, e poniamo $f(P) \in \mathbb{A}'$ uguale all'unico punto tale che

$$\varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O'f(P)}.$$

In particolare, abbiamo che

$$\varphi(\overrightarrow{OO}) = \varphi(0) = 0 = \overrightarrow{O'f(O)},$$

quindi $f(O) = O'$.

L'applicazione f risulta una trasformazione affine per costruzione, ed è unica. Infatti, se $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ è un'altra trasformazione affine tale che

$$g(O) = O',$$

con parte lineare φ , si ha per ogni $P \in \mathbb{A}$

$$\overrightarrow{O'g(P)} = \overrightarrow{g(O)g(P)} = \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O'f(P)},$$

e per l'assioma (SA1) si ha

$$g(P) = f(P).$$

□

2.0.1 Isomorfismi affini

Analizziamo ora nel dettaglio l'insieme degli isomorfismi affini.

Proposizione 2.0.7. *Se $\mathbb{A}, \mathbb{A}', \mathbb{A}''$ sono spazi affini, allora valgono:*

- i) l'applicazione identica $id_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ (la cui parte lineare è $\varphi = id_V$) è un isomorfismo affine;*
- ii) se $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ è un isomorfismo allora anche $f^{-1} : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}$ è un isomorfismo;*
- iii) se $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ e $g : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}''$ sono applicazioni affini, allora anche l'applicazione $g \circ f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}''$ è affine, la cui parte lineare è composizione delle due parti lineari.*

In particolare, la composizione di isomorfismi affini è anch'essa un isomorfismo.

Dimostrazione. Il punto *i)* è immediato.

ii) Sia $\varphi : V \rightarrow V'$ la parte lineare di f . Affermiamo che φ^{-1} è la parte lineare di f^{-1} , cioè che per ogni coppia $P', Q' \in \mathbb{A}'$, vale

$$\overrightarrow{f^{-1}(P')f^{-1}(Q')} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{P'Q'}).$$

Consideriamo i punti $f^{-1}(Q'), f^{-1}(P') \in \mathbb{A}$. Essendo f una applicazione affine si ha

$$\overrightarrow{\varphi(f^{-1}(P')f^{-1}(Q'))} = \overrightarrow{f(f^{-1}(P')) f(f^{-1}(Q'))} = \overrightarrow{P'Q'}$$

Applicando φ^{-1} ad ambo i membri, si ottiene la tesi.

iii): Bisogna provare che, comunque scelte applicazioni affini f, g , poste φ e ψ le rispettive parti lineari, allora la parte lineare di $f \circ g$ è $\varphi \circ \psi$.

Per la Definizione, questo equivale a provare che, per ogni $P, Q \in \mathbb{A}$ si verifica

$$\overrightarrow{(f \circ g)(P) (f \circ g)(Q)} = (\varphi \circ \psi)(\overrightarrow{PQ}).$$

Poiché f ha come parte lineare φ e g ha come parte lineare ψ , si ottengono le uguaglianze

$$\overrightarrow{f(g(P)) f(g(Q))} = \varphi(\overrightarrow{g(P) g(Q)}) = \varphi(\psi(\overrightarrow{PQ})),$$

come si voleva. □

Esempio 2.0.8. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su V e sia $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_n)$ una base di V . Scelto $O \in \mathbb{A}$, si consideri il riferimento affine $\Sigma = (O; v_1, \dots, v_n)$.

Consideriamo l'applicazione

$$f_{\mathcal{B}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_K^n \quad \text{data da} \quad P(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n),$$

che ad ogni punto associa la n -upla delle coordinate rispetto a Σ , è un isomorfismo affine con parte lineare

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Infatti, dati P di coordinate (x_1, \dots, x_n) e Q di coordinate (y_1, \dots, y_n) in \mathbb{A} , per definizione si ha che

$$\overrightarrow{OP} = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OQ} = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n.$$

Inoltre vale

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (y_1 - x_1)v_1 + \dots + (y_n - x_n)v_n.$$

Pertanto, $\varphi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PQ}) = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) \in \mathbb{K}^n$.

D'altro canto, $f(P) = (x_1, \dots, x_n)$ e $f(Q) = (y_1, \dots, y_n)$, e

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{Of(Q)} - \overrightarrow{Of(P)} = (y_1, \dots, y_n) - (x_1, \dots, x_n) = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) = \varphi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PQ})$$

e questo significa che $f_{\mathcal{B}}$ è una applicazione affine e $\varphi_{\mathcal{B}}$ è la sua parte lineare.

Infine, si verifica facilmente che $\varphi_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo.

Osservazione 2.0.9. Dall'esempio precedente segue che ogni spazio affine di dimensione n su \mathbb{K} è isomorfo (non canonicamente, l'isomorfismo dipende dalla scelta di una base) ad $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

Definizione 2.0.10. Un isomorfismo affine di uno spazio affine \mathbb{A} in sé si dice *affinità* di \mathbb{A} . In questo caso la parte lineare di f è un automorfismo φ di V , cioè $\varphi \in GL(V)$.

2.0.2 Gruppi di trasformazioni affini

Dalla Proposizione 2.0.7 segue facilmente il seguente fatto.

Proposizione 2.0.11. Sia \mathbb{A} uno spazio affine. Allora l'insieme

$$\text{Aff}(\mathbb{A}) := \{\text{affinità di } \mathbb{A}\}$$

è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.

Osservazione 2.0.12. È facile verificare che $\text{Aff}(\mathbb{A})$ non è un gruppo abeliano. Questo segue, ad esempio, dalla non abelità del gruppo $GL(V)$

Definizione 2.0.13. I sottogruppi di $\text{Aff}(\mathbb{A})$ si dicono *gruppi di trasformazioni affini*.

Vediamo ora alcuni gruppi di trasformazioni affini e come un'affinità qualunque si può fattorizzare come composizione di due affinità più semplici.

Cominciamo con il caratterizzare le traslazioni.

Teorema 2.0.14. Se \mathbb{A} è uno spazio affine su V allora le traslazioni di \mathbb{A} sono tutte e sole le affinità aventi come parte lineare id_V .

Dimostrazione. Si consideri la traslazione t_v lungo v , dove $v \in V$:

$$t_v : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \quad P \mapsto t_v(P) = Q : \overrightarrow{PQ} = v.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \overrightarrow{t_v(P)t_v(P')} &= \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = \\ &= -v + \overrightarrow{PP'} + v = \overrightarrow{PP'}. \end{aligned}$$

Pertanto t_v è una applicazione affine di parte lineare $\varphi = id_V$. Abbiamo visto in precedenza che t_v è biunivoca e quindi, essendo φ un isomorfismo di spazi vettoriali, è un isomorfismo affine. Quindi t_v è un'affinità.

Viceversa, se $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ è un'affinità e la sua parte lineare è id_V , allora per definizione, comunque scelti $P, Q \in \mathbb{A}$:

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{PQ}.$$

Pertanto, posto

$$v := \overrightarrow{Pf(P)}$$

si ha per ogni $Q \in \mathbb{A}$

$$\overrightarrow{Qf(Q)} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{Pf(P)} + \overrightarrow{f(P)f(Q)} = -\overrightarrow{PQ} + v + \overrightarrow{PQ} = v.$$

□

Osservazione 2.0.15. Abbiamo visto che l'insieme di tutte le traslazioni di uno spazio affine \mathbb{A} è un gruppo rispetto alla composizione; risulta quindi anche un sottogruppo di $\text{Aff}(\mathbb{A})$ e dunque un gruppo di trasformazioni affini, detto *sottogruppo delle traslazioni* e denotato con $T(\mathbb{A})$.

Osservazione 2.0.16. Se si fissa un punto $O \in \mathbb{A}$, si verifica facilmente che l'insieme delle affinità che lo fissano

$$\text{Aff}_O(\mathbb{A}) := \{f \in \text{Aff}(\mathbb{A}) \mid f(O) = O\}$$

è un sottogruppo di $\text{Aff}(\mathbb{A})$ e dunque è un altro gruppo di trasformazioni affini.

Dalla Proposizione 2.0.7 possiamo dedurre il seguente risultato.

Lemma 2.0.17. *L'applicazione*

$$\Phi_O : \text{Aff}_O(\mathbb{A}) \rightarrow GL(V) \tag{2.0.1}$$

che associa ad ogni affinità la sua parte lineare è un isomorfismo di gruppi, in cui le operazioni sono la composizione di applicazioni.

Più in generale, possiamo definire l'analoga applicazione riguardo ad una qualunque affinità; in altri termini, estendiamo Φ_O a tutto $\text{Aff}(\mathbb{A})$.

Teorema 2.0.18. *Sia \mathbb{A} uno spazio affine sullo spazio vettoriale V . Allora l'applicazione*

$$\Phi : \text{Aff}(\mathbb{A}) \rightarrow GL(V)$$

che associa ad ogni affinità la sua parte lineare è un omomorfismo di gruppi.

Inoltre $\ker(\Phi) = T(\mathbb{A})$, che è dunque un sottogruppo normale di $\text{Aff}(\mathbb{A})$.

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato segue direttamente dalla Proposizione 2.0.7.

Inoltre $\ker(\Phi)$ è costituito da tutte e sole le affinità con parte lineare identica e tale insieme è esattamente $T(\mathbb{A})$ per il Teorema 2.0.14. \square

Un'altra classe importante di affinità sono le *similitudini*, che risultano associate a applicazioni lineari date da *omotetie* e che richiamiamo brevemente.

Definizione 2.0.19. Se V è un \mathbb{K} -spazio vettoriale e $c \in \mathbb{K}$, si dice *omotetia di rapporto c* l'applicazione lineare

$$\omega_c : V \rightarrow V \quad \omega_c(v) = cv, \quad \forall v \in V.$$

L'applicazione ω_c è un isomorfismo di \mathbb{K} -spazi vettoriali se e solo se $c \neq 0$, altrimenti è l'omomorfismo nullo, e la sua matrice associata in una base qualunque \mathcal{B} è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\omega_c) = c\mathbb{I}_n,$$

dove $n = \dim(V)$.

La nozione di omotetia può essere riletta nell'ambito della Geometria Affine attraverso l'isomorfismo Φ_O di (2.0.1) come segue.

Definizione 2.0.20. Con le notazioni precedenti, se $c \in \mathbb{K}^*$ e $O \in \mathbb{A}$, diciamo *omotetia di rapporto c e centro O* l'affinità

$$\omega_{c,O} := \Phi_O^{-1}(\omega_c)$$

cioè

$$\omega_{c,O} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} \quad \text{dove} \quad \overrightarrow{O \omega_{c,O}(P)} = c \overrightarrow{OP}.$$

In particolare, se $c = -1$, l'affinità $\omega_{-1,O}$ si dice *simmetria di centro O* e si denota anche con σ_O .

Vediamo ora un risultato fondamentale sulle affinità, che ci permette di fattorizzare ogni affinità come composizione di una traslazione e di una affinità con un punto fisso. Più precisamente:

Teorema 2.0.21 (Fattorizzazione di un'affinità). *Sia \mathbb{A} uno spazio affine sullo spazio vettoriale V e sia $O \in \mathbb{A}$ un punto fissato. Allora per ogni $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$*

i) esistono e sono unici $v \in V$ e $g \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$ tali che $f = g \circ t_v$;

ii) esistono e sono unici $w \in V$ e $h \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$ tali che $f = t_w \circ h$.

Dimostrazione. i) Definiamo il vettore

$$v := \overrightarrow{f^{-1}(O)O}$$

e consideriamo la corrispondente traslazione t_v . Questa è biunivoca e ha per inversa $t_v^{-1} = t_{-v}$. Poiché $\text{Aff}(\mathbb{A})$ è un gruppo, la composizione di affinità è ancora un'affinità; pertanto definiamo l'affinità

$$g := f \circ t_v^{-1}.$$

Resta solo da provare che $g \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$, cioè che $g(O) = O$. Dalla definizione

$$g(O) = f(t_v^{-1}(O)) = f(t_{-v}(O)) = f(f^{-1}(O)) = O.$$

Segue che $f = g \circ t_v$.

ii) Definiamo il vettore $w := \overrightarrow{Of(O)}$ e consideriamo la corrispondente traslazione t_w . Come prima, possiamo definire l'affinità

$$h := t_w^{-1} \circ f.$$

Resta solo da provare che $h \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$, cioè che $h(O) = O$. Dalla definizione

$$h(O) = t_w^{-1}(f(O)) = t_w^{-1}(t_w(O)) = O,$$

come volevamo. □

2.1 Rappresentazioni numeriche di affinità

Vogliamo ora determinare una rappresentazione di un'affinità in termini delle coordinate di un generico punto.

2.1.1 Affinità di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$

Per semplicità incominciamo con lo spazio affine standard $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

Sia $f : \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un'affinità con parte lineare φ . Sia

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

la matrice associata a φ nella base canonica \mathcal{E} , sia $O = (0, \dots, 0)$ e poniamo

$$C := f(O).$$

Dato $P \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ arbitrario, per definizione di affinità si ha

$$\overrightarrow{Cf(P)} = \overrightarrow{f(O)f(P)} = f(P) - f(O) = \varphi(P - O) = A \cdot (P - O) = A \cdot {}^tP.$$

Possiamo quindi scrivere

$${}^t f(P) = {}^t C + A \cdot {}^t P. \quad (2.1.1)$$

Viceversa, per ogni $A \in GL_n(\mathbb{K})$ e per ogni $C \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, l'applicazione

$$f_{A,C} : \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n, \quad f_{A,C}(P) = {}^t C + A \cdot {}^t P$$

è un'affinità.

Infatti, si ha

$$\overrightarrow{f_{A,C}(P)f_{A,C}(Q)} = f_{A,C}(Q) - f_{A,C}(P) = {}^t C + A \cdot {}^t Q - ({}^t C + A \cdot {}^t P) = A \cdot {}^t(Q - P),$$

quindi $f_{A,C}$ è un'affinità con parte lineare data dalla moltiplicazione per la matrice A .

Come conseguenza abbiamo il seguente risultato.

Proposizione 2.1.1. *Il gruppo delle affinità di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ ha per elementi:*

$$Aff_n(\mathbb{K}) = \{f_{A,C} : A \in GL_n(\mathbb{K}), C \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n\}.$$

Osservazione 2.1.2. In particolare le traslazioni in $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ si rappresentano come

$${}^t C(P) = {}^t C + {}^t P$$

2.1.2 Affinità di uno spazio affine arbitrario

Il caso generale è perfettamente analogo al caso $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$; fissiamo un riferimento affine

$$(O, v_1, \cdot, v_n).$$

Teorema 2.1.3. *Sia \mathbb{A} uno spazio affine su V e sia (O, v_1, \cdot, v_n) un riferimento affine. Allora ogni affinità f con automorfismo associato φ si esprime nella forma*

$$f(P(x_1, \dots, x_n)) = Q(y_1, \dots, y_n),$$

con

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^t C + A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

e $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Viceversa, ogni applicazione del tipo (2.1.2) è un'affinità di \mathbb{A} .

Corollario 2.1.4. Fissato un riferimento affine (O, v_1, \dots, v_n) di \mathbb{A} , l'applicazione

$$\text{Aff}(\mathbb{A}) \rightarrow \text{Aff}_n(\mathbb{K}), \quad f \mapsto f_{A,C} \text{ data da (2.1.2)}$$

è un isomorfismo di gruppi.

Osservazione 2.1.5. Si può dare una forma ancora più compatta dell'equazione (2.1.2) di un'affinità.

Osserviamo che i dati della matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ e del vettore $C \in \mathbb{K}^n$ possono essere inseriti in una matrice $(n+1) \times (n+1)$ nei seguenti due modi.

I) Siano $\bar{X} := {}^t(1, x_1, \dots, x_n)$ e $\bar{Y} := {}^t(1, y_1, \dots, y_n)$ e sia

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ c_n & & & \end{pmatrix}.$$

Allora l'equazione (2.1.2) è equivalente a

$$\bar{Y} = Q \bar{X}. \tag{2.1.3}$$

II) Siano $\tilde{X} := {}^t(x_1, \dots, x_n, 1)$ e $\tilde{Y} := {}^t(y_1, \dots, y_n, 1)$ e sia

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} & & & c_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & c_n \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora l'equazione (2.1.2) è equivalente a

$$\tilde{Y} = \tilde{Q} \tilde{X}. \tag{2.1.4}$$

2.2 Proprietà affini

Intendiamo con *proprietà affini* quelle proprietà (nozioni, relazioni, ecc.) che vengono mantenute attraverso un'affinità. In sintesi, in questo paragrafo vedremo che si conservano per affinità:

- essere un sottospazio affine;

- la dimensione di un sottospazio affine;
- essere un insieme di punti allineati;
- essere sottospazi paralleli.

In questa sezione \mathbb{A} denota uno spazio affine su un \mathbb{K} -spazio vettoriale V con $n = \dim(\mathbb{A}) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

Proposizione 2.2.1. *Sia $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ di parte lineare $\varphi \in GL(V)$. Se S è un sottospazio affine di giacitura W e passante per il punto P , allora $f(S)$ è il sottospazio affine di giacitura $\varphi(W)$ e passante per il punto $f(P)$.*

Dimostrazione. “ \subseteq ” Sia $Q \in S$ cioè $\overrightarrow{PQ} = w$ per un opportuno $w \in W$. Dalla definizione di applicazione affine si ha

$$\varphi(w) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} \in \varphi(W).$$

“ \supseteq ” Sia R tale che $\overrightarrow{f(P)R} \in \varphi(W)$, quindi esiste $w \in W$ tale che

$$\overrightarrow{f(P)R} = \varphi(w).$$

Per l’assioma (SA1) esiste un unico punto $Q \in \mathbb{A}$ tale che $w = \overrightarrow{PQ}$. Quindi $\varphi(w) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$. In conclusione

$$\varphi(w) = \overrightarrow{f(P)R} = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

quindi $R \in f(S)$. □

Corollario 2.2.2. *Se $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $S \subseteq \mathbb{A}$ è un sottospazio affine allora*

$$\dim f(S) = \dim S.$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione precedente si ha che la giacitura di S e quella di $f(S)$ sono sottospazi di V che risultano isomorfi tramite la parte lineare di f . □

Corollario 2.2.3. *Se $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $\{P_1, \dots, P_m\}$ è un un insieme di punti distinti allineati, allora anche*

$$\{f(P_1), \dots, f(P_m)\}$$

è un un insieme di punti distinti allineati.

Diremo, sinteticamente, che ogni affinità è una collineazione.

Dimostrazione. Sia L la retta contenente P_1, \dots, P_m . Poiché un'applicazione mantiene le inclusioni, si ha che $f(L)$ contiene $f(P_1), \dots, f(P_m)$. Dalla Proposizione proaff si ha che $f(L)$ è un sottospazio affine e, dal Corollario proaff2, segue in particolare che $\dim(f(L)) = 1$. \square

Corollario 2.2.4. *Se $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $S, S' \subseteq \mathbb{A}$ sono due sottospazi affini paralleli allora $f(S)$ e $f(S')$ sono sottospazi affini paralleli.*

Dimostrazione. Se S e S' hanno giaciture, rispettivamente, W e W' , per ipotesi si ha $W \subseteq W'$ (o $W \supseteq W'$). Quindi $\varphi(W) \subseteq \varphi(W')$ (o $\varphi(W) \supseteq \varphi(W')$). D'altro canto, dalla Proposizione 2.2.1, segue che la giacitura di $f(S)$ è $\varphi(W)$ e quella di $f(S')$ è $\varphi(W')$ e questo conclude la dimostrazione. \square

Definizione 2.2.5. Due sottoinsiemi X e X' di \mathbb{A} si dicono *affinamente equivalenti* se esiste un'affinità f di \mathbb{A} tale che $f(X) = X'$.

Abbiamo visto nel Corollario 2.2.2 che due sottospazi affinamente equivalenti hanno la stessa dimensione. Ora vediamo che vale anche il viceversa.

Proposizione 2.2.6. *Siano S e S' sottospazi affini di \mathbb{A} con $\dim(S) = \dim(S')$. Allora esiste $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ tale che $f(S) = S'$.*

Dimostrazione. Siano W e W' le giaciture di S e S' . Siccome per ipotesi si ha $\dim W = \dim W'$, esiste un isomorfismo lineare $\varphi : V \rightarrow V$ tale che $\varphi(W) = W'$; infatti, sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ è una base di W , consideriamo un suo completamento arbitrario a una base $\{w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ di V . Fissiamo analogamente una base $\{w'_1, \dots, w'_k\}$ di W' , e sia $\{w'_1, \dots, w'_k, v'_{k+1}, \dots, v'_n\}$ un completamento arbitrario a una base di V . Allora per il Teorema di determinazione di una applicazione lineare, esiste una unica $\varphi : V \rightarrow V$ tale che $\varphi(w_i) = w'_i$ e $\varphi(v_i) = v'_i$. Siccome φ manda una base in una base, essa risulta un isomorfismo.

Se ora fissiamo due punti $Q \in S$ e $Q' \in S'$, allora l'affinità $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ determinata da $f(Q) = Q'$ e con parte lineare φ soddisfa la richiesta dell'enunciato. \square

Vediamo ora un Teorema di determinazione di affinità tramite immagine di punti, che si basa sull'analogo teorema di determinazione per applicazioni lineari.

Teorema 2.2.7 (Determinazione di un'affinità mediante punti). *Siano $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ e $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ due $(n + 1)$ -uple di punti di \mathbb{A}^n affinamente indipendenti. Allora esiste un'unica affinità f tale che*

$$f(P_i) = Q_i, \text{ per } i = 0, \dots, n.$$

In altre parole, tali due $(n + 1)$ -uple sono affinamente equivalenti e in modo unico (a meno di permutazioni).

Dimostrazione. Per ipotesi gli n vettori $P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0$ di \mathbb{K}^n sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di \mathbb{K}^n . Analogamente lo sono $Q_1 - Q_0, \dots, Q_n - Q_0$. Pertanto esiste un unico isomorfismo φ di \mathbb{K}^n in sé tale che $\varphi(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Per il Teorema deaff esiste un'unica $f \in \text{Aff}(\mathbb{A}^n)$ avente φ come parte lineare e tale che $f(P_0) = Q_0$. Precisamente (vedi dimostrazione del teorema citato) tale affinità è definita su ogni $P \in \mathbb{A}^n$ come

$$f(P) = Q_0 + \varphi(P - P_0).$$

Dobbiamo verificare che tale affinità verifica le condizioni richieste. Ma, per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha

$$f(P_i) - f(P_0) = \varphi(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$$

da cui segue $f(P_i) = Q_i - Q_0 + f(P_0) = Q_i$, come volevamo.

Infine, tale affinità è unica; infatti, se $g \in \text{Aff}(\mathbb{A}^n)$ e $g(P_i) = Q_i$, per ogni $i = 0, \dots, n$, allora $g = f$. □

2.3 Sottospazi fissi e sottospazi invarianti per affinità

Definizione 2.3.1. Siano \mathbb{A} uno spazio affine e $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ una affinità. Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}$ si dice

- *fisso* per f se $f(P) = P$ per ogni punto $P \in S$;
- *invariante* per f se $f(S) = S$.

Osserviamo che fisso implica invariante, ma non viceversa.

Proposizione 2.3.2. Siano V un \mathbb{K} -spazio vettoriale e \mathbb{A} uno spazio affine su V . Sia inoltre $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ di parte lineare $\varphi \in GL(V)$. Infine sia $P_0 \in \mathbb{A}$ un punto fisso per f . Si hanno i seguenti fatti:

- i) se $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di φ e V_λ denota il relativo autospazio, allora il sottospazio affine S passante per P_0 e di giacitura V_λ è invariante per f ;
- ii) in particolare, se $\lambda = 1$, allora S passante per P_0 e di giacitura V_1 è fisso per f .

Dimostrazione. i) Vogliamo provare che, per ogni $Q \in S$ si ha $f(Q) \in S$. Osserviamo che $\overrightarrow{P_0Q} \in V_\lambda$, pertanto $\varphi(\overrightarrow{P_0Q}) = \lambda(\overrightarrow{P_0Q})$ e quindi

$$\overrightarrow{f(P_0)f(Q)} = \lambda(\overrightarrow{P_0Q}).$$

Ma $f(P_0) = P_0$, dunque $\overrightarrow{P_0 f(Q)} = \lambda(\overrightarrow{P_0 Q})$, quindi $f(Q) \in S$. *ii*) Con lo stesso ragionamento visto sopra, per ogni $Q \in S$ si ottiene che $\overrightarrow{P_0 f(Q)} = \overrightarrow{P_0 Q}$, quindi $Q = f(Q)$ come volevamo. \square

Esempio 2.3.3. L'affinità f di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ definita come $f(x) = 1 - x$ ha $x = \frac{1}{2}$ come unico punto fisso. L'affinità $g \in \text{Aff}(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2)$, $g(x, y) = (x + 1, -y)$ ha la retta $y = 0$ come sottospazio invariante, ma non ha punti fissi.

2.4 Proiezioni su sottospazi affini

Vogliamo ora definire le proiezioni di uno spazio affine su un sottospazio affine. Ricordiamo prima alcune nozioni di Algebra Lineare.

In uno spazio vettoriale V , due sottospazi U e W si dicono *complementari* se $V = U \oplus W$. Equivalentemente, se ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in modo unico come $v = u + w$, per opportuni $u \in U$ e $w \in W$.

Inoltre sono definite due applicazioni lineari, dette *proiezioni*,

$$\pi_U : V \rightarrow U, \quad \text{data da } v = u + w \mapsto u$$

e

$$\pi_W : V \rightarrow W, \quad \text{data da } v = u + w \mapsto w.$$

Vediamo come adattare queste nozioni nella Geometria affine.

Definizione 2.4.1. Sia \mathbb{A} uno spazio affine sullo spazio vettoriale $V = U \oplus W$ e sia S un sottospazio affine di giacitura W . Diciamo *proiezione su S parallela a U* l'applicazione

$$p_W : \mathbb{A} \rightarrow S, \quad p_W(p) = T_P(U) \cap S,$$

dove $T_P(U)$ è il sottospazio affine passante per P e con giacitura U .

In modo del tutto analogo, dato un sottospazio affine di giacitura U , si definisce la *proiezione p_U su S' parallela a W* .

Lemma 2.4.2. Nelle ipotesi della Definizione 2.4.1 si ha per ogni $P \in \mathbb{A}$:

$$\dim T_P(U) \cap S = 0,$$

quindi consiste di un punto.

Dimostrazione. Siccome $W \oplus U = V$, per ogni coppia di punti $Q \in S$ e $R \in T_P(U)$ si ha certamente $\overrightarrow{QR} \in W \oplus U$ quindi $T_P(U) \cap S \neq \emptyset$ per la Proposizione 1.2.3.

Inoltre, dalla Formula di Grassmann affine (1.2.1) abbiamo

$$\dim T_P(U) \cap S = \dim T_P(U) + \dim S - \dim L(T_P(U), S) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 0.$$

□

Esempio 2.4.3. In $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, spazio affine su $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$, dove $U = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $W = \text{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, posto S l'asse y di equazione $x = 0$, la proiezione su S parallela a U è

$$p_U(x, y) = y.$$

Se invece poniamo S' l'asse x , la proiezione su S' parallela a W è

$$p_W(x, y) = x.$$

Proposizione 2.4.4. Con le notazioni precedenti, l'applicazione p_W è un'applicazione affine avente π_W come parte lineare.

Dimostrazione. Sia $Q \in S$. Osserviamo che per ogni $P \in \mathbb{A}$, se consideriamo il punto $P' = p_W(P)$, abbiamo

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP'} + \overrightarrow{P'P} = w + u,$$

dove $w \in W$ perché $Q, P' \in S$, e $u \in U$ perché $P', P \in T_P(U)$.

Quindi, dati $P, R \in \mathbb{A}$ arbitrari, se consideriamo il vettore $\overrightarrow{p_W(P)p_W(R)} = \overrightarrow{P'R'}$, possiamo scrivere

$$\overrightarrow{P'R'} = \overrightarrow{P'Q} + \overrightarrow{QR'} = w_P - w_R,$$

dove

$$\overrightarrow{QP} = w_P + u_P, \quad \overrightarrow{QR} = w_R + u_R, \quad w_P, w_R \in W, u_P, u_R \in U.$$

L'applicazione φ che a \overrightarrow{PR} associa $\overrightarrow{P'R'}$ opera nel seguente modo:

$$\varphi(\overrightarrow{PR}) = \varphi(w_P - w_R + u_P - u_R) = w_P - w_R,$$

quindi è proprio la proiezione lineare sul sottospazio W .

□

Capitolo 3

Spazi affini reali

Se il campo K relativo a uno spazio affine è il campo \mathbb{R} dei numeri reali, oltre a tutto quanto visto in precedenza, si danno nozioni e risultati ulteriori, possibili in quanto \mathbb{R} è dotato di una relazione d'ordine che lo rende un *campo ordinato*.

Definizione 3.0.1. Se \mathbb{A} è uno spazio affine su un \mathbb{R} -spazio vettoriale V , diremo che \mathbb{A} è uno *spazio affine reale*. In particolare, se $n = \dim(\mathbb{A})$, si può supporre che $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$.

Un primo fatto peculiare di tali spazi è il seguente. Abbiamo menzionato nel paragrafo precedente la nozione di collineazione (cioè di applicazione biunivoca $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ tale che, per ogni retta $L \subset \mathbb{A}$ anche $f(L)$ è una retta) e abbiamo provato che ogni affinità è una collineazione (vedi Corollario hill). Nel caso degli spazi affini reali di dimensione almeno 2 vale anche il viceversa (non proveremo questo risultato).

Introduciamo ora alcune nozioni specifiche degli spazi affini reali e vediamo quali di queste si mantengono per affinità.

D'ora in poi, in questo paragrafo, con \mathbb{A} denoteremo uno spazio affine reale su un \mathbb{R} -spazio vettoriale V .

Definizione 3.0.2. La *semiretta di origine* $Q \in \mathbb{A}$ e *direzione* $v \in V \setminus \{0_V\}$ è l'insieme

$$\{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} = tv, t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}.$$

Chiaramente tale semiretta è contenuta nella retta passante per Q con giacitura $\text{Span}(v)$. Si prova facilmente che l'immagine per affinità di una semiretta è ancora una semiretta.

Definizione 3.0.3. Diciamo *segmento di estremi* $Q, R \in \mathbb{A}$ l'insieme

$$\overline{QR} := \{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} = t(\overrightarrow{QR}), t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Proposizione 3.0.4. Sia $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $Q, R \in \mathbb{A}$ siano due punti qualunque. Allora

$$f(\overline{QR}) = \overline{f(Q)f(R)}.$$

In altre parole, l'immagine per affinità di un segmento è ancora un segmento, avente per estremi le immagini degli estremi del segmento di partenza.

Dimostrazione. “ \subseteq ” Se $P \in \overline{QR}$ allora $\overrightarrow{QP} = \bar{t}\overrightarrow{QR}$ per un opportuno $\bar{t} \in \mathbb{R}, 0 \leq \bar{t} \leq 1$. Se φ è la parte lineare di f , si ha

$$\overrightarrow{f(Q)f(P)} = \varphi(\overrightarrow{QP}) = \varphi(\bar{t}\overrightarrow{QR}) = \bar{t}\varphi(\overrightarrow{QR}),$$

quindi $f(P) \in \overline{f(Q)f(R)}$.

“ \supseteq ” Basta applicare l'inclusione appena dimostrata all'affinità f^{-1} e al segmento di estremi $f(R)$ e $f(Q)$, ottenendo che

$$f^{-1}(\overline{f(Q)f(R)}) \subseteq \overline{f^{-1}(f(Q))f^{-1}(f(R))} = \overline{QR}.$$

Applicando infine f ad ambo i membri si ottiene la tesi. □

Definizione 3.0.5. Si può definire il *punto medio* di un segmento \overline{QR} (anche se il termine non ha alcuna valenza metrica, che assumerà invece negli spazi euclidei!) quel punto M definito da

$$\overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$$

La naturale generalizzazione della nozione di segmento a una “dimensione” maggiore è la seguente.

Definizione 3.0.6. Se $A, B, C \in \mathbb{A}$ sono tre punti non allineati, diciamo *triangolo di vertici* A, B, C l'insieme

$$\overline{ABC} := \{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}, t, s \in \mathbb{R}_+, t + s \leq 1\}$$

dove \mathbb{R}_+ denota l'insieme dei numeri reali non negativi.

In modo analogo a quanto visto nella Proposizione 3.0.4, si prova il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 3.0.7. Se $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $A, B, C \in \mathbb{A}$ sono tre punti non allineati, allora

$$f(\overline{ABC}) = \overline{f(A)f(B)f(C)}.$$

In altre parole, l'immagine per affinità di un triangolo è ancora un triangolo, avente per vertici le immagini dei vertici del triangolo di partenza.

Si possono generalizzare le nozioni di segmento (con 2 estremi) e di triangolo (con 3 vertici) a un oggetto determinato da un insieme (sufficientemente generale) di punti.

Definizione 3.0.8. Dati $A_0, \dots, A_k \in \mathbb{A}$ punti affinementemente indipendenti (dunque necessariamente $k \leq n$), il k -simplesso di vertici A_0, \dots, A_k è l'insieme

$$\Delta_k := \left\{ P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^k t_i \overrightarrow{A_0A_i}, t_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^k t_i \leq 1 \right\}.$$

Un'altra nozione tipica degli spazi affini reali è quella di convessità.

Definizione 3.0.9. Un insieme $X \subseteq \mathbb{A}$ si dice *convesso* se, comunque scelti $A, B \in X$, il segmento di estremi A e B è contenuto in X .

La convessità è una proprietà affine, come vediamo nel seguente risultato.

Teorema 3.0.10. Sia $X \subseteq \mathbb{A}$ un insieme convesso e sia $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$. Allora $f(X)$ è convesso.

Dimostrazione. Siano $f(A), f(B) \in f(X)$ due punti qualunque. Vogliamo provare che

$$\overline{f(A)f(B)} \subseteq f(X).$$

Poiché $A, B \in X$ e X è convesso per ipotesi, allora $\overline{AB} \subseteq X$. Pertanto $f(\overline{AB}) \subseteq f(X)$. Ma, per la Proposizione 3.0.4, si ha

$$f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$$

e dunque la tesi. □

Capitolo 4

Il prodotto vettoriale

In questa sezione consideriamo \mathbb{R}^3 con il prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione 4.0.1. Siano

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

due vettori di \mathbb{R}^3 . Il prodotto vettoriale di v e w è il vettore $v \wedge w \in \mathbb{R}^3$ definito come segue:

$$v \wedge w := \begin{pmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ -a_1 c_2 + a_2 c_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Un'altra notazione usata frequentemente per il prodotto vettoriale di v e w è $v \times w$.

Osservazione 4.0.2. Osserviamo che le coordinate di $v \wedge w$ rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ sono i determinanti dei minori 2×2 della matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & a_2 \end{pmatrix}, \tag{4.0.1}$$

e precisamente,

$$v \wedge w = e_1 \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} - e_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} + e_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Si noti che il lato destro di (4.0.1) coincide con lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna del “determinante della matrice”

$$\begin{pmatrix} e_1 & a_1 & a_2 \\ e_2 & b_1 & b_2 \\ e_3 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Dalla osservazione appena vista, deduciamo la seguente.

Proposizione 4.0.3. *Siano $u, v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ e sia $c \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti affermazioni.*

1. $(v_1 + v_2) \wedge w = v_1 \wedge w + v_2 \wedge w$; $(cv) \wedge w = c(v \wedge w)$.
2. $v \wedge (w_1 + w_2) = v \wedge w_1 + v \wedge w_2$; $v \wedge (cw) = c(v \wedge w)$.
3. $v \wedge w = -w \wedge v$.
4. $\langle u, v \wedge w \rangle = \det \begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$, dove $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$.
5. $v \wedge w \perp v, w$.
6. $v \wedge w = 0 \iff v, w$ sono linearmente dipendenti.
7. $\|v \wedge w\| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin \theta$, dove θ è l'angolo convesso tra v e w . Inoltre $\|v \wedge w\|$ coincide con l'area del parallelogramma di vertici $0, v, w$ e $v + w$.

Dimostrazione. I punti 1, 2 e 3 seguono direttamente dalle proprietà del determinante.

4. Dall'equazione (4.0.1) abbiamo:

$$\langle v, v \wedge w \rangle = a \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} - b \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

che coincide con lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna del determinante di

$$\begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

5. Dalla proprietà 4. segue che $\langle v, v \wedge w \rangle = \det(v, v, w) = 0$, poiché la matrice (v, v, w) ha due colonne uguali. Quindi $v \perp v \wedge w$. Analogamente si dimostra che $w \perp v \wedge w$.

6. Si ha

$$v \wedge w = 0 \iff \text{rk} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} < 2, \text{rk} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} < 2, \text{rk} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} < 2.$$

Equivalentemente, $v \wedge w = 0 \iff v, w$ sono linearmente dipendenti.

7. Questa proprietà è conseguenza immediata delle seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}\|v \wedge w\|^2 &= (b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \cdot (\cos \theta)^2 \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 (1 - (\cos \theta)^2) \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \cdot (\sin \theta)^2.\end{aligned}$$

□

Capitolo 5

Geometria euclidea

5.1 Spazi vettoriali euclidei e unitari

Riprendiamo alcune nozioni di Algebra Lineare sugli spazi vettoriali euclidei. Dovremo distinguere i due casi: quello reale e quello complesso.

Definizione 5.1.1. Sia V un \mathbb{R} -spazio vettoriale. Una *forma bilineare simmetrica su V* è una applicazione

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

che verifica le seguenti proprietà:

i) bilinearità, cioè

- $\forall v \in V$, l'applicazione $g(v, -) : V \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare;
- $\forall w \in V$, l'applicazione $g(-, w) : V \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare;

ii) simmetria, cioè $\forall v, w \in V$, vale $g(v, w) = g(w, v)$.

Infine, tale forma bilineare si dice *definita positiva* o *prodotto scalare reale* se $\forall v \in V$, si ha $g(v, v) \geq 0$ e inoltre $g(v, v) = 0$ se e solo se $v = 0_V$.

In questo caso, diciamo che V è uno *spazio vettoriale reale euclideo* o un \mathbb{R} - *spazio vettoriale euclideo*.

In modo analogo, ma con i dovuti adattamenti, vediamo la corrispondente nozione relativa ai numeri complessi.

Utilizzeremo le seguenti notazioni: se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, denotiamo il suo coniugato $a - ib$ con \bar{z} e il suo modulo $\sqrt{a^2 + b^2}$ con $|z|$. Chiaramente, se $z \in \mathbb{R}$, il suo modulo coincide col valore assoluto.

Definizione 5.1.2. Sia V un \mathbb{C} -spazio vettoriale. Una *forma sesquilineare hermitiana* su V è una applicazione

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

che verifica le seguenti proprietà:

i) *sequilinearità*, cioè

– $\forall v \in V$, l'applicazione $g(v, -) : V \rightarrow \mathbb{C}$ è additiva e verifica

$$g(v, \lambda w) = \bar{\lambda}g(v, w),$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e $w \in V$;

– $\forall w \in V$, l'applicazione $g(-, w) : V \rightarrow \mathbb{C}$ è lineare;

ii) *simmetria coniugata*, cioè $\forall v, w \in V$, vale $g(v, w) = \overline{g(w, v)}$.

Infine, tale forma si dice *definita positiva* o *prodotto hermitiano complesso* se $\forall v \in V$, si ha $g(v, v) \geq 0$ e inoltre $g(v, v) = 0$ se e solo se $v = 0_V$.

In questo caso, diciamo che V è uno *spazio vettoriale complessounitario*.

Si osservi che la richiesta $g(v, v) \geq 0$ ha senso in quanto, per la simmetria coniugata, $g(v, v) = \overline{g(v, v)}$, dunque $g(v, v) \in \mathbb{R}$.

Osservazione 5.1.3. Ricordiamo inoltre che, come accade per le applicazioni lineari, anche alle forme bilineari si può associare una matrice, una volta che si è fissata una base per lo spazio vettoriale. Infatti, se V è un \mathbb{R} -spazio vettoriale e $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è una sua base, a ogni forma bilineare

$$\tau : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

si associa la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(\tau)_{i,j} := (\tau(v_i, v_j)) \in M_n(\mathbb{R}).$$

Viceversa, a una matrice $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ si associa, rispetto a \mathcal{B} , la forma bilineare definita, su una qualunque coppia di vettori $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ e $w = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$, da:

$$\tau(v, w) := \sum_{i,j=1}^n m_{ij}a_ib_j.$$

Associando ad ogni vettore v la matrice colonna $a := {}^t(a_1, \dots, a_n)$ delle sue coordinate rispetto alla base scelta, e analogamente a w la matrice colonna $b := {}^t(b_1, \dots, b_n)$, l'uguaglianza precedente si scrive sinteticamente come

$$\tau(v, w) = {}^t a M b.$$

È noto, inoltre, che τ è una forma bilineare simmetrica se e solo se $M = M_{\mathcal{B}}(\tau)$ è una matrice simmetrica (cioè tale che ${}^tM = M$).

In particolare, se V è uno spazio vettoriale reale euclideo, si associa al prodotto scalare, rispetto a una base fissata \mathcal{B} , una matrice M simmetrica reale definita positiva che verifica

$$\langle v, w \rangle = {}^t_a M b.$$

e viceversa.

Definizione 5.1.4. Se $V = \mathbb{R}^n$, il *prodotto scalare standard* è quello associato alla matrice identica rispetto alla base canonica.

Pertanto, se $v = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ e $w = {}^t(b_1, \dots, b_n)$, allora

$$\langle v, w \rangle = {}^t v \mathbb{I}_n w = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

In modo analogo si prova la corrispondenza tra un prodotto hermitiano complesso in un \mathbb{C} -spazio vettoriale euclideo e una matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ hermitiana (cioè tale che ${}^tM = \overline{M}$) definita positiva, data da

$$g(v, w) = {}^t v M \overline{w}.$$

Ricordiamo un risultato fondamentale, di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 5.1.5. Se V è un \mathbb{R} -spazio vettoriale euclideo, comunque scelti $v, w \in V$, vale

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle.$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.

Definizione 5.1.6. Se V è un \mathbb{R} (rispettivamente, \mathbb{C})-spazio vettoriale euclideo, diciamo *norma* di $v \in V$ il numero reale non negativo

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Con tale nozione, possiamo riscrivere il risultato precedente nella sua formulazione più generale (che vale anche sui numeri complessi).

Teorema 5.1.7 (Diseguaglianza di Cauchy - Schwarz). Se V è un spazio vettoriale euclideo reale o complesso, comunque scelti $v, w \in V$, si ha

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|.$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.

Proposizione 5.1.8. Sia V un spazio vettoriale euclideo reale o complesso. Provare che, per ogni $v \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (rispettivamente, \mathbb{C}) valgono le seguenti proprietà:

a) $\|v\| \geq 0$ (qui 0 denota $0_{\mathbb{R}}$);

b) $\|v\| = 0 \iff v = 0_V$;

c) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

Dalla Disuguaglianza di Schwarz discende un'altra nota relazione.

Teorema 5.1.9 (Disuguaglianza triangolare). Se V è un spazio vettoriale euclideo reale o complesso, comunque scelti $v, w \in V$, si ha

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza allora v e w sono linearmente dipendenti.

In uno spazio vettoriale euclideo si può introdurre la nozione di ortogonalità fra vettori e, di conseguenza, anche fra sottospazi vettoriali.

Definizione 5.1.10. Diciamo che due vettori $v, w \in V$ sono *ortogonali* se $\langle v, w \rangle = 0$.

Osservazione 5.1.11. Si noti che in uno spazio vettoriale euclideo reale vale

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle.$$

Dunque, se v e w sono ortogonali si ha

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

cioè il Teorema di Pitagora, che dunque vale in un qualunque spazio vettoriale euclideo.

In uno spazio vettoriale euclideo si rivela essenziale la nozione di *base ortonormale*, cioè di una base costituita da vettori di norma 1 e a due a due ortogonali. Se $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ è una base ortonormale, allora per ogni $v \in V$ si ha

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Inoltre ogni cambiamento di base tra basi ortonormali è associato a una matrice ortogonale M (cioè tale che ${}^t M = M^{-1}$), nel caso reale. Mentre nel caso complesso M è unitaria (cioè tale che ${}^t \bar{M} = M^{-1}$).

Infine ricordiamo la seguente nozione

Definizione 5.1.12. Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V . Diciamo *complemento ortogonale di W* l'insieme

$$W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}.$$

Il nome di "complemento ortogonale" è giustificato dalle seguenti proprietà, le cui dimostrazioni sono già state viste nel corso di Algebra Lineare.

Proposizione 5.1.13. Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V . Allora valgono i seguenti fatti:

- i) W^\perp è un sottospazio vettoriale di V ;
- ii) $W^\perp \cap W = \{0_V\}$;
- iii) $W^\perp + W = V$.

In particolare, la somma $W^\perp + W$ è diretta e si denota dunque con $W^\perp \oplus W$. Conseguentemente, $\dim(W^\perp) + \dim(W) = \dim(V)$.

Osservazione 5.1.14. Se W_1 e W_2 sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale euclideo V , provare che

$$W_1 \subseteq W_2^\perp \iff W_2 \subseteq W_1^\perp.$$

Definizione 5.1.15. Due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 di uno spazio vettoriale euclideo V sono *ortogonali* se

$$W_1 \subseteq W_2^\perp, \quad \text{oppure} \quad W_2 \subseteq W_1^\perp.$$

Osservazione 5.1.16. Per la Proposizione 5.1.13, se W_1 e W_2 sono ortogonali si ha

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) \leq \dim(V).$$

Esempio 5.1.17. Sia W un iperpiano dello spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^n con prodotto scalare standard. La sua equazione cartesiana è del tipo

$$W : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Osserviamo che il vettore $(a_1, \dots, a_n) \in W^\perp$. D'altro canto, $\dim(W) = n - 1$ dunque $\dim(W^\perp) = 1$. Pertanto W^\perp è la retta vettoriale $\text{Span} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Concludiamo il paragrafo con una nozione relativa solo al caso reale.

Definizione 5.1.18. Siano v, w due vettori non nulli di un \mathbb{R} -spazio vettoriale euclideo V . Si dice *angolo convesso* tra v e w l'unico angolo θ , con $0 \leq \theta \leq \pi$ tale che

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Si noti che, per la Disuguaglianza di Cauchy - Schwarz, tale frazione è compresa tra -1 e 1 . Si osservi infine che, se v e w sono proporzionali, cioè se $w = \lambda v$, allora

$$\cos \theta = \frac{\langle v, \lambda v \rangle}{\|v\| \|\lambda v\|} = \frac{\lambda \|v\|^2}{|\lambda| \|v\|^2} = \pm 1$$

dove $\cos \theta = 1 \iff \theta = 0 \iff \lambda > 0$, $\cos \theta = -1 \iff \theta = \pi \iff \lambda < 0$.

5.2 Spazi affini euclidei

Introduciamo ora un nuovo ambiente geometrico relativamente ai due casi, reale e complesso.

Definizione 5.2.1. Se V è uno spazio vettoriale reale (rispettivamente, complesso) euclideo, diciamo *spazio affine euclideo* (rispettivamente, *unitario*) lo spazio affine $\mathbb{A}(V)$ su V che verrà denotato con

$$\mathbb{E}.$$

I sottospazi affini di \mathbb{E} sono detti suoi *sottospazi euclidei* (rispettivamente, *unitari*).

In particolare, se $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard, il corrispondente *spazio affine euclideo canonico* si denota con

$$\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n.$$

Se $V = \mathbb{C}^n$, il corrispondente *spazio affine unitario canonico* si denota

$$\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^n.$$

Grazie al prodotto scalare su V , è possibile definire l'ortogonalità e gli angoli tra sottospazi euclidei (risp. unitari).

Definizione 5.2.2. Sia \mathbb{E} uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario) e $S, T \subseteq \mathbb{E}$ due suoi sottospazi euclidei (rispettivamente, unitari) di dimensione ≥ 1 .

Diciamo che S e T sono *ortogonali* se lo sono le rispettive giaciture come sottospazi di V e scriveremo

$$S \perp T.$$

Si osservi che, se S e T sono ortogonali in \mathbb{E} , con $n = \dim(\mathbb{E})$, allora

$$\dim(S) + \dim(T) \leq n. \quad (5.2.1)$$

Per poter fare calcoli, come nel caso affine, occorre introdurre un sistema di riferimento. Ma qui terremo conto che lo spazio vettoriale soggiacente è euclideo.

Definizione 5.2.3. Sia \mathbb{E} uno spazio affine euclideo sullo spazio vettoriale euclideo V . Si dice *riferimento cartesiano* in \mathbb{E} un riferimento affine (O, \mathcal{B}) , dove \mathcal{B} è una base ortonormale di V .

Esempio 5.2.4. Si consideri un iperpiano H di $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ che, rispetto a un fissato riferimento cartesiano, abbia equazione

$$H : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

La sua giacitura è $H_0 : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. Per definizione, un sottospazio euclideo $S = Q + S_0$ è ortogonale a H se e solo se $\dim(S_0) \geq 1$ e $S_0 \subseteq H_0^\perp$.

Osserviamo che H_0^\perp è una retta vettoriale e precisamente $H_0^\perp = \text{Span}(v)$, dove $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Dunque S è necessariamente una retta affine di giacitura $S_0 = \text{Span}(v)$.

Ad esempio, il piano H e la retta r di \mathbb{E}^3 dati da

$$H : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \quad r : (x_1, x_2, x_3) = (1 + 2t, 2 - 3t, 43 + t)$$

sono ortogonali.

Esempio 5.2.5. Si considerino due rette r e s di $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ aventi come vettori direzionali (rispetto a un riferimento cartesiano)

$$v_r = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad v_s = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

rispettivamente. Per definizione, $r \perp s$ se e solo se $\text{Span}(v_r) \subset \text{Span}(v_s)^\perp$ e questo si verifica se e solo se $v_r \perp v_s$ cioè se e solo se

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = 0.$$

Come visto in (5.2.1), se $S, T \subset \mathbb{E}^n$ sono ortogonali, allora necessariamente $\dim(S) + \dim(T) \leq n$. Volendo estendere tale nozione a sottospazi di dimensione qualunque, partiamo dalla seguente osservazione.

Siano $S \ni P$ e $T \ni Q$ due sottospazi euclidei di giaciture rispettive S_0 e T_0 e denotiamo le rispettive dimensioni con

$$s := \dim(S) = \dim_{\mathbb{R}}(S_0), \quad t := \dim(T) = \dim_{\mathbb{R}}(T_0).$$

Se accade che

$$\dim(S) + \dim(T) \geq n,$$

allora

$$\dim(S_0^\perp) + \dim(T_0^\perp) = (n - s) + (n - t) = 2n - (s + t) \leq n.$$

Questo induce a introdurre la seguente nozione.

Definizione 5.2.6. Siano $S \ni P$ e $T \ni Q$ due sottospazi euclidei di \mathbb{E}^n di giaciture rispettive S_0 e T_0 . Se $\dim(S) + \dim(T) \geq n$, diciamo che S e T sono *perpendicolari* se S_0^\perp e T_0^\perp sono ortogonali.

Esempio 5.2.7. Si considerino due piani di \mathbb{E}^3 di equazioni

$$S : ax + by + cz + d = 0, \quad T : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Per definizione, essi sono perpendicolari se e solo se le rette vettoriali

$$S_0^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad T_0^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

sono ortogonali. Tale condizione equivale a

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \text{cioè} \quad aa' + bb' + cc' = 0.$$

5.3 Angolo tra sottospazi euclidei

Per quanto riguarda l'angolo tra due sottospazi euclidei, ci limiteremo a due classi di esempi: l'angolo fra due rette e quello fra una retta e un iperpiano.

Tenendo presente la definizione di angolo acuto fra due vettori di un \mathbb{R} -spazio vettoriale euclideo, si noti che due rette individuano due angoli, uno acuto e uno ottuso. Sceglieremo quello acuto, per convenzione.

Definizione 5.3.1. Siano $r, s \subset \mathbb{E}^n$ due rette nello spazio affine euclideo di vettori direzionali rispettivi v_r e v_s .

Si dice *angolo fra le rette r e s* , e si denota con \widehat{rs} , l'unico angolo $\theta \in [0, \pi/2]$ tale che

$$\cos \theta = \frac{|\langle v_r, v_s \rangle|}{\|v_r\| \|v_s\|}.$$

Si osservi che, nella definizione precedente, $0 \leq \cos \theta \leq 1$ e dunque \widehat{rs} è un angolo acuto. Inoltre è chiaro che $r \perp s$ se e solo se $\widehat{rs} = \pi/2$.

Osservazione 5.3.2. Si noti che l'angolo fra due rette, come accadeva con l'ortogonalità, non ha nulla a che vedere con l'incidenza delle due rette: infatti lo si può definire e calcolare sia nel caso in cui le rette siano incidenti, sia nel caso in cui siano sghembe.

Definizione 5.3.3. Siano r una retta e H un iperpiano in \mathbb{E}^n ; sia inoltre t una retta ortogonale a H . Si dice *angolo fra r e H* , e si denota con \widehat{rH} , l'unico angolo α complementare dell'angolo \widehat{rt} .

In altre parole, posti v_r e n due vettori direzionali di r e t , rispettivamente,

$$\widehat{rH} := \pi/2 - \widehat{rt}$$

ove \widehat{rt} è l'unico angolo (tra 0 e $\pi/2$) tale che

$$\cos \widehat{rt} = \frac{|\langle v_r, n \rangle|}{\|v_r\| \|n\|}.$$

Si osservi che anche \widehat{rH} è un angolo acuto.

5.4 Distanze negli spazi affini euclidei

Grazie al prodotto scalare su V , è possibile definire anche una distanza in \mathbb{E} , rendendolo uno spazio metrico e, di conseguenza, uno spazio topologico.

Definizione 5.4.1. Sia \mathbb{E} uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario). Se $P, Q \in \mathbb{E}$, diciamo *distanza tra P e Q* il numero reale non negativo

$$d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Proposizione 5.4.2. Se $P, Q, R \in \mathbb{E}$ allora:

- i) $d(P, Q) \geq 0$ e vale $d(P, Q) = 0$ se e solo se $P = Q$;
- ii) $d(P, Q) = d(Q, P)$;
- iii) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$.

Dimostrazione. (i) e (ii) sono lasciate per esercizio, in quanto immediate. (iii) Per la Relazione di Chasles (SA2) si ha $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$, dunque

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}\| \leq \|\overrightarrow{RQ}\| + \|\overrightarrow{PR}\|,$$

per la proprietà triangolare della norma indotta da un prodotto scalare □

Più in generale, diamo la seguente nozione.

Definizione 5.4.3. Sia \mathbb{E} uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario). Se $X, Y \subseteq \mathbb{E}$ sono due sottoinsiemi non vuoti, diciamo *distanza tra X e Y* il numero reale non negativo

$$d(X, Y) := \inf \{d(P, Q) \mid P \in X, Q \in Y\}.$$

Si osservi che tale estremo inferiore esiste in quanto l'insieme su cui si calcola è costituito da numeri reali maggiori o uguali di zero.

Per i sottospazi euclidei vale il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione; ne vedremo un caso particolare.

Teorema 5.4.4. In uno spazio euclideo \mathbb{E} sullo spazio vettoriale euclideo V , si considerino due sottospazi euclidei $X \ni A$ e $Y \ni B$, dove $A, B \in \mathbb{E}$ e con $U, W \subseteq V$ le rispettive giaciture.

Allora esistono $P_0 \in X$ e $Q_0 \in Y$ tali che il vettore $Q_0 - P_0$ è ortogonale sia a U che a W e, per ogni $P \in X$ e $Q \in Y$, si ha $\|Q_0 - P_0\| \leq \|Q - P\|$. Pertanto $d(X, Y) = d(P_0, Q_0)$.

In quanto segue considereremo come ambiente lo spazio affine euclideo canonico $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ con un riferimento cartesiano (O, \mathcal{B}) .

In tale ambito, diamo la seguente nozione.

Definizione 5.4.5. Se $A, B \in \mathbb{E}^n$ diciamo *punto medio del segmento* \overline{AB} l'unico punto $M \in \overline{AB}$ tale che

$$d(A, M) = d(M, B).$$

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto la proiezione, su un sottospazio affine S di \mathbb{A}^n , parallela a un sottospazio vettoriale U di \mathbb{R}^n (complementare alla giacitura di S).

In uno spazio euclideo possiamo considerare la situazione particolare in cui U è l'ortogonale della giacitura di S e dare la seguente nozione.

Definizione 5.4.6. Sia $S \ni Q$ un sottospazio euclideo di \mathbb{E}^n , con giacitura $W \subset V$. Si dice *proiezione ortogonale su S* l'applicazione

$$p_W : \mathbb{E}^n \longrightarrow S \quad \text{data da} \quad P \mapsto T_P(U) \cap S$$

dove $U = W^\perp$.

Il punto $P_0 = T_P(W^\perp) \cap S$ si dice *proiezione ortogonale di P su S* .

Esempio 5.4.7. Si considerino il punto $P = (1, 2, 3) \in \mathbb{E}^3$ e il piano di equazione $H : x - y + 3z + 1 = 0$. Per determinare la proiezione ortogonale P_0 di P su H , calcoliamo anzitutto la giacitura W di H e il sottospazio W^\perp . Quest'ultimo è la retta vettoriale

$$W^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Per definizione $P_0 = T_P(W^\perp) \cap H$. Poiché $r : (x, y, z) = (1 + t, 2 - t, 3 + 3t)$, bisogna determinare t in modo che

$$(1 + t) - (2 - t) + 3(3 + 3t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -9/11.$$

Sostituendo nell'equazione parametrica di r si ottiene infine

$$P_0 = (1 - 9/11, 2 + 9/11, 3 - 27/11) = (2/11, 31/11, 6/11).$$

La nozione di proiezione ortogonale verrà ora utilizzata nel trovare dei metodi per determinare alcune distanze.

Il primo caso è quello di distanza di un punto da un sottospazio euclideo.

Proposizione 5.4.8. Siano S un sottospazio euclideo e $Q \in \mathbb{E}^n$. Allora, posta Q_0 la proiezione ortogonale di Q su S , si ha

$$d(Q, S) = d(Q, Q_0).$$

Dimostrazione. Basta provare che, comunque scelto un punto $P \in S$, si ha $d(Q, P) \geq d(Q, Q_0)$ o, equivalentemente, che

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 \geq \|\overrightarrow{Q_0Q}\|^2.$$

Se W è la giacitura di $S \ni P$, si ha $\overrightarrow{Q_0P} \in W$. D'altro canto, per definizione di proiezione ortogonale, $\overrightarrow{Q_0Q} \in W^\perp$. Per (SA2) si ha inoltre

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ_0} + \overrightarrow{Q_0Q}.$$

Quindi

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ_0}\|^2 + \|\overrightarrow{Q_0Q}\|^2 \geq \|\overrightarrow{Q_0Q}\|^2.$$

□

Proposizione 5.4.9. *Si fissi un riferimento cartesiano di \mathbb{E}^n e si considerino un punto $Q = (q_1, \dots, q_n)$ e un iperpiano $H : a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$. Allora*

$$d(Q, H) = \frac{|a_1q_1 + \dots + a_nq_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Dimostrazione. Si consideri un versore (cioè un vettore di norma 1) ortogonale a H , ad esempio

$$n := \frac{(a_1, \dots, a_n)}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Essendo anche $\overrightarrow{Q_0Q}$ ortogonale a H , si ha

$$|\langle \overrightarrow{Q_0Q}, n \rangle| = \|\overrightarrow{Q_0Q}\| = d(Q, Q_0) = d(Q, H),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla Proposizione precedente.

Per calcolare il suddetto prodotto scalare, basta scegliere un qualunque punto $P \in H$, applicare la Relazione di Chasles (SA2) e la bilinearità, ottenendo

$$\langle \overrightarrow{Q_0Q}, n \rangle = \langle \overrightarrow{PQ}, n \rangle + \langle \overrightarrow{Q_0P}, n \rangle.$$

Ma $\langle \overrightarrow{Q_0P}, n \rangle = 0$ in quanto $\overrightarrow{Q_0P}$ appartiene alla giacitura di H , che è $\text{Span}(n)^\perp$.

Pertanto

$$d(Q, H) = |\langle \overrightarrow{Q_0Q}, n \rangle| = |\langle \overrightarrow{PQ}, n \rangle|.$$

Denotando le coordinate di P con (y_1, \dots, y_n) e tenendo conto che $P \in H$, vale $a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = -b$. Quindi

$$d(Q, H) = \frac{|\langle (q_1 - y_1, \dots, q_n - y_n), (a_1, \dots, a_n) \rangle|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

da cui la tesi. □

Osservazione 5.4.10. Se S e T sono due sottospazi paralleli di \mathbb{E}^n e $S \cap T = \emptyset$ allora la loro distanza è non nulla. Vediamo come determinarla.

Sia $\dim(T) \leq \dim(S)$. Allora, scelto un qualunque punto $Q \in T$ e denotando con Q_0 la proiezione ortogonale di Q su S , si ha

$$d(T, S) = d(Q, S) = d(Q, Q_0).$$

Chiaramente, se $\dim(T) = \dim(S)$, i ruoli di S e T si possono scambiare.

Esempio 5.4.11. Si considerino la retta r e il piano π di \mathbb{E}^3 dati da

$$r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, 2), \quad \pi : x + 2y + 4 = 0.$$

Poiché le rispettive giaciture sono $W_r = \langle (2, -1, 2) \rangle$ e $W_\pi : x + 2y = 0$, si vede immediatamente che $W_r \subset W_\pi$ e dunque $r \parallel \pi$. Tenendo conto che $\dim(r) = 1 < 2 = \dim(\pi)$, per l'Osservazione dispar si ha che $d(r, \pi) = d(Q, \pi)$, dove Q è un qualunque punto di r . Ad esempio, si scelga $Q = (1, 0, 0)$ e si calcoli, per la Proposizione dishy,

$$d(Q, \pi) = \frac{|1 + 4|}{\sqrt{1 + 4}} = \sqrt{5}.$$

Esempio 5.4.12. Si considerino i due piani paralleli π_1 e π_2 di \mathbb{E}^3 dati da

$$\pi_1 : x + 2y - z + 4 = 0, \quad \pi_2 : x + 2y - z + 10 = 0.$$

Si ha

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(Q, \pi_2),$$

dove Q è un qualunque punto di π_1 . Ad esempio, si scelga $Q = (0, 0, 4)$ e si calcoli, ancora per la Proposizione dishy,

$$d(Q, \pi_2) = \frac{|-4 + 10|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{6}.$$

Esempio 5.4.13. Si considerino le due rette parallele r_1 e r_2 di \mathbb{E}^3 date da

$$r_1 : (x, y, z) = (3, -1, 1) + \lambda(2, -1, 2), \quad r_2 : (x, y, z) = (2, 1, 3) + \mu(2, -1, 2).$$

In questo caso si deve procedere diversamente dai due precedenti esempi. Osserviamo però che per l'Osservazione 5.4.10 abbiamo

$$d(r_1, r_2) = d(Q, Q_0),$$

dove $Q \in r_1$ e Q_0 è la proiezione ortogonale di Q su r_2 . Invece di scegliere un punto su r_1 , si noti che si può procedere ancora più rapidamente considerando un piano π ortogonale a entrambe le rette. Evidentemente π interseca ogni retta in un punto e questi due punti sono uno la proiezione ortogonale dell'altro sull'altra retta. Pertanto, posti $Q_1 := \pi \cap r_1$ e $Q_2 := \pi \cap r_2$, si ha

$$d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2),$$

Si scelga, ad esempio, $\pi : 2x - y + 2z = 0$. Con facili calcoli si vede che

$$Q_1 := \pi \cap r_1 = (1, 0, -1), \quad Q_2 := \pi \cap r_2 = (0, 2, 1).$$

Pertanto

$$d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2) = \|Q_1 - Q_2\| = \|(1, -2, -2)\| = 3.$$

Concludiamo questo paragrafo con la determinazione della distanza tra due rette sghembe dello spazio euclideo canonico \mathbb{E}^3 , assieme alle nozioni di *retta e segmento di minima distanza*.

Teorema 5.4.14. *Siano r e s due rette sghembe di \mathbb{E}^3 . Allora si ha:*

- i) *esiste un'unica coppia π_r e π_s di piani paralleli a entrambe le rette (e paralleli tra loro) tali che $r \subset \pi_r$ e $s \subset \pi_s$;*
- ii) *esiste un'unica retta t ortogonale e incidente r e s (detta retta di minima distanza);*
- iii) *posti $R := t \cap r$ e $S := t \cap s$, si ha*

$$d(r, s) = d(\pi_r, \pi_s) = d(R, S),$$

dove il segmento \overline{RS} è detto segmento di minima distanza tra r e s .

Dimostrazione. Siano r determinata da $A \in r$ e con giacitura $\text{Span}(v_r)$ e s da $B \in s$ e giacitura $\text{Span}(v_s)$.

i) I due piani cercati sono necessariamente i piani π_r e π_s determinati, ad esempio, da $A \in \pi_r$ e $B \in \pi_s$, ed entrambi di giacitura

$$W_{\pi_r} = W_{\pi_s} = \text{Span}(v_r, v_s).$$

Si noti che questi sono veramente due piani in quanto $\dim_{\mathbb{R}} \text{Span}(v_r, v_s) = 2$ poiché v_r e v_s non sono paralleli per ipotesi.

ii) Si consideri l'unica (a meno di multipli) direzione w ortogonale sia a r che a s (e quindi anche ortogonale a π_r e π_s), data da

$$\text{Span}(w) := \text{Span}(v_r, v_s)^\perp.$$

Denotiamo con ρ l'unico piano del fascio di piani \mathcal{F}_r di sostegno r che contiene w nella sua giacitura; e, analogamente, denotiamo con σ l'unico piano del fascio di piani \mathcal{F}_s di sostegno s che contiene w nella sua giacitura.

Si ha quindi

$$W_\rho = \text{Span}(v_r, w), \quad W_\sigma = \text{Span}(v_s, w).$$

Per costruzione $t := \rho \cap \sigma$ è una retta di giacitura $W_\rho \cap W_\sigma = \text{Span}(w)$, che risulta dunque ortogonale sia a r che a s .

Inoltre, t e r giacciono entrambe sul piano ρ e sono ortogonali, quindi non parallele; pertanto sono incidenti.

Analogamente t e s sono incidenti.

Per provare l'unicità di t , supponiamo che esista un'altra retta t' ortogonale e incidente r e s . Per quanto osservato all'inizio, c'è un'unica direzione w ortogonale a r e a s , dunque $t' \parallel t$. In particolare, t e t' sono complanari. Per questo, denotando con $R' := t' \cap r$ e $S' := t' \cap s$, si ha che i punti R, S, R', S' sono complanari. Il piano che li contiene, pertanto, deve contenere r (individuata da R e R') e analogamente s ; questo è un assurdo in quanto r e s sono sghembe per ipotesi.

iii) Si noti che

$$d(r, s) := \inf \{d(P, Q) \mid P \in r, Q \in s\} \geq d(\pi_r, \pi_s).$$

Se si prova che $d(\pi_r, \pi_s)$ è raggiunta dalla coppia di punti $R \in r$ e $S \in s$, allora si ha la tesi. Per fare questo, basta osservare che la retta t è ortogonale a π_r e π_s per (ii) e che

$$R = t \cap r = t \cap \pi_r, \quad S = t \cap s = t \cap \pi_s.$$

Dunque S è la proiezione ortogonale di R su π_s ; pertanto $d(\pi_r, \pi_s) = d(R, S)$. □

Capitolo 6

Isometrie

6.1 Isometrie e Matrici Ortogonali

Definizione 6.1.1. Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo. Una isometria di (V, g) è un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ tale che $\forall u, v \in V$, vale:

$$g(f(u), f(v)) = g(u, v).$$

Osservazione 6.1.2. Se $f : V \rightarrow V$ è una isometria e V ha dimensione finita, allora f è iniettiva. Infatti, se $v \in \ker(f)$, allora $f(v) = 0_V$, quindi $g(f(v), f(v)) = g(0_V, 0_V) = 0$. Sfruttando ora il fatto che f è una isometria abbiamo: $0 = g(f(v), f(v)) = g(v, v)$, quindi $v = 0_V$.

Infine, se $\dim V = n < \infty$, per il Teorema di Dimensione f è un automorfismo.

Proposizione 6.1.3. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita. Sia $f \in \text{End}(V)$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f è una isometria di (V, g) .
2. Per una base ortonormale $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di (V, g) , anche $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base ortonormale di (V, g) .
3. $\|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in V$.

Dimostrazione. • $(1 \Rightarrow 2)$ Se $f \in \text{End}(V)$ è una isometria, e $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di (V, g) , allora $g(f(v_i), f(v_j)) = g(v_i, v_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$. Quindi $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono tutti non nulli (perché hanno norma = 1) e sono a due a due ortogonali. Quindi $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti, perciò $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base ortonormale di (V, g) .

- (2 \Rightarrow 3) Fissiamo una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$ di (V, g) . Per ipotesi anche $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base ortonormale di (V, g) . Sia ora $v \in V$. Scriviamo v come combinazione lineare dei vettori v_1, \dots, v_n : $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Allora

$$f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n).$$

Siccome $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale,

$$\|v\|^2 = g(v, v) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2.$$

Siccome anche $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è ortonormale,

$$\|f(v)\|^2 = g(f(v), f(v)) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2.$$

Ne segue che $\|v\|^2 = \|f(v)\|^2$, da cui il risultato.

- (3 \Rightarrow 1) Siano $v, w \in V$. Dalla formula di polarizzazione si ha:

$$g(f(v), f(w)) = \frac{1}{2}g(f(v) + f(w), f(v) + f(w)) - g(f(v), f(v)) - g(f(w), f(w)).$$

Si ha quindi

$$= \frac{1}{2}\|f(v) + f(w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2.$$

Per ipotesi, $\|f(u)\|^2 = \|u\|^2, \forall u \in V$, quindi

$$\frac{1}{2}\|f(v + w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2 = \frac{1}{2}\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 = g(v, w),$$

nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato la formula di polarizzazione. Ne segue che $g(f(v), f(w)) = g(v, w), \forall v, w \in V$, quindi f è una isometria. □

Proposizione 6.1.4. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita, e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di (V, g) . Sia $f \in \text{End}(V)$.

Allora f è una isometria di (V, g) se e solo se

$${}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \mathbb{I}_n.$$

Dimostrazione. Dalla precedente proposizione segue che f è una isometria $\iff g(f(v_i), f(v_j)) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$. Per definizione di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, se indichiamo con a_{ij} il suo elemento di posto (i, j) , abbiamo:

$$f(v_\ell) = a_{1\ell} v_1 + \dots + a_{n\ell} v_n, \quad \forall \ell = 1, \dots, n.$$

Quindi f è una isometria $\iff \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$. Il risultato segue ora dal fatto che $\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}$ è l'elemento di posto (i, j) della matrice ${}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. □

Definizione 6.1.5. Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ è detta ortogonale, se vale la seguente uguaglianza:

$${}^t A \cdot A = \mathbb{I}_n.$$

L'insieme delle matrici $n \times n$ ortogonali si denota con $O(n)$.

Osservazione 6.1.6. 1. $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale $\iff A$ è invertibile ed $A^{-1} = {}^t A$.

2. Sia $A \in O(n)$, allora $\det(A) = \pm 1$. Infatti, dall'uguaglianza $\mathbb{I}_n = {}^t A \cdot A$, dal teorema di Binet, sfruttando il fatto che $\det({}^t A) = \det(A)$, si ha:

$$1 = \det(\mathbb{I}_n) = \det({}^t A \cdot A) = (\det(A))^2.$$

Corollario 6.1.7. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Allora $A \in O(n) \iff L_A$ è una isometria di $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$, dove \langle, \rangle è il prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. L'enunciato segue ricordando che la base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^n è ortonormale per \langle, \rangle , e si ha $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(L_A) = A$. \square

Proposizione 6.1.8. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita n . Sia \mathcal{B} una base ortonormale di (V, g) , e sia \mathcal{C} una base di V . Allora \mathcal{C} è ortonormale $\iff M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \in O(n)$.

Dimostrazione. Osserviamo che \mathcal{C} è ortonormale $\iff M_{\mathcal{C}}(g) = \mathbb{I}_n$, dove $M_{\mathcal{C}}(g)$ è la matrice che rappresenta il prodotto scalare g rispetto alla base \mathcal{C} . Quindi:

$$M_{\mathcal{C}}(g) = {}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}(g) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V).$$

Siccome \mathcal{B} è ortonormale, $M_{\mathcal{B}}(g) = \mathbb{I}_n$, quindi la precedente formula diventa:

$$M_{\mathcal{C}}(g) = {}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V),$$

da cui segue il risultato. \square

Corollario 6.1.9. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Allora $A \in O(n)$ se e solo se le colonne di A , $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ formano una base ortonormale di \mathbb{R}^n rispetto al prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n .

6.2 Caratterizzazione delle matrici di $O(2, \mathbb{R})$

Proposizione 6.2.1. Sia $A \in O(2, \mathbb{R})$. Allora:

- se $\det(A) = 1$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tale che

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

- se $\det(A) = -1$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tale che

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2, \mathbb{R})$. Allora, per definizione, A è ortogonale se e solo se

$$\mathbb{I}_2 = {}^t A \cdot A,$$

cioè se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Dalle equazioni $a^2 + c^2 = 1$ e $b^2 + d^2 = 1$, segue che i punti $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ appartengono alla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine in \mathbb{R}^2 .

In particolare esistono $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ tali che $a = \cos \phi, c = \sin \phi, b = \cos \psi$ e $d = \sin \psi$.

Inoltre, dalla equazione $ab + cd = 0$ deduciamo

$$0 = \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi = \sin(\theta + \varphi).$$

Di conseguenza, $\theta + \varphi$ deve essere $0 + 2k\pi$ o $\pi + 2k\pi$.

Nel primo caso si ottiene la matrice R_θ ; nel secondo caso si ottiene la matrice S_θ . \square

Vediamo ora che possiamo caratterizzare anche autovalori e autospazi delle matrici di $O(2, \mathbb{R})$.

Proposizione 6.2.2. Per una matrice $M \in O(2)$ ci sono le seguenti possibilità:

- se $M = R_\theta$, essa ha autovalori reali se e solo se $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$ se e solo se $R_\theta = \pm \mathbb{I}_2$.
- Se $M = S_\theta$, essa ha sempre autovalori reali e precisamente ± 1 . Inoltre i relativi autospazi V_1 e V_{-1} sono tra loro ortogonali.

Dimostrazione. *i)* Si consideri il polinomio caratteristico di R_θ dato da

$$P_\lambda(R_\theta) = \det(R_\theta - \lambda \mathbb{I}_2) = (\cos \theta - \lambda)^2 + (\sin \theta)^2 = \lambda^2 - 2(\cos \theta)\lambda + 1.$$

Esso ha radici reali se e solo se il suo discriminante $\Delta/4 = (\cos \theta)^2 - 1 \geq 0$. Ma tale condizione equivale a $(\cos \theta)^2 - 1 = 0$; questo si verifica se e solo se $\cos \theta = \pm 1$ ovvero se e solo se $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$. L'ultima affermazione è banale. *ii)* Si osservi anzitutto che S_θ , essendo una matrice 2×2 simmetrica reale, ha due autovalori reali e, se distinti, i suoi due autospazi sono ortogonali. Per calcolare tali autovalori, si consideri il polinomio caratteristico di S_θ dato da

$$P_\lambda(S_\theta) = \det(S_\theta - \lambda \mathbb{I}_2) = \lambda^2 - 1.$$

Esso è indipendente da θ e ha sempre come radici ± 1 . □

Osservazione 6.2.3. Per comprendere il significato geometrico di R_θ , basta considerare l'automorfismo di \mathbb{R}^2 ad essa associato:

$$L_{R_\theta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definito da

$$(x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Utilizzando le coordinate polari nel dominio e nel codominio, si ha una forma esplicita più significativa. Infatti

$$r(\cos \psi, \sin \psi) \mapsto (r \cos \psi \cos \theta - r \sin \psi \sin \theta, r \cos \psi \sin \theta + r \sin \psi \cos \theta)$$

e quest'ultima espressione è esattamente $r(\cos(\psi + \theta), \sin(\psi + \theta))$. Pertanto R_θ è associata alla rotazione antioraria di angolo θ .

Vediamo ora come anche le matrici S_θ abbiano una interpretazione geometrica, e precisamente in termini di simmetrie assiali. Vediamo prima questo concetto in generale.

Definizione 6.2.4. Sia H è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n ; possiamo scrivere ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$ in modo unico come $v = v_H + v_{H^\perp}$, dove $v_H \in H$ e $v_{H^\perp} \in H^\perp$.

Si dice *simmetria rispetto a H* l'applicazione

$$\text{sy}_H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{definita da} \quad v = v_H + v_{H^\perp} \mapsto v_H - v_{H^\perp}.$$

Proposizione 6.2.5. *Con le notazioni precedenti, l'applicazione sy_H è un automorfismo ortogonale di \mathbb{R}^n ed è diagonalizzabile.*

Inoltre, se H è un iperpiano, sy_H è ortogonale non speciale.

Dimostrazione. È facile verificare che sy_H è un'applicazione lineare. Sia $s := \dim(H)$. Se $s = 0$, la tesi segue banalmente. Sia dunque $s \geq 1$ e sia $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_s)$ una base ortonormale di H . Si consideri il suo completamento a una base ortonormale $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_s, \dots, v_n)$ di \mathbb{R}^n . La matrice associata alla simmetria, rispetto a \mathcal{B} , risulta

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{sy}_H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

dove sulla diagonale compare 1 per s volte e -1 per $n - s$ volte. Tale matrice è ortogonale.

Pertanto, per la Proposizione 6.1.4, l'endomorfismo sy_H è un automorfismo ortogonale.

Infine, se H è un iperpiano, allora $s = n - 1$ e dunque $\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{sy}_H)) = -1$, pertanto la matrice è ortogonale non speciale. \square

Esempio 6.2.6. Vediamo due esempi di matrici non speciali S_{θ} nei casi $\theta = 0$ e $\theta = \pi$:

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_{\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso, il corrispondente automorfismo ortogonale di \mathbb{R}^2 è dato da $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

Nel secondo caso, il corrispondente automorfismo ortogonale è dato da $(x, y) \mapsto (-x, y)$.

Le matrici S_0 e S_{π} sono associate, rispettivamente, alla simmetria rispetto a $\text{Span}(e_1)$ (asse x) e a quella rispetto a $\text{Span}(e_2)$ (asse y).

Vediamo ora che le matrici S_{θ} sono sempre associate a delle opportune simmetrie.

Proposizione 6.2.7. *Per ogni matrice del tipo S_{θ} , l'applicazione lineare associata $L_{S_{\theta}}$ è una simmetria rispetto al sottospazio $\text{sy}_{V_1} \subset \mathbb{R}^2$, dove V_1 è l'autospazio di S_{θ} associato all'autovalore 1.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_1^{\perp} = V_1 \oplus V_{-1}$. Quindi, per ogni $v \in \mathbb{R}^2$, si può scrivere $v = v_{V_1} + v_{V_{-1}}$. Da una parte, per definizione di autovettore, si ha $S_{\theta}(v_{V_1}) = v_{V_1}$ e $S_{\theta}(v_{V_{-1}}) = -v_{V_{-1}}$. Pertanto, per la linearità,

$$S_{\theta} \cdot v = v_{V_1} - v_{V_{-1}}.$$

D'altra parte, per definizione di simmetria rispetto a V_1 , si ha

$$\text{sy}_{V_1}(v) = v_{V_1} - v_{V_{-1}}.$$

\square

Osservazione 6.2.8. Determiniamo, in generale, l'autospazio V_1 di

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Una equazione cartesiana di V_1 è data da una riga del sistema lineare omogeneo

$$(S_\theta - \mathbb{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Se $\theta \neq 0$, una equazione è, ad esempio,

$$V_1 : (\cos \theta - 1)x + (\sin \theta)y = 0.$$

Possiamo, inoltre, determinare l'angolo acuto α tra V_1 e l'asse x data da $\text{Span}(e_1)$. Si ha:

$$\cos \alpha = \frac{\left| \left\langle \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right|}{\left\| \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \right\|} = \frac{|\sin \theta|}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)}}.$$

Infine, usando le formule di duplicazione $\sin \theta = 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2$ e $\cos \theta = \cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2$, si trova

$$\cos \alpha = |\cos \theta/2|,$$

quindi $\alpha = \theta/2$ se $0 < \theta \leq \pi$, e invece $\alpha = \pi - \theta/2$ se $\pi \leq \theta < 2\pi$.

Le seguenti semplici proprietà sono lasciate come esercizio (alcune di queste possono essere dimostrate utilizzando note formule trigonometriche).

Proposizione 6.2.9. *Comunque scelti θ e φ , valgono:*

- i) $S_\theta S_\varphi = R_{\theta-\varphi} \in SO(2)$;
- ii) $R_\theta R_\varphi = R_{\varphi+\theta} \in SO(2)$;
- iii) $R_\theta S_\varphi = S_{\varphi+\theta} \notin SO(2)$;
- iv) $S_\varphi R_\theta = S_{\varphi-\theta} \notin SO(2)$;
- v) $S_{2\theta} = R_\theta S_0 R_{-\theta}$.

In particolare, la composizione di una rotazione e di una simmetria non è commutativa.

Dalla ii) segue che $SO(2)$ è un gruppo abeliano (però $SO(n)$ non è abeliano per $n \geq 3$).

Diamo soltanto lo schema della dimostrazione del teorema, senza entrare in tutti i dettagli, che comunque non sono difficili.

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione su $n = \dim V$.

La base dell'induzione consiste nei casi $n = 1$ e $n = 2$. Se $n = 1$, una matrice ortogonale è uguale a (1) o a (-1) , quindi del tipo (6.3.1). Se $n = 2$, fissata una base ortonormale di V , f è rappresentata da una matrice del tipo R_α o S_α . Nel primo caso abbiamo uno dei blocchi 2×2 della (6.3.1), nel secondo caso la matrice è diagonalizzabile con autovalori $1, -1$; prendendo due versori v_1, v_2 nei relativi autospazi, otteniamo una base ortonormale rispetto a cui la matrice di f è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Per dimostrare il passo induttivo, avremo bisogno del seguente lemma.

Lemma 6.3.2. *Sia V un \mathbb{R} -spazio vettoriale di dimensione finita, e sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Allora esiste un sottospazio vettoriale $W \subset V$, con $\dim W = 1$ o $\dim W = 2$, tale che $f(W) \subset W$; un tale sottospazio è detto invariante rispetto a f .*

Idea della dimostrazione del Lemma. Se f ha un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$, sia v un suo autovettore: $f(v) = \lambda v$. Allora $W = \langle v \rangle$ ha dimensione 1 ed è invariante per f , perchè $f(cv) = cf(v) = c\lambda v \in W$.

Altrimenti, se f non ha autovalori reali, sia \mathcal{B} una base di V e sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, matrice reale $n \times n$. Passiamo quindi all'ambiente complesso, considerando l'applicazione lineare

$$L_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad z \rightarrow A \cdot z.$$

Ora, poichè siamo su \mathbb{C} , l'applicazione L_A ha almeno un autovalore (non reale) $\lambda \in \mathbb{C}$; infatti, λ è una radice complessa di $p_{L_A}(x) = p_A(x)$, polinomio a coefficienti reali perchè A è reale.

Si provano ora i seguenti fatti:

1. anche il numero complesso coniugato $\bar{\lambda}$ è radice di $p_A(x)$ ed è dunque autovalore di L_A ;
2. fissato v un autovettore di λ , allora il suo coniugato \bar{v} è un autovettore di $\bar{\lambda}$, e v, \bar{v} sono linearmente indipendenti;
3. i vettori $v + \bar{v}, i(v - \bar{v})$ sono reali, linearmente indipendenti e generano un sottospazio W' di \mathbb{R}^n invariante per $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ossia $L_A(W') \subset W'$;
4. consideriamo l'isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$; in questo isomorfismo W' corrisponde a un sottospazio W di V invariante per f , di dimensione 2.

Questo conclude la dimostrazione del Lemma. □

Torniamo a $f : V \rightarrow V$ isometria lineare, con $\dim V = n > 2$. Per il Lemma precedente esiste un sottospazio $W \subset V$ invariante per f di dimensione 1 o 2, ovvero tale che $f(W) \subset W$. Siccome f è un isomorfismo, $\dim W = \dim f(W)$, e perciò $f(W) = W$. Da ciò si dimostra che anche $f(W^\perp) = W^\perp$.

Ora possiamo considerare le restrizioni

$$f|_W : W \rightarrow W, \text{ e } f|_{W^\perp} : W^\perp \rightarrow W^\perp;$$

entrambi gli endomorfismi ristretti risultano delle isometrie. Possiamo quindi prendere due basi ortonormali \mathcal{B}_1 di W come nella base dell'induzione, e \mathcal{B}_2 di W^\perp come da ipotesi induttiva; essendo $V = W \oplus W^\perp$, l'unione di \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 è una base \mathcal{B} ortonormale di V , e $M_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice a blocchi della forma

$$\left(\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{B}_1}(f|_W) & 0 \\ \hline 0 & M_{\mathcal{B}_2}(f|_{W^\perp}) \end{array} \right)$$

come richiesto dal teorema. □

Corollario 6.3.3 (Corollario per le matrici ortogonali). *Se A è una matrice ortogonale, allora esiste una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}AS = {}^tSAS$ è della forma descritta dal Teorema 6.3.1.*

6.4 Isometrie lineari di \mathbb{R}^3

Applichiamo il teorema appena visto al caso $n = 3$.

In questo caso il polinomio caratteristico $p_f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ha grado 3, dunque può avere o 3 radici reali, o una radice reale e due radici complesse coniugate.

In ogni caso f ha almeno un autovalore reale λ_1 ; affermiamo che λ_1 è uguale a 1 o a -1 . Questo vale, in generale, per gli autovalori reali di isometrie lineari per il seguente risultato.

Lemma 6.4.1. *Sia $A \in O(n)$, e sia $\lambda \in Sp(A)$. Allora $\lambda = \pm 1$.*

Dimostrazione. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un autovettore di A relativo all'autovalore λ , quindi $v \neq 0$ e $A \cdot v = \lambda v$. Poiché $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una isometria, abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$\langle v, v \rangle = \langle A \cdot v, A \cdot v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle.$$

Siccome $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 \neq 0$, segue che $\lambda^2 = 1$, da cui il risultato. □

Torniamo al caso $n = 3$; sia v_1 un versore autovettore di λ_1 ; allora

$$W := \text{Span}(v_1)^\perp$$

ha dimensione 2 ed è invariante: $f(W) = W$. Presa una base ortonormale \mathcal{B}' di W formata da v_2, v_3 , la matrice di f rispetto a $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è del tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & A' & \end{pmatrix}$$

dove A' rappresenta $f|_W$ rispetto a \mathcal{B}' , dunque $A' \in O(2)$.

Ora distinguiamo i seguenti casi:

1. $\det(A) = 1, \lambda_1 = -1$: allora $\det(A') = -1$ e la forma normale è $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$:

rotazione di π intorno all'asse y ;

2. $\det(A) = 1, \lambda_1 = 1$: allora $\det(A') = 1$ e la forma normale è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$:

rotazione di α intorno all'asse x ;

3. $\det(A) = -1, \lambda_1 = 1$: allora $\det(A') = -1$ e la forma normale è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: riflessione

rispetto al piano xy che è fisso, ed è l'autospazio di autovalore 1;

4. $\det(A) = -1, \lambda_1 = -1$: allora $\det(A') = 1$ e la forma normale è $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Nei due casi in cui $\det(A) = 1$, abbiamo una rotazione intorno a un asse, in effetti il gruppo ortogonale speciale $SO(3)$ è detto anche gruppo delle rotazioni di \mathbb{R}^3 .

Capitolo 7

Isometrie degli spazi affini euclidei

Definizione 7.0.1. Si dice *isometria affine* dello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ una affinità f la cui parte lineare $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una isometria lineare. L'insieme delle isometrie di \mathbb{E}^n si denota con $\text{Iso}(\mathbb{E}^n)$.

Proposizione 7.0.2. L'insieme $\text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ è un gruppo rispetto alla composizione, ed è un sottogruppo di $\text{Aff}(\mathbb{E}^n)$.

Dimostrazione. Basta ricordare che le isometrie lineari di \mathbb{R}^n costituiscono un sottogruppo di $GL(n)$, che è infatti il gruppo ortogonale $O(n)$. \square

Si osservi che, in quanto affinità, una isometria $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ in un riferimento cartesiano (O, \mathcal{B}) ammette un'equazione matriciale del tipo

$${}^tY = M{}^tX + {}^tC,$$

con $M = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \in O(n, \mathbb{R})$, tX e tY colonne delle coordinate del generico punto $P \in \mathbb{E}^n$ e di $f(P) \in \mathbb{E}^n$, mentre tC rappresenta la colonna delle coordinate di $C = f(O)$.

Esempio 7.0.3. Un immediato esempio di isometria è dato dalle traslazioni.

Infatti, abbiamo osservato che un'affinità $f \in \text{Aff}(\mathbb{E}^n)$ di equazione $Y = MX + C$ è una traslazione se e solo se $M = \mathbb{I}_n$. In tal caso $f = t_v$, dove $v = \overrightarrow{Of(O)}$. Avendo $\mathbb{I}_n \in O(n)$, l'affermazione è verificata.

Le "proprietà euclidee", cioè quelle che vengono mantenute per isometria, sono le distanze e gli angoli.

Proposizione 7.0.4. Sia $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ . Allora, per ogni $P, Q \in \mathbb{E}^n$ vale

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q)).$$

Dimostrazione. Per definizione

$$d(P, Q)^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2$$

e, analogamente, tenendo conto che f è un'affinità di parte lineare φ ,

$$d(f(P), f(Q))^2 = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\|^2 = \|\varphi(\overrightarrow{PQ})\|^2.$$

Si conclude osservando che $\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\varphi(\overrightarrow{PQ})\|^2$ perché φ è un'isometria lineare. \square

Vediamo ora che le isometrie affini conservano gli angoli tra rette.

Proposizione 7.0.5. *Sia $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ . Allora, se r e s sono due rette di \mathbb{E}^n , si ha*

$$\widehat{r\hat{s}} = \widehat{f(r)f(s)}.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che l'angolo $\theta = \widehat{r\hat{s}}$ è individuato da

$$\cos \theta = \frac{|\langle v_r, v_s \rangle|}{\|v_r\| \|v_s\|}.$$

L'angolo $\theta' = \widehat{f(r)f(s)}$ è individuato da

$$\cos \theta' = \frac{|\langle \varphi(v_r), \varphi(v_s) \rangle|}{\|\varphi(v_r)\| \|\varphi(v_s)\|}.$$

Essendo φ un'isometria lineare, si ha

$$\langle \varphi(v_r), \varphi(v_s) \rangle = \langle v_r, v_s \rangle, \quad \|\varphi(v_r)\| = \|v_r\|, \quad \|\varphi(v_s)\| = \|v_s\|$$

e quindi $\cos \theta = \cos \theta'$. \square

Terminiamo con un risultato sui cambi di riferimenti cartesiani in \mathbb{E}^n .

Teorema 7.0.6. *Siano $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ e $\Sigma' = (O', \mathcal{B}')$ due riferimenti cartesiani di \mathbb{E}^n e siano (c_1, \dots, c_n) le coordinate del punto O nel riferimento Σ' .*

Se un punto $P \in \mathbb{E}^n$ ha coordinate (x_1, \dots, x_n) rispetto a Σ e coordinate (y_1, \dots, y_n) rispetto a Σ' , allora, posti

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_{\mathbb{R}^n})$$

si ha

$$Y = AX + C.$$

7.1 Classificazione delle isometrie del piano

Tenuto conto della Proposizione 6.2.1, abbiamo una prima suddivisione delle isometrie del piano.

Definizione 7.1.1. Sia $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^2)$ data dall'equazione, rispetto a un riferimento cartesiano (O, \mathcal{B}) ,

$$Y = MX + C, \quad M \in O(2).$$

Se $M = R_\theta \in SO(2)$, diremo che f è una *isometria diretta* o *rototraslazione*. Se invece $M = S_\theta$, diremo che f è una *isometria inversa*.

Vediamo alcuni casi particolari.

Esempio 7.1.2. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano $(O; v_1, \dots, v_n)$.

Se $C = O$, allora un'isometria affine di equazione $Y = MX$ può essere identificata con una rotazione di tipo R_θ o con una simmetria di tipo S_θ , a seconda che $M = R_\theta$ o $M = S_\theta$.

Definizione 7.1.3. Una *rotazione di angolo θ e di centro il punto P_0* è l'isometria

$$\rho_{\theta, P_0} := t_w \circ R_{\theta, O} \circ t_{-w}$$

dove $w = \overrightarrow{OP_0}$ e $R_{\theta, O}$ indica l'affinità che fissa l'origine O e con parte lineare R_θ .

Osservazione 7.1.4. Determiniamo la forma matriciale di ρ_{θ, P_0} . Ricordiamo che dato un vettore $v\overrightarrow{OP_0}$, si ha

$$t_v(P) = P + P_0, \quad t_{-v}(P) = P - P_0,$$

dove con $P + P_0$ intendiamo il punto di coordinate date dalla somma delle coordinate di P e di quelle di P_0 . Pertanto l'equazione di ρ_{θ, P_0} risulta

$$Y = P_0 + R_\theta(X - P_0)$$

o anche

$$Y = R_\theta X + (\mathbb{I}_2 - R_\theta)P_0.$$

Dunque ρ_{θ, P_0} è una rototraslazione.

Come vedremo nel Teorema di classificazione, le traslazioni e le rotazioni di dati angolo e centro sono le uniche isometrie dirette.

Definizione 7.1.5. Data una retta affine $r \subset \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$, la simmetria σ_r di asse r è

$$\sigma_r = t_w \circ S_\theta \circ t_{-w}$$

dove $w = \overrightarrow{OP_0}$, $P_0 \in r$ e S_θ è la matrice associata alla simmetria lineare con autospazio V_1 uguale alla giacitura W_r di r :

$$V_1 = W_r.$$

Osservazione 7.1.6. Data una simmetria assiale affine σ_r , la retta r risulta una retta di punti fissi, e una qualunque retta s ortogonale a r è invariante per σ_r , cioè

$$\sigma_r(s) = s.$$

Infatti, fissato un sistema di riferimento cartesiano $(O; v_1, \dots, v_n)$, un'equazione per σ_r è data da

$$\sigma_r(X) = S_\theta(X - P_0) + P_0.$$

Se r è data dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + l_1 t \\ x_2 = p_2 + l_2 t' \end{cases}$$

dove $P_0 = (p_1, p_2)$, il suo generico punto $Q = (q_1, q_2)$ verifica

$$\sigma_r(Q) = S_\theta(Q - P_0) + P_0 = t S_\theta \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} + P_0.$$

Essendo $W_r = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right) = V_1$, si ha

$$S_\theta \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix},$$

quindi $\sigma_r(Q) = Q$.

Inoltre, se $s \perp r$, la giacitura di s corrisponde all'autospazio V_{-1} corrispondente all'autovalore -1 di S_θ , quindi delle equazioni parametriche per s sono date da

$$\begin{cases} x_1 = q_1 - l_2 t \\ x_2 = q_2 + l_1 t' \end{cases}$$

dove $Q = (q_1, q_2) = r \cap s$ e per il generico punto $R = (r_1, r_2) \in s$ si ha

$$\sigma_r(R) = S_\theta(R - P_0) + P_0 = S_\theta(Q - P_0) + t S_\theta \cdot \begin{pmatrix} -l_2 \\ l_1 \end{pmatrix} + P_0 = S_\theta(Q - P_0) + t \begin{pmatrix} l_2 \\ -l_1 \end{pmatrix} + P_0.$$

Ricordiamo ora che $Q - P_0$ sono le coordinate del vettore $\overrightarrow{P_0Q} \in W_r = V_1$, quindi possiamo ancora scrivere

$$\sigma_r(R) = Q - P_0 + t \begin{pmatrix} l_2 \\ -l_1 \end{pmatrix} + P_0 = Q + t \begin{pmatrix} l_2 \\ -l_1 \end{pmatrix},$$

ed essendo

$$\begin{pmatrix} l_2 \\ -l_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_2 \\ l_1 \end{pmatrix},$$

vediamo che $\sigma_r(R) \in s$.

Osserviamo, infine che $d(R, Q) = d(\sigma_r(R), Q)$. Diciamo che $\sigma_r(R)$ è il punto simmetrico di R rispetto all'asse r .

Definizione 7.1.7. Sia $r \subset \mathbb{E}^2$ una retta e v un vettore parallelo a r ; si dice *glissoriflessione rispetto a r e v* l'isometria definita da

$$gl_{r,v} := t_v \circ \sigma_r.$$

Teorema 7.1.8. (Classificazione delle isometrie del piano euclideo) *Sia f un'isometria di \mathbb{E}^2 . Allora f è uno dei seguenti tipi:*

- Se f ha almeno un punto fisso, allora

$$f = \rho_{\theta, P_0}, \text{ uadoppure } f = \sigma_r.$$

Nel primo caso f ha esattamente un punto fisso, il centro di rotazione; nel secondo caso f ha una retta di punti fissi, l'asse r della simmetria.

- Se f non ha punti fissi, allora

$$f = t_v, \text{ uadoppure } f = gl_{r,v},$$

dove $v \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.

Dimostrazione. • Scriviamo f in coordinate

$$Y = MX + C, \tag{7.1.1}$$

e supponiamo che f abbia almeno un punto fisso P_0 :

$$P_0 = MP_0 + C.$$

Questa relazione implica che

$$C = (\mathbb{I}_2 - M)P_0.$$

Sostituendo in (7.1.1) otteniamo

$$Y = MX + (\mathbb{I}_2 - M)P_0,$$

ovvero

$$Y = M(X - P_0) + P_0. \quad (7.1.2)$$

Infine, essendo $M \in O(2, \mathbb{R})$, essa è del tipo $M = R_\theta$ oppure $M = S_\theta$, e l'espressione (7.1.2) rappresenta proprio ρ_{θ, P_0} , rispettivamente σ_r .

• Supponiamo ora che f non abbia punti fissi, cioè che l'equazione $X = MX + C$ non abbia soluzioni in $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$. Ciò equivale a dire che il sistema lineare

$$(\mathbb{I}_2 - M)X = C$$

non è compatibile. Dal Teorema di Rouché - Capelli questo accade se e solo se

$$\text{rg}(\mathbb{I}_2 - M) \neq \text{rg}(\mathbb{I}_2 - M \mid C).$$

Essendo la matrice completa $(\mathbb{I}_2 - M \mid C)$ di tipo 2×3 , abbiamo solo due possibilità:

1. $\text{rg}(\mathbb{I}_2 - M) = 0 < 1 = \text{rg}(\mathbb{I}_2 - M \mid C)$; questo equivale a dire che

$$M = \mathbb{I}_2, \text{ uad}C \neq (0, 0),$$

cioè f è una traslazione di un vettore non nullo;

2. $\text{rg}(\mathbb{I}_2 - M) = 1 < 2 = \text{rg}(\mathbb{I}_2 - M \mid C)$; questo implica che 1 è un autovalore di M e $\dim V_1 = \dim \ker(\mathbb{I}_2 - M) = 1$; per la classificazione delle isometrie lineari, vediamo che questo è possibile solo se $M = S_\theta$ per un θ opportuno. Inoltre, $\text{rg}(\mathbb{I}_2 - M \mid C)$ ci assicura che C non è combinazione lineare delle colonne di $\mathbb{I}_2 - S_\theta$; si può verificare facilmente che, geometricamente, ciò corrisponde al fatto che il vettore tC non appartiene a $V_1^\perp = V_{-1}$, dove V_1 e V_{-1} sono i due autospazi di S_θ .

Quindi, se scriviamo

$${}^tC = v_1 + v_{-1}, \text{ uad}v_1 \in V_1, \quad v_{-1} \in V_{-1},$$

abbiamo $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Inoltre, possiamo scrivere

$$Y = S_\theta X + v_1 + v_{-1} = S_\theta X + v_1 + 2\frac{v_{-1}}{2} = S_\theta(X - \frac{1}{2}v_{-1}) + \frac{1}{2}v_{-1} + v_1,$$

quindi f è del tipo

$$f = t_v \circ \sigma_r,$$

con r retta di giacitura $W_r = V_1$ e passante per il punto $\frac{1}{2}{}^tv_{-1}$, e $v = v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.

□

Infine, vediamo un risultato che ci mostra che le simmetrie sono delle trasformazioni che ci permettono di trovare tutte le isometrie affini.

Teorema 7.1.9. *Ogni isometria affine del piano è una composizione finita di simmetrie affini.*

Dimostrazione. Consideriamo dapprima le traslazioni t_v lungo un vettore non nullo v . Poniamo

$$c := \|v\|/2.$$

Siano r e s due rette ortogonali a v tali che $d(r, s) = c$ e siano σ_r e σ_s le riflessioni corrispondenti.

Vogliamo provare che

$$t_v = \sigma_s \circ \sigma_r \quad \text{oppure} \quad t_v = \sigma_r \circ \sigma_s.$$

Non è restrittivo scegliere un riferimento cartesiano tale che le due rette abbiano equazione

$$r : x = 0, \quad s : x = c.$$

Si osservi che, in tale riferimento, $v = (\pm 2c, 0)$ e le riflessioni sono

$$\sigma_r(x, y) = (-x, y), \quad \sigma_s(x, y) = (2c - x, y).$$

Dunque

$$\sigma_r(\sigma_s(x, y)) = \sigma_r(2c - x, y) = (x - 2c, y) = (x, y) + (-2c, 0)$$

e quindi $\sigma_r \circ \sigma_s$ è la traslazione lungo il vettore $(-2c, 0)$. Analogamente

$$\sigma_s(\sigma_r(x, y)) = \dots = (x, y) + (2c, 0)$$

e quindi $\sigma_s \circ \sigma_r$ è la traslazione lungo il vettore $(2c, 0)$. Questo conclude la dimostrazione.

Passiamo ora alle rotazioni del tipo ρ_{θ, P_0} . Ricordiamo che per la Proposizione 6.2.9 abbiamo

$$S_\alpha \cdot S_\beta = R_{\alpha-\beta};$$

in particolare, possiamo scrivere $R_\theta = S_\theta \cdot S_0$, da cui $\rho_{\theta, P_0} = t_w \circ R_\theta \circ t^{-w} = t_w \circ S_\theta \cdot S_0 \circ t^{-w}$, e si conclude perché abbiamo già dimostrato la tesi per le traslazioni.

Consideriamo, infine, le glissoriflessioni: sono del tipo $gl_{r,v} = t_v \circ \sigma_r$, dove r è una retta e v un vettore direzionale di r ; si conclude nuovamente perché abbiamo già dimostrato la tesi per le traslazioni. □

Come nel caso delle isometrie del piano, anche lo studio delle isometrie dello spazio euclideo si fonda sulla descrizione delle matrici ortogonali reali 3×3 .

Enunciamo, senza dimostrarlo, l'analogo risultato di classificazione delle isometrie affini in \mathbb{E}^3 (Eulero, 1776).

Teorema 7.1.10. (Classificazione delle isometrie dello spazio affine euclideo) Sia f un'isometria di \mathbb{E}^3 espressa, in un riferimento cartesiano ortogonale, da $Y = f(X)$ dove

$$Y = AX + C,$$

con $A \in O(3)$ e $C \in \mathbb{E}^3$. Allora f è uno dei seguenti tipi:

1. traslazione t_v (diretta, senza punti fissi);
2. riflessione ρ_π (inversa, con un piano fisso π che è l'asse della riflessione);
3. rotazione $\sigma_{r,\theta}$ (diretta, con una retta fissa r che è l'asse della rotazione di angolo θ);
4. glissoriflessione $gl_{\pi,v} = t_v \circ \rho_\pi$ (inversa senza punti fissi, con v vettore parallelo a π);
5. glissorotazione $t_v \circ \sigma_{r,\theta}$ (diretta senza punti fissi, con v vettore parallelo a r);
6. riflessione rotatoria $\rho_\pi \circ \sigma_{r,\theta}$ (inversa, con un punto fisso, con r retta ortogonale al piano π).

Capitolo 8

Geometria proiettiva

8.1 Motivazioni e considerazioni preliminari

La geometria proiettiva è la parte della geometria che modella i concetti intuitivi di prospettiva e orizzonte, e si può pensare come la geometria “vista da un occhio”.

Infatti, informalmente, può essere pensata come la geometria che nasce dal collocare il proprio occhio in un punto dello spazio, così che ogni linea che intersechi l’“occhio” appaia solo come un punto. Le grandezze degli oggetti non sono direttamente quantificabili (perché guardando il mondo con un occhio soltanto non abbiamo informazioni sulla profondità) e l’orizzonte è considerato parte integrante dello spazio.

L’origine della geometria proiettiva è legata all’artista e matematico francese, Girard Desargues (1591-1661), che cercava una via alternativa per il disegno in prospettiva, che generalizzasse l’uso dei punti di fuga e includesse il caso in cui questi sono infinitamente lontani. Egli inquadrò quindi la geometria euclidea all’interno di un sistema geometrico più generale.

Il passaggio dalla geometria analitica a quella proiettiva si effettuò sostituendo le usuali coordinate cartesiane (ad esempio del piano cartesiano) con delle nuove coordinate, dette coordinate omogenee. Tramite queste coordinate, lo spazio (ad esempio, il piano) si arricchì di alcuni “punti all’infinito”, che la geometria proiettiva considera punti a tutti gli effetti, indistinguibili dai punti “propri” (da cui il carattere omogeneo del nuovo spazio, in cui tutti i punti hanno lo stesso ruolo).

I matematici del XIX secolo si resero conto che in questo nuovo contesto “omogeneo” molti teoremi risultavano più semplici ed eleganti: questo grazie alla scomparsa di molti “casi eccezionali”, generati da configurazioni particolari (quali ad esempio quella di due rette parallele nel piano), proprie della geometria euclidea ma assenti nella proiettiva. In

particolare lo studio delle curve risultava semplificato nel contesto proiettivo: tramite l'utilizzo dell'algebra lineare vennero classificate le coniche, e matematici come Julius Plücker iniziarono a rappresentare le curve come punti di altri spazi proiettivi, generalmente più grandi.

I matematici che per primi introdussero la geometria proiettiva, tra cui Poncelet e Steiner, non intendevano inizialmente estendere la geometria analitica. Le tecniche di dimostrazione erano inizialmente sintetiche, cioè simili a quelle di Euclide, senza l'ausilio dell'algebra, e lo spazio proiettivo era introdotto su base assiomatica, con assiomi simili a quelli di Euclide.

Vedremo in questo capitolo una costruzione rigorosa degli spazi proiettivi, basata sull'Algebra Lineare. Prima di introdurre le definizioni in grande generalità, vediamo degli esempi semplici che possono aiutare la comprensione delle idee di base.

Esempio 8.1.1. Consideriamo due rette affini piane parallele, quindi con la stessa giacitura; siccome un'equazione cartesiana della giacitura di una retta piana è data dall'equazione omogenea associata, e siccome un'equazione cartesiana di una retta piana è determinata a meno di un fattore di proporzionalità, senza perdere in generalità, possiamo supporre che le due rette abbiano equazioni

$$\begin{aligned} r : \quad ax + by + c = 0, \quad W_r : \quad ax + by = 0 \\ s : \quad ax + by + c' = 0 \quad W_s : \quad ax + by = 0. \end{aligned}$$

Abbiamo

$$W_r = W_s = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right).$$

Vorremmo ampliare il piano affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ in modo che la direzione delle due rette $\text{Span} \left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right)$ corrispondesse a un nuovo punto, un "punto all'infinito", o un "punto sull'orizzonte".

Un possibile modo è dato dalla introduzione di una nuova variabile x_0 e di una modifica delle equazioni cartesiane delle due rette, e precisamente l'*omogeneizzazione* delle due equazioni:

$$\begin{aligned} r : \quad ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0, \\ s : \quad ax_1 + bx_2 + c'x_0 = 0. \end{aligned}$$

Chiameremo questa trasformazione omogeneizzazione, in quanto abbiamo trasformato i due polinomi lineari $ax + by + c$ e $ax + by + c'$ in due polinomi omogenei.

Osserviamo che una terna di numeri reali $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ con $\bar{x}_0 \neq 0$ soddisfa $a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 + c\bar{x}_0 = 0$ se e solo se

$$a \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} + b \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_0} + c = 0,$$

quindi se e solo se $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_0 \end{pmatrix} \in r$.

Analogamente, $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ con $\bar{x}_0 \neq 0$ soddisfa $a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 + c'\bar{x}_0 = 0$ se e solo se

$$a\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} + b\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_0} + c' = 0,$$

quindi se e solo se $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_0 \end{pmatrix} \in s$.

Possiamo quindi considerare una corrispondenza tra le terne $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ con $\bar{x}_0 \neq 0$ che verificano (??) e i punti di r ; questa corrispondenza non è iniettiva, in quanto due terne proporzionali danno luogo a uno stesso punto di r :

$$(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (\lambda\bar{x}_0, \lambda\bar{x}_1, \lambda\bar{x}_2), \quad \bar{x}_0 \neq 0, \lambda \neq 0 \iff \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_0 \end{pmatrix}.$$

Quando, invece, $\bar{x}_0 = 0$, le terne di numeri reali $(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ che soddisfano $a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 = 0$ sono del tipo

$$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, \lambda(-b), \lambda a),$$

cioè sono in biiezione con i vettori della giacitura $W_r = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right) = W_s$.

Queste considerazioni ci suggeriscono che, se vogliamo identificare una direzione con un punto in un opportuno spazio e vogliamo definire una retta ampliata in cui ci sia una biiezione tra i punti non corrispondenti al punto direzione e i punti di una retta affine, una scelta naturale consiste nel considerare *terne di numeri reali a meno di un fattore di proporzionalità*.

Il passo successivo è quello di capire se la relazione di proporzionalità tra vettori di \mathbb{R}^3 sia una relazione di equivalenza.

Osservazione 8.1.2. Consideriamo lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 e la relazione

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : w = \lambda v.$$

Vediamo subito che non si tratta di una relazione di equivalenza, in quanto manca la proprietà riflessiva; infatti, ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \not\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \nexists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se, invece, consideriamo la stessa relazione su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, si verifica facilmente che la relazione

$$v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}, \quad v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : w = \lambda v$$

è una relazione di equivalenza.

Le considerazioni appena viste motivano le seguenti definizioni generali, che possono essere introdotte in spazi vettoriali generali, su campi arbitrari.

8.2 Spazi proiettivi

Definizione 8.2.1. Sia V uno spazio vettoriale non nullo su un campo \mathbb{K} .

Nell'insieme $V \setminus \{0_V\}$ consideriamo la relazione:

$$v \sim v' \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : v = \lambda v'.$$

Si prova facilmente che \sim è una relazione d'equivalenza; le classi d'equivalenza sono le rette vettoriali di V private del vettore nullo.

Denoteremo l'insieme quoziente con

$$\mathbb{P}(V) := \frac{V \setminus \{0\}}{\sim}.$$

e con $\pi : V \setminus \{0_V\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ l'applicazione suriettiva, detta *proiezione canonica*, definita da

$$\pi(v) = [v].$$

L'insieme quoziente $\mathbb{P}(V)$ si dice *spazio proiettivo su V* .

Definizione 8.2.2. Se $\dim V = n \geq 1$, poniamo per definizione

$$\dim \mathbb{P}(V) := n - 1 = \dim V - 1.$$

Esempio 8.2.3. Se $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 1$ allora $\mathbb{P}(V)$ ha dimensione 0 e consiste di un solo punto.

Definizione 8.2.4. Se $V = \mathbb{K}^{n+1}$, denotiamo $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ con $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ che viene detto *n -spazio proiettivo standard*.

In particolare, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ è detta *retta proiettiva reale standard*, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ è detto *piano proiettivo reale standard*, ecc.

I punti di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ che sono del tipo $[{}^t(x_0, \dots, x_n)]$, con ${}^t(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{n+1}}\}$, vengono denotati semplicemente con $[x_0 : \dots : x_n]$.

Vediamo ora come possiamo associare delle coordinate o un punto di uno spazio proiettivo; l'idea è di fissare una base dello spazio vettoriale, e considerare le coordinate di un vettore che rappresenta la classe di proporzionalità. Con questa scelta, le coordinate di un punto non sono univocamente determinate, ma lo sono a meno di un fattore di proporzionalità.

Definizione 8.2.5. Un sistema di riferimento proiettivo in $\mathbb{P}(V)$ è la scelta di una base $\mathcal{B} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ dello spazio vettoriale V . In tal modo, per ogni $v \in V \setminus \{0_V\}$,

$$v = x_0v_0 + \dots + x_nv_n, \quad (x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0).$$

Diciamo dunque che gli $n + 1$ scalari x_0, \dots, x_n sono le *coordinate omogenee* del punto $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$ e scriviamo

$$P = (x_0 : \dots : x_n).$$

I punti

$$E_0 = [v_0], \dots, E_n = [v_n], \quad U = [v_0 + \dots + v_n]$$

si dicono, rispettivamente, punti fondamentali e punto unità del riferimento.

Osservazione 8.2.6. Le coordinate omogenee di un punto sono definite a meno di una costante non nulla di proporzionalità. Infatti, si considerino i vettori non nulli di V :

$$v = x_0v_0 + \dots + x_nv_n, \quad v' = \lambda v = \lambda x_0v_0 + \dots + \lambda x_nv_n, \quad \lambda \neq 0.$$

Osserviamo che se $v \sim v'$, cioè $[v] = [v']$ e quindi ne segue che

$$(x_0 : \dots : x_n) = (\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n).$$

Quindi uno stesso punto ha infinite $(n+1)$ -uple di coordinate omogenee, tutte proporzionali. Come conseguenza, due basi proporzionali di V individuano lo stesso riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ e dunque ogni punto ha le stesse coordinate omogenee in entrambi i riferimenti.

Dalla definizione di sistema di riferimento proiettivo si ha immediatamente il seguente risultato, che enunciamo per semplicità per gli spazi proiettivi standard.

Proposizione 8.2.7. Siano dati in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ due riferimenti proiettivi associati alle basi $\mathcal{B} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v'_0, v'_1, \dots, v'_n\}$ dello spazio vettoriale \mathbb{K}^{n+1} .

Sia $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ avente per coordinate omogenee $(x_0 : \dots : x_n)$ rispetto a \mathcal{B} e $(x'_0 : \dots : x'_n)$ rispetto a \mathcal{B}' . Si denotino le colonne di tali coordinate con

$$X := {}^t(x_0, \dots, x_n), \quad X' := {}^t(x'_0, \dots, x'_n) \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Se $A := M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ è la matrice di cambio di base avente sulle colonne le componenti dei vettori di \mathcal{B} rispetto a \mathcal{B}' allora si ha

$$X' = \lambda AX, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Esempio 8.2.8. Nella retta proiettiva $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ ci sono due punti fondamentali $E_0 = (1 : 0)$, $E_1 = (0 : 1)$ e il punto unità $U = (1 : 1)$.

Nel piano $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ con il riferimento proiettivo associato alla base canonica, i tre punti fondamentali sono $E_0 = (1 : 0 : 0)$, $E_1 = (0 : 1 : 0)$, $E_2 = (0 : 0 : 1)$ e il punto unità $U = (1 : 1 : 1)$.

Nello spazio proiettivo \mathbb{P}^3 i punti fondamentali sono quattro e precisamente $E_0 = (1 : 0 : 0 : 0)$, $E_1 = (0 : 1 : 0 : 0)$, $E_2 = (0 : 0 : 1 : 0)$, $E_3 = (0 : 0 : 0 : 1)$, mentre il punto unità è $U = (1 : 1 : 1 : 1)$.

8.3 Sottospazi proiettivi

La definizione di sottospazio proiettivo è associata a quella di sottospazio vettoriale.

Definizione 8.3.1. Se W è un sottospazio non nullo di V , diciamo che $\pi(W \setminus \{0_V\})$ è un *sottospazio proiettivo* di $\mathbb{P}(V)$ e lo denoteremo con $\mathbb{P}(W)$.

Diremo *dimensione* di $\mathbb{P}(W)$ il numero non negativo

$$\dim \mathbb{P}(W) := \dim_{\mathbb{K}} W - 1$$

e *codimensione* di $\mathbb{P}(W)$ in $\mathbb{P}(V)$ il numero non negativo

$$\text{codim } \mathbb{P}(W) := \dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W).$$

In particolare, si dicono *iperpiani* i sottospazi proiettivi di codimensione 1, *rette* quelli di dimensione 1, *piani* quelli di dimensione 2.

Vediamo ora che, analogamente al caso di intersezioni di sottospazi vettoriali e di sottospazi affini, l'intersezione di sottospazi proiettivi, se non vuota, è ancora un sottospazio proiettivo.

Proposizione 8.3.2. Se U e W sono sottospazi vettoriali di V e se $\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) \neq \emptyset$, allora

$$\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(U \cap W).$$

Dimostrazione. Immediata, dalla costruzione dello spazio proiettivo. □

Osservazione 8.3.3. Osserviamo che

$$\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \emptyset \iff U \cap W = \{0_V\}.$$

Infatti si ha

$$\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) \neq \emptyset \iff \exists [v] \in \mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(U \cap W) \iff \exists v \in U \cap W, v \neq 0_V \iff \dim U \cap W \geq 1.$$

Di conseguenza $\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \emptyset \iff \dim(U \cap W) = 0$.

Vediamo ora una versione proiettiva della Formula di Grassmann. Ricordiamo prima la relazione di Grassmann per sottospazi vettoriali.

Teorema 8.3.4. *Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale e U, W suoi sottospazi vettoriali. Allora*

$$\dim_{\mathbb{K}}(U + W) = \dim_{\mathbb{K}}(U) + \dim_{\mathbb{K}}(W) - \dim_{\mathbb{K}}(U \cap W).$$

Da tale relazione si deduce l'analogo risultato per sottospazi proiettivi.

Teorema 8.3.5. *Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e $\mathbb{P}(U), \mathbb{P}(W)$ suoi sottospazi proiettivi. Allora si ha*

$$\dim \mathbb{P}(U + W) = \dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) - \dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)).$$

Dimostrazione. Basta osservare che $\dim \mathbb{P}(U + W) = \dim_{\mathbb{K}}(U + W) - 1$, $\dim \mathbb{P}(U) = \dim_{\mathbb{K}}(U) - 1$, $\dim \mathbb{P}(W) = \dim_{\mathbb{K}}(W) - 1$ e, infine, che

$$\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) = \dim(\mathbb{P}(U \cap W)) = \dim_{\mathbb{K}}(U \cap W) - 1,$$

e applicare la Formula di Grassmann vettoriale. Osserviamo che la formula ha senso anche quando $\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \emptyset$, a patto di porre, per convenzione,

$$\dim \emptyset := -1.$$

□

Se l'intersezione di sottospazi proiettivi è ancora un sottospazio proiettivo, questo non è vero per l'unione. La nozione corrispondente è la seguente.

Definizione 8.3.6. Sia X un qualunque sottoinsieme non vuoto (finito o infinito) di $\mathbb{P}(V)$. L'insieme

$$L(X) := \bigcap_{\mathbb{P}(W) \supseteq X} \mathbb{P}(W)$$

si dice *sottospazio proiettivo generato da X* .

Esercizio Provare che $\mathbb{P}(U + W) = L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W))$.

Osservazione 8.3.7. Se $n = \dim \mathbb{P}(V)$, si ha $\dim L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W)) \leq n$. Pertanto la relazione precedente implica

$$\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) \geq \dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) - n.$$

In particolare, se $\dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) \geq n$ allora necessariamente

$$\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) \geq 0,$$

dunque i due sottospazi proiettivi sono incidenti.

Dall'Osservazione precedente discendono alcuni importanti fatti sulla posizione reciproca di sottospazi proiettivi.

Esempio 8.3.8. Consideriamo due rette r e s in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$. Per quanto visto

$$\dim r + \dim s = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim(r \cap s) \geq 0.$$

Pertanto due rette distinte del piano proiettivo sono sempre incidenti.

Analoga considerazione vale per due piani π e σ in \mathbb{P}^3 e precisamente

$$\dim(\pi \cap \sigma) \geq \dim \pi + \dim \sigma - \dim \mathbb{P}^3 = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Pertanto due piani distinti nello spazio proiettivo sono sempre incidenti in una retta proiettiva.

Infine, se r è una retta e π è un piano in \mathbb{P}^3 , applicando ancora l'Osservazione precedente si ha

$$\dim(\pi \cap r) \geq \dim \pi + \dim r - \dim \mathbb{P}^3 = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Chiaramente $\dim(\pi \cap r)$ può essere solo 0 o 1. Nel primo caso la retta e il piano si intersecano in un solo punto; nel secondo $r \subset \pi$.

Un'importante fatto è che non esiste la nozione di parallelismo tra sottospazi proiettivi. Dunque due sottospazi proiettivi possono essere soltanto incidenti o non incidenti. Si tratterà, di volta in volta, di studiare la loro eventuale intersezione.

Riprendiamo ora il concetto di sottospazio proiettivo generato da un sottoinsieme.

Corollario 8.3.9. Siano $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{P}(V)$ punti distinti, dove $P_i = [v_i]$ e $v_i \in V$, per $i = 1, \dots, s$. Allora

$$L(P_1, \dots, P_s) = \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_s \rangle).$$

In particolare, $\dim L(P_1, \dots, P_s) \leq s - 1$.

Dimostrazione. Per definizione $L(P_1, \dots, P_s)$ è l'intersezione di tutti i sottospazi proiettivi $\mathbb{P}(W)$ contenenti i punti P_1, \dots, P_s :

$$L(P_1, \dots, P_s) = \bigcap_{\mathbb{P}(W) \ni P_1, \dots, P_s} \mathbb{P}(W).$$

Chiaramente $\mathbb{P}(W) \ni P_1, \dots, P_s$ se e solo se $W \ni v_1, \dots, v_s$; quindi

$$L(P_1, \dots, P_s) = \bigcap_{W \ni v_1, \dots, v_s} \mathbb{P}(W) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{W \ni v_1, \dots, v_s} W \right) = \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_s \rangle)$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla Proposizione intopr e l'ultima dalla definizione di sottospazio vettoriale generato da certi vettori. \square

Con le notazioni del Corollario precedente, $\dim L(P_1, \dots, P_s) = s - 1$ se e solo se v_1, \dots, v_s sono vettori linearmente indipendenti.

Definizione 8.3.10. I punti $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{P}(V)$ si dicono (*proiettivamente*) *indipendenti* se

$$\dim L(P_1, \dots, P_s) = s - 1.$$

E' chiaro che il massimo numero di punti indipendenti in \mathbb{P}^n è $n + 1$. Tuttavia si può richiedere un simile requisito di "indipendenza" a un numero maggiore di punti. Per questo diamo la seguente nozione.

Definizione 8.3.11. Se $\dim \mathbb{P}(V) = n$, diciamo che i punti $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{P}(V)$ sono in *posizione generale* in uno dei seguenti casi:

- se $s \leq n + 1$ e P_1, \dots, P_s sono proiettivamente indipendenti;
- se $s > n + 1$ e P_1, \dots, P_s sono a $n + 1$ a $n + 1$ indipendenti (cioè ogni loro sottoinsieme di $n + 1$ punti è costituito da punti indipendenti).

Esempio 8.3.12. In \mathbb{P}^2 consideriamo s punti distinti. Se $s = 2$, allora i punti sono indipendenti e quindi in posizione generale. Se $s = 3$, allora P_1, P_2, P_3 sono indipendenti se $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 2$, dunque se e solo se i tre punti non appartengono a una stessa retta (in tal caso, infatti, sarebbe $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 1$:). Anche in questo caso, indipendenti equivale a essere in posizione generale. Se $s = 4$, allora P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale se mai tre di essi sono dipendenti, cioè mai tre di essi sono allineati. La stessa condizione caratterizza gli insiemi di s punti in posizione generale, con $s \geq 4$.

Esempio 8.3.13. In \mathbb{P}^n gli $n + 2$ punti E_0, \dots, E_n, U sono in posizione generale. Per verificarlo, consideriamo tutti i loro sottoinsiemi di $n + 1$ elementi. I punti E_0, \dots, E_n sono proiettivamente indipendenti, in quanto

$$\dim L(E_0, E_1, \dots, E_n) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Span}(e_0, e_1, \dots, e_n) - 1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{n+1} - 1 = n.$$

Gli altri sottoinsiemi sono costituiti da U e da n tra gli E_i . Ad esempio, calcoliamo

$$\dim L(U, E_1, \dots, E_n) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Span}(u, e_1, \dots, e_n) - 1.$$

Si vede facilmente che i vettori $u, e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ sono linearmente indipendenti, ad esempio scrivendo le loro $n + 1$ componenti in una matrice e osservando che essa ha determinante non nullo. Pertanto anch'essi generano tutto \mathbb{K}^{n+1} e quindi si ha quanto affermato.

Questo esempio è, in qualche senso, generalizzato dal seguente risultato.

Teorema 8.3.14. *Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n e siano $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ punti in posizione generale. Allora esiste un unico riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ nel quale P_0, \dots, P_n sono i punti fondamentali e P_{n+1} è il punto unità.*

Dimostrazione. Siano $P_i = [v_i]$ per $i = 0, 1, \dots, n+1$, per opportuni $v_0, v_1, \dots, v_{n+1} \in V$. Per ipotesi P_0, \dots, P_n sono punti proiettivamente indipendenti, quindi i vettori v_0, \dots, v_n sono linearmente indipendenti e dunque una base di V . Di conseguenza esistono $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Si osservi che tutti i λ_i sono non nulli. Infatti, se uno di essi fosse nullo, e.g. $\lambda_0 = 0$, si avrebbe $v_{n+1} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ e quindi v_1, \dots, v_{n+1} sarebbero linearmente dipendenti. Di conseguenza, i punti P_1, \dots, P_{n+1} sarebbero proiettivamente dipendenti, contro l'ipotesi sulla posizione generale. Sia $\mathcal{B} = (\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_n v_n)$: per quanto appena osservato, \mathcal{B} è una base di V e dunque un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. In tale riferimento i punti dati hanno coordinate

$$\begin{aligned} P_0 = [v_0] &= [\lambda_0 v_0] = (1 : 0 : \dots : 0) \\ &\vdots \\ P_n = [v_n] &= [\lambda_n v_n] = (0 : 0 : \dots : 1) \end{aligned} \quad .$$

$$P_{n+1} = [v_{n+1}] = [\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n] = (1 : 1 : \dots : 1)$$

Pertanto, in tale riferimento, i punti dati sono, rispettivamente, i punti fondamentali e il punto unità. \square

8.4 Equazioni cartesiane per sottospazi proiettivi

Un iperpiano proiettivo $\mathbb{P}(W)$ nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ corrisponde a un iperpiano vettoriale $W \subset V$. Come abbiamo visto nell'ambito della Geometria affine, fissata una base di V , l'iperpiano W ha una equazione cartesiana del tipo

$$W : a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$$

dove $a_i \in \mathbb{K}$ per ogni i .

È naturale chiedersi se tale equazione definisca anche $\mathbb{P}(W)$, una volta fissato un riferimento proiettivo. La risposta è affermativa.

Infatti, un punto $P = (\bar{x}_0 : \dots : \bar{x}_n) \in \mathbb{P}(W)$ se e solo se $(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n) \in W$ se e solo se $a_0 \bar{x}_0 + \dots + a_n \bar{x}_n = 0$.

Si osservi infine che tale verifica non dipende dalla scelta delle coordinate omogenee di P . Infatti, $P = (\bar{x}_0 : \cdots : \bar{x}_n) = (\lambda\bar{x}_0 : \cdots : \lambda\bar{x}_n)$ per ogni $\lambda \neq 0$ e si ha

$$a_0\bar{x}_0 + \cdots + a_n\bar{x}_n = 0 \iff \lambda a_0\bar{x}_0 + \cdots + \lambda a_n\bar{x}_n = 0.$$

Possiamo dunque dire che

$$\mathbb{P}(W) : a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0$$

è una *equazione cartesiana* dell'iperpiano $\mathbb{P}(W)$.

Esempio 8.4.1. Un iperpiano in \mathbb{P}^2 è una retta e dunque ha equazione

$$r : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0.$$

Un iperpiano in \mathbb{P}^3 è un piano e dunque ha equazione

$$\pi : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

In \mathbb{P}^n si dicono *iperpiani coordinati* quelli le cui equazioni, in un fissato riferimento proiettivo, sono le seguenti:

$$H_0 : x_0 = 0, \quad H_1 : x_1 = 0, \quad \dots, \quad H_n : x_n = 0.$$

È chiaro che ogni iperpiano coordinato H_i contiene tutti i punti fondamentali eccetto E_i e U non appartiene a nessuno degli iperpiani coordinati.

Quanto visto per l'equazione cartesiana di un iperpiano si generalizza a un sottospazio di qualunque dimensione.

Definizione 8.4.2. Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n in cui si è fissato un riferimento proiettivo e siano $(x_0 : \cdots : x_n)$ le sue coordinate omogenee.

Se $\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo, posta s la sua codimensione, delle *equazioni cartesiane* per $\mathbb{P}(W)$ sono costituite da un sistema lineare omogeneo che determina $W \subset V$, cioè del tipo

$$\mathbb{P}(W) : AX = 0$$

dove $A \in \mathbb{K}^{s,n+1}$, $\text{rk}(A) = s$ e $X = {}^t(x_0, \dots, x_n)$.

Esplicitamente:

$$\mathbb{P}(W) : \begin{cases} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{s-1\ 0}x_0 + a_{s-1\ 1}x_1 + \cdots + a_{s-1\ n}x_n & = 0 \end{cases}$$

Esempio 8.4.3. L'equazione cartesiana di una retta in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ è, ad esempio,

$$r : \begin{cases} 3x_0 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 - x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}.$$

Quella di un piano in \mathbb{P}^4 è, ad esempio,

$$\pi : \begin{cases} 3x_0 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_0 - x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Quella di una retta in \mathbb{P}^4 è, ad esempio,

$$s : \begin{cases} 3x_0 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_0 - x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 0 \\ 2x_0 + x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ricordando la nozione di sottospazio proiettivo $L(X)$ generato da un insieme X , se in particolare $X = \{P_1, \dots, P_s\}$ è costituito da un numero finito di punti, allora

$$L(P_1, \dots, P_s) := \bigcap_{\mathbb{P}(W) \ni P_1, \dots, P_s} \mathbb{P}(W).$$

8.5 Equazioni parametriche per sottospazi proiettivi

Esprimere un sottospazio proiettivo come generato da un insieme di punti indipendenti fornisce una ulteriore descrizione.

Sia $S = \mathbb{P}(W)$ un qualunque sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, dove $\dim_{\mathbb{K}} V = n + 1$ e W è un sottospazio vettoriale di V .

Posta $\dim_{\mathbb{K}} W = k + 1$, con $k \leq n$, possiamo scrivere

$$W = \text{Span}(w_0, \dots, w_k),$$

per opportuni vettori linearmente indipendenti $w_0, \dots, w_k \in V$.

Infine, ponendo $P_i = [w_i]$, per $i = 0, \dots, k$, si ha

$$S = \mathbb{P}(W) = L(P_0, \dots, P_k)$$

Pertanto

$$Q \in S \iff Q = [v], v \in W \setminus \{0_V\} \iff Q = [\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_k w_k] \quad (8.5.1)$$

con $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ non tutti nulli.

Si fissi ora una base $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ di V e di conseguenza un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. Esprimendo i vettori w_0, \dots, w_k nella base \mathcal{B} si individuano $(k+1) \times (n+1)$ scalari (a_{ij}) :

$$\begin{cases} w_0 = a_{00}v_0 + \dots + a_{0n}v_n \\ \vdots \\ w_k = a_{k0}v_0 + \dots + a_{kn}v_n \end{cases}.$$

Moltiplicando ogni equazione per lo scalare λ_i corrispondente si ha

$$\begin{cases} \lambda_0 w_0 = \lambda_0 a_{00}v_0 + \dots + \lambda_0 a_{0n}v_n \\ \vdots \\ \lambda_k w_k = \lambda_k a_{k0}v_0 + \dots + \lambda_k a_{kn}v_n \end{cases}.$$

A questo punto, possiamo esprimere esplicitamente le coordinate omogenee del punto $[\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_k w_k]$ e, per comodità grafica, le scriviamo in verticale:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 a_{00} + \dots + \lambda_k a_{k0} \\ \vdots \\ \lambda_0 a_{0n} + \dots + \lambda_k a_{kn} \end{bmatrix}.$$

Se Q è il generico punto di $\mathbb{P}(V)$ di coordinate omogenee $Q = (x_0 : \dots : x_n)$, l'equivalenza (8.5.1) diventa

$$Q \in S \iff \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 a_{00} + \dots + \lambda_k a_{k0} \\ \vdots \\ \lambda_0 a_{0n} + \dots + \lambda_k a_{kn} \end{bmatrix}.$$

Questa uguaglianza tra coordinate omogenee significa l'uguaglianza delle componenti *a meno di un fattore di proporzionalità*. Tuttavia, convenzionalmente, si omette questa costante non nulla nella scrittura che esprime le coordinate omogenee del generico punto Q di S .

Infine si osservi che le componenti di w_i sulla base \mathcal{B} sono, per definizione, le coordinate omogenee del punto P_i , per ogni $i = 0, \dots, k$.

Abbiamo pertanto provato il seguente risultato.

Proposizione 8.5.1. *Sia $S = L(P_0, \dots, P_k) \subseteq \mathbb{P}(V)$ il sottospazio proiettivo generato dai punti proiettivamente indipendenti P_0, \dots, P_k aventi coordinate omogenee, in un fissato riferimento proiettivo,*

$$P_0 = [a_{00} : \dots : a_{0n}], \quad \dots, \quad P_k = [a_{k0} : \dots : a_{kn}].$$

Osservazione 8.6.3. Si noti che la scrittura $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ si sarebbe potuta usare anche nel caso di fasci di rette affini, in quanto l'equazione cartesiana di una retta piana è determinata a meno di un fattore di proporzionalità. Non si era utilizzata in quel contesto solo perché non si erano ancora introdotti gli spazi proiettivi.

Osservazione 8.6.4. La scrittura $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ ha un evidente vantaggio: permette di stabilire chiaramente una corrispondenza biunivoca tra le rette di Φ_P e i punti di \mathbb{P}^1 .

Infatti si verifica facilmente che, posta $r_{\lambda,\mu}$ la retta di Φ_P di equazione $\lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) = 0$, l'applicazione

$$\Phi_P \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad r_{\lambda,\mu} \mapsto (\lambda : \mu)$$

è ben definita e biunivoca.

Esempio 8.6.5. Determiniamo il fascio di rette Φ_P dove $P = (1 : 2 : 3) \in \mathbb{P}^2$. Per fare questo, basta determinarne due generatrici. Ad esempio,

$$r : 3x_0 - x_2 = 0, \quad s : 3x_1 - 2x_2 = 0.$$

Dunque

$$\Phi_P : \lambda(3x_0 - x_2) + \mu(3x_1 - 2x_2) = 0, \quad (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1.$$

Passiamo ora ai fasci di piani proiettivi in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$.

Definizione 8.6.6. In \mathbb{P}^3 con coordinate $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, si considerino la retta r e due piani distinti $\pi : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ e $\sigma : b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ contenenti r . Allora il fascio di piani di sostegno r è l'insieme di piani di equazione

$$\mathcal{F}_r : \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0$$

al variare di $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$.

Proposizione 8.6.7. Data una retta $r \subset \mathbb{P}^3$ il fascio di piani di sostegno r coincide con l'insieme di tutti e soli i piani dello spazio contenenti r .

Posto $\pi_{\lambda,\mu}$ il generico piano del precedente fascio, si ha che l'applicazione

$$\mathcal{F}_r \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{data} \quad \pi_{\lambda,\mu} \mapsto (\lambda : \mu)$$

è ben definita e biunivoca.

Esempio 8.6.8. Determinare tutti i piani di \mathbb{P}^3 passanti per i punti $A = (1 : 2 : 3 : 4)$ e $B = (-1 : 5 : 7 : 0)$. Chiaramente i piani richiesti sono tutti e soli quelli del fascio \mathcal{F}_r di sostegno la retta r passante per A e B . Tale retta è

$$r : \begin{cases} x_0 + 10x_1 - 7x_2 = 0 \\ 20x_0 + 4x_1 - 7x_3 = 0 \end{cases}.$$

Quindi

$$\mathcal{F}_r : \lambda(x_0 + 10x_1 - 7x_2) + \mu(20x_0 + 4x_1 - 7x_3) = 0.$$

Si osservi che abbiamo dato un'unica nozione di fascio (sia di rette che di piani) senza distinguere tra "propri" e "impropri". La ragione sarà chiara nel prossimo paragrafo.

Quanto visto si può generalizzare in uno spazio proiettivo di dimensione qualunque, osservando che il *luogo base* (cioè l'insieme dei punti comuni a tutti i sottospazi del fascio) è un punto, nel caso delle rette di \mathbb{P}^2 , e una retta, nel caso dei piani di \mathbb{P}^3 . In entrambe le situazioni si tratta di un sottospazio proiettivo di codimensione 2.

Definizione 8.6.9. Nello spazio proiettivo \mathbb{P}^n , si consideri un sottospazio proiettivo di dimensione $n - 2$ di equazioni cartesiane

$$L : \begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ b_0x_0 + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0 \end{cases}.$$

Allora il fascio di iperpiani di sostegno L è l'insieme di iperpiani di equazioni

$$\mathcal{F}_L : \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n) = 0$$

al variare di $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$.

Proposizione 8.6.10. Sia $L \subset \mathbb{P}^n$ un sottospazio proiettivo di dimensione $n - 2$. Allora il fascio di iperpiani di sostegno L è costituito da tutti e soli gli iperpiani di \mathbb{P}^n contenenti L .

Esempio 8.6.11. Determinare tutti e soli gli iperpiani di \mathbb{P}^4 contenenti il sottospazio proiettivo $L = \mathbb{P}(W)$, dove W è il seguente sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 :

$$W = \text{Span}({}^t(1, 0, 1, 0, 1), {}^t(0, 0, 0, 0, 1), {}^t(1, 2, 0, 0, 0)).$$

Si verifica facilmente che $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$.

Di conseguenza, $\dim L = 2$, pertanto gli iperpiani richiesti costituiscono il fascio \mathcal{F}_L di iperpiani di \mathbb{P}^4 avente per sostegno L .

Troviamo le equazioni cartesiane di L imponendo che il vettore $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ sia combinazione lineare dei generatori di W , ovvero che

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Per il *Teorema dei minori orlati*, basta orlare un minore non degenere 3×3 , ad esempio quello costituito dalle colonne 1 – 3 – 5 (intersecate con le righe 2-3-4): i minori *orlati* saranno dunque costituiti, rispettivamente, dalle colonne 1–2–3–5 e 1–3–4–5. I loro determinanti sono:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2x_0 - x_1 - 2x_2 \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x_3.$$

Quindi

$$L : \begin{cases} 2x_0 - x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

e dunque

$$\mathcal{F}_L : \lambda(2x_0 - x_1 - 2x_2) + \mu x_3 = 0.$$

8.7 Fasci proiettivizzati

Nel Capitolo 1 abbiamo trattato i fasci di iperpiani nello spazio affine \mathbb{A}^n , suddividendoli in “propri” e “impropri”: i primi avevano in comune un sottospazio affine di codimensione 2 (ad esempio, i fasci propri di rette nel piano di centro un punto) e i secondi avevano in comune una giacitura (ad esempio, un fascio improprio di rette nel piano, tutte parallele a una retta data). Tale distinzione viene a cessare nella Geometria Proiettiva.

Definizione 8.7.1. Sia \mathcal{F} un fascio di iperpiani in \mathbb{A}^n . Diciamo suo *fascio proiettivizzato* l’insieme di iperpiani di \mathbb{P}^n dato da

$$\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{H} \subset \mathbb{P}^n \mid H \in \mathcal{F}\}.$$

Osservazione 8.7.2. Se \mathcal{F} è un fascio proprio di iperpiani di sostegno un sottospazio affine L (con $\text{codim}(L) = 2$) allora $\overline{\mathcal{F}}$ è un fascio di iperpiani proiettivi di sostegno \overline{L} . Se invece \mathcal{F} è un fascio improprio di iperpiani di giacitura W (con W iperpiano vettoriale di \mathbb{K}^n) allora $\overline{\mathcal{F}}$ è un fascio di iperpiani proiettivi di sostegno $\mathbb{P}(W) \subset H_0$.

Esempio 8.7.3. Si consideri il fascio di rette in \mathbb{A}^2 dato da

$$\mathcal{F} : \quad \lambda(x + y - 3) + \mu(2x - y) = 0$$

e sia $\overline{\mathcal{F}}$ il suo fascio proiettivizzato. Determinare una equazione di $\overline{\mathcal{F}}$ (in coordinate omogenee) e il suo centro. Chiaramente $\overline{\mathcal{F}}$ ha come generatori le chiusure proiettive dei generatori di \mathcal{F} e dunque l'equazione di $\overline{\mathcal{F}}$ in \mathbb{P}^2 è

$$\overline{\mathcal{F}} : \quad \lambda(x_1 + x_2 - 3x_0) + \mu(2x_1 - x_2) = 0.$$

Pertanto il centro di $\overline{\mathcal{F}}$ è il punto

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_0 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow [x_0, x_1, x_2] = [1, 1, 2].$$