Foglio 7

Esercizio 1 Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx$;

(iii) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \log(1+\frac{1}{x}) dx$;

(iv) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$;

(v) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{1-x^3}$;

(vi) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

(vii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$;

(viii) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin(x) dx$.

Esercizio 2 Studiare la convergenza e la convergenza assoluta dei seguenti integrali impropri.

(i) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$;

(ii) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$;

(iii) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$;

(iv) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos(x^2) dx$.

Esercizio 3 Stabilire qual è il dominio della funzione Gamma di Eulero, definita da

$$\Gamma(p) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt.$$

Esercizio 4

(i) Sviluppare il membro destro dell'identità di Eulero $e^{in\theta} = (\cos\theta + i \sin\theta)^n$;

(ii) prendendo parte reale e immaginaria di entrambi i membri, dimostrare che $\cos(n\theta)$ e $\sin(n\theta)$ sono polinomi omogenei di grado n in $\cos\theta$ e $\sin\theta$;

(iii) ricavare esplicitmente la formula per $\cos(2\theta)$, $\cos(3\theta)$, $\sin(2\theta)$ e $\sin(3\theta)$.

Esercizio 5 Sia $D_N(\theta) := \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta}$. Dimostrare che

$$D_N(\theta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(k\theta) = \frac{\sin((N+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}.$$