PARTE IV - ELEMENTI DI MECCANICA DEI FLUIDI

LEZIONE 4.1 STATICA DEI FLUIDI

4.1.1 Densità assoluta e relativa

Si dicono fluidi sistemi che si deformano continuamente se soggetti ad una forza tangenziale, ovvero che tende a fare scorrere gli strati uno sull'altro, indipendentemente dalla sua intensità.

Fluidi → non hanno forma propria → liquidi e gas

		FORMA PROPRIA	VOLUME PROPRIO
Fluidi	liquidi	NO	SI
	gas	NO	NO
Solidi		SI	SI

SCHEMA INDICATIVO

AD ES. VETRO ↓ FLUIDO ↓ CATTEDRALI

La distinzione solido, liquido, aeriforme riflette:
→ l'intensità delle interazioni molecolari
→ il grado di correlazione ed ordine nella disposizione delle molecole

I fluidi sono sistemi con $3N$ gradi di libertà, con N numero di molecole, $N \sim N_A$ ⇒ Non è possibile un approccio deterministico
⇒ usiamo l'approccio della TD classica
⇒ identifichiamo variabili macroscopiche, come temperatura, pressione e densità:

densità media: $\rho_m = \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$

densità locale $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta V} = \dfrac{dm}{dV}$

Unità SI: $\dfrac{kg}{m^3}$ esempio $\rho_{H_2O} = 1000 \dfrac{kg}{m^3} = 1 \dfrac{g}{cm^3}$ (c.g.s)

$\rho_{\substack{aria \\ STP}} = 1{,}292 \dfrac{kg}{m^3}$

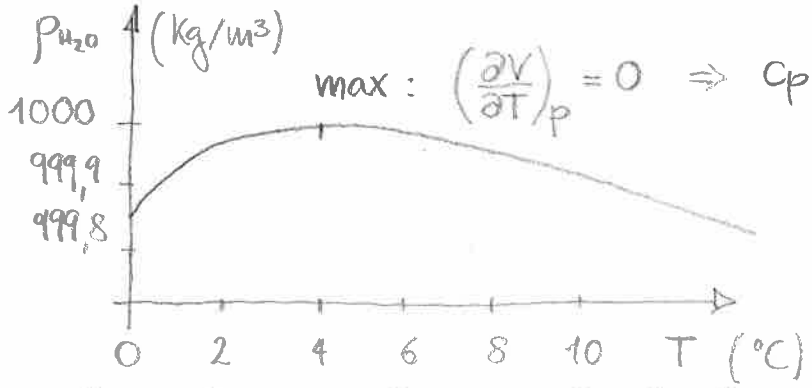
A volte si usa la densità relativa (all'acqua)

$$\rho_r = \frac{\Delta m}{\Delta m_{H_2O}} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta m_{H_2O}} = \frac{\rho_r}{\rho_{H_2O}}$$

in un uguale ΔV

Per solidi e liquidi si assume $\rho = \rho(T)$

Ricordiamo la particolarità dell'acqua:



max : $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 0 \Rightarrow c_p = c_v$ (vedi pag. 67)

proprietà interessante per la biologia di laghi e di fiumi

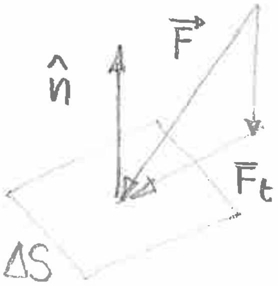
Notare anche $\rho_{Hg} = 13,6 \cdot 10^3$ Kg/m³ $(> \rho_{Pb} = 11,3 \cdot 10^3$ Kg/m³$)$
$(< \rho_{Au} = 19,3 \cdot 10^3$ kg/m³$)$

4.1.2 Pressione e sforzo di taglio

Con riferimento ad una forza $\vec{F}$ agente su un elemento di superficie (reale o immaginario) ΔS, abbiamo già definito (→ 3BIS):

$$p_m = \frac{|\vec{F} \cdot \hat{n}|}{\Delta S} = \frac{|\vec{F}_n|}{\Delta S}$$

(pressione media su ΔS finito)



F_n (componente normale)

$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t$

F_t (componente tangenziale)

Pressione in un punto: $p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{|\vec{F}_n|}{\Delta S} = \frac{dF_n}{dS}$

Definiamo ora: sforzo di taglio (shear stress) in un punto:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{F}_t}{dS}$$

È un vettore perché può indurre movimento $(\vec{F} = m\vec{a})$, al contrario della pressione (che è uno scalare).

4.1.3 Equazione della statica dei fluidi

In generale nei fluidi le pressioni possono essere dovute a:

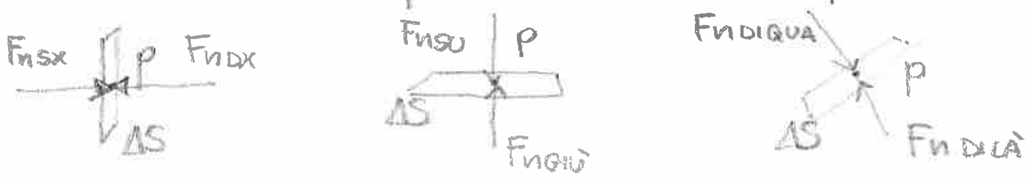
→ forze di volume (gravitazionale, elettromagnetica, apparente) dovute ad azioni "a distanza", proporzionali alla massa del fluido

→ forze di superficie, "di contatto", dovute alle parti di fluido confinanti

Osservazioni preliminari: in fluidostatica

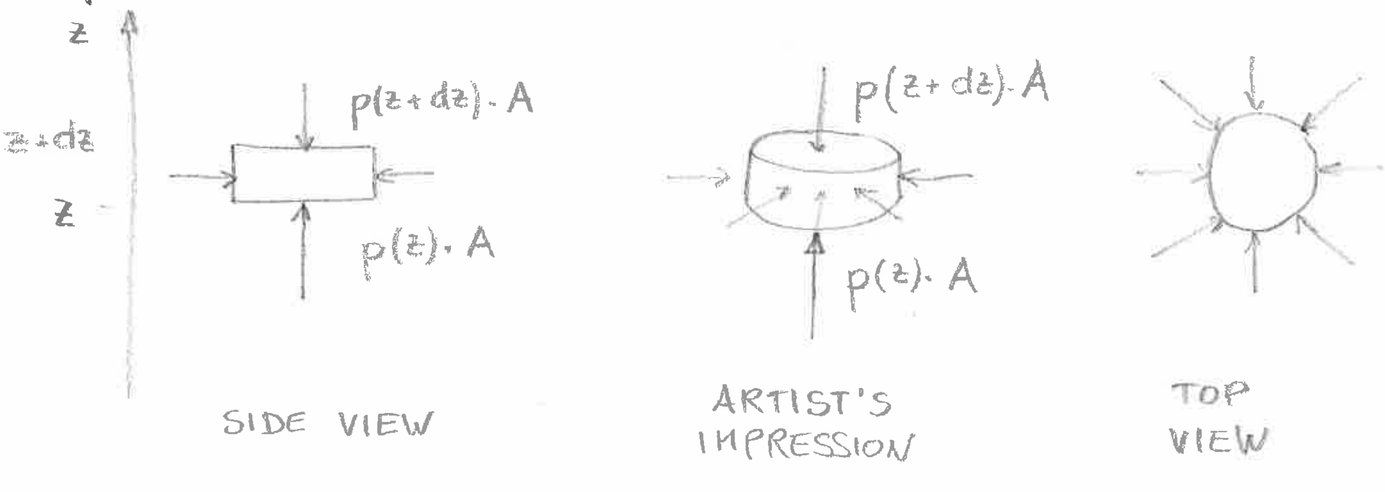
→ sulla superficie limite di un fluido non ci possono essere forze tangenziali (che per definizione di fluido implicherebbero deformazione e movimento) ma solo forze normali (e di compressione, non di trazione).

→ vale il principio di isotropia della pressione: la pressione che si misura in P non dipende dall'orientazione di ΔS ⇒ pressione in un punto



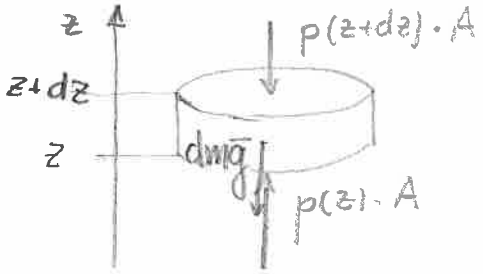
$$\left(\begin{array}{l} \text{se } F_{nSX} \neq F_{nDX}, \text{ ci sarebbe movimento ...} \\ \text{se } F_{nSU} \neq F_{nGIÙ}, \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ \text{"} \quad F_{nDIQUA} \neq F_{nDILÀ} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{array} \right) \Rightarrow$$

Ciò premesso, consideriamo un cilindro sottile di fluido e le forze agenti su di esso; forze di superficie:



L'unica forza di volume in questo caso è il peso.
La gravità introduce una direzione privilegiata: z.
Il problema ha simmetria cilindrica rispetto all'asse $z \Rightarrow$ le forze agenti sulla superficie laterale del cilindro hanno risultante nulla.

Statica: $\sum \vec{F}^{(e)} = 0$ $\quad$ ($F^{(e)}$: forze esterne)



$$\sum F^{(e)} = 0$$

$$dm = \rho\, dV = \rho \cdot A \cdot dz$$

$$p(z) \cdot A - p(z+dz) \cdot A - \rho A dz g = 0$$

$$p(z+dz) - p(z) = -\rho g dz$$

$$\frac{p(z+dz) - p(z)}{dz} = -\rho g$$

passaggio al $\lim_{dz \to 0}$ $\quad \boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g}$ $\quad$ EQ. DELLA STATICA DEI FLUIDI

Generalizzazione

In questo caso $p = p(z) \Rightarrow \bar{\nabla} p = \left(0, 0, \frac{dp}{dz}\right)$, $\bar{g} = (0, 0, -\bar{g})$ $\Rightarrow \boxed{\bar{\nabla} p = \rho \bar{g}}$

Questa seconda espressione si può generalizzare per $\vec{H}$ risultante delle forze di volume per unità di massa.
Se $\bar{H}$ è conservativa, si ha $\bar{H} = -\bar{\nabla}\phi$ con ϕ energia potenziale per unità di massa $\Rightarrow \boxed{\bar{\nabla} p = -\rho \bar{\nabla} \phi}$. $\phi = cost \Rightarrow p = cost$
(SUPERFICIE ISOBARICA)

Esempi: 1) solo forza peso: cilindro di fluido in quiete

$$\vec{H} = \vec{g}$$

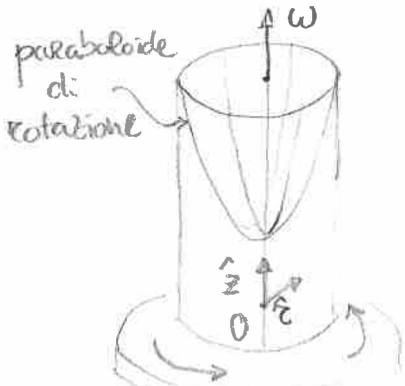
$$\phi = gz \qquad (V(z) = mgz)$$

$$\bar{\nabla}\phi = g\hat{z}$$

$$\bar{\nabla} p = -\rho \bar{\nabla}\phi = -\rho g \hat{z} = \rho \vec{g}$$

Superficie isobarica: $\phi = cost \Rightarrow z = cost$ (superfici orizzontali)

2) forza peso e forza centrifuga: cilindro su piattaforma rotante



$$\phi = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \qquad \left(V = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right)$$

$$\bar{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z} + \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r}$$

(simm. cilindrica: non c'è componente trasversa)

$$\bar{\nabla}\phi = g\hat{z} - \omega^2 r\hat{r}$$

$$\bar{\nabla}p = -\rho\bar{\nabla}\phi = \rho(\omega^2 r\hat{r} - g\hat{z}) = (\omega^2\vec{r} + \vec{g})\rho$$

Superficie isobarica: $\phi = \text{cost}$

$$gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = \text{cost.}$$ le cost. sono diverse!

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \text{cost.}''$$

equazione tipo $y = ax^2 + c \rightarrow$ paraboloide di rotazione

$r^2 \rightarrow$ simmetria cilindrica

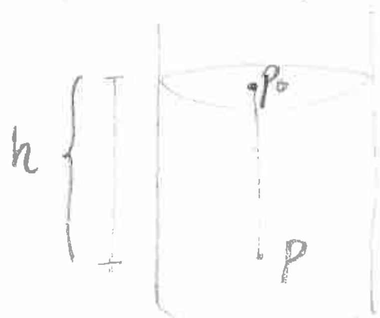
4.1.4 Legge di Stevino e principio di Pascal

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow dp = -\rho g\, dz$$

$$\int_{z_1}^{z_2} dp = \int_{z_1}^{z_2} -\rho g\, dz \qquad (z_2 > z_1)$$

$$\underbrace{p_2}_{p(z_2)} - \underbrace{p_1}_{p(z_1)} = -\rho g(z_2 - z_1)$$

Nel caso di un punto a profondità h, sotto ad una superficie a pressione p_0



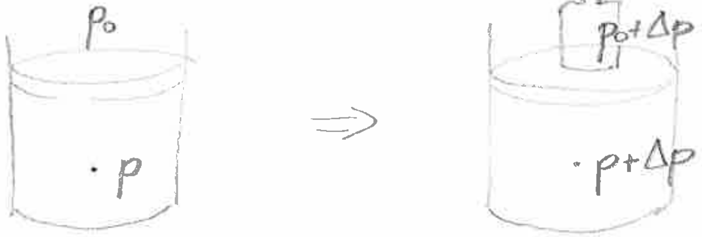
$$p_0 - p = -\rho g h$$

$$\boxed{p = p_0 + \rho g h}$$

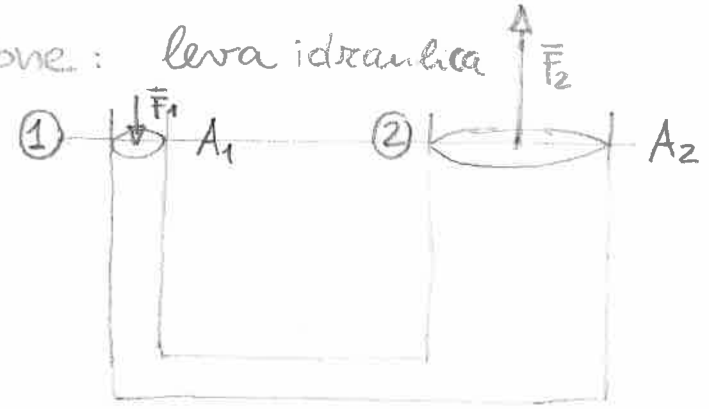
legge di Stevino (Simon Stevin 1548-1620)

Allo stesso modo si dimostra il "principio" di Pascal
(Blaise Pascal 1623-1662)

"Un aumento di pressione in un qualunque punto di un fluido si trasmette inalterato in tutti i punti del fluido"



Applicazione: leva idraulica



utilizzo come:
pressa idraulica
martinello idraulico
freno automobili
...

$\overline{F}_1 \Rightarrow \Delta p = \dfrac{F_1}{S_1}$ in 1 ma per il principio di Pascal:

$\Rightarrow \Delta p = \dfrac{F_1}{S_1}$ in 2 $\Rightarrow F_2 = \Delta p\, S_2 = F_1 \dfrac{S_2}{S_1}$ > 1

guadagno della leva idraulica

Il guadagno è compensato da uno spostamento ridotto:

il fluido è incomprimibile:

$S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2$

$\Delta l_2 = \dfrac{S_1}{S_2} \Delta l_1$

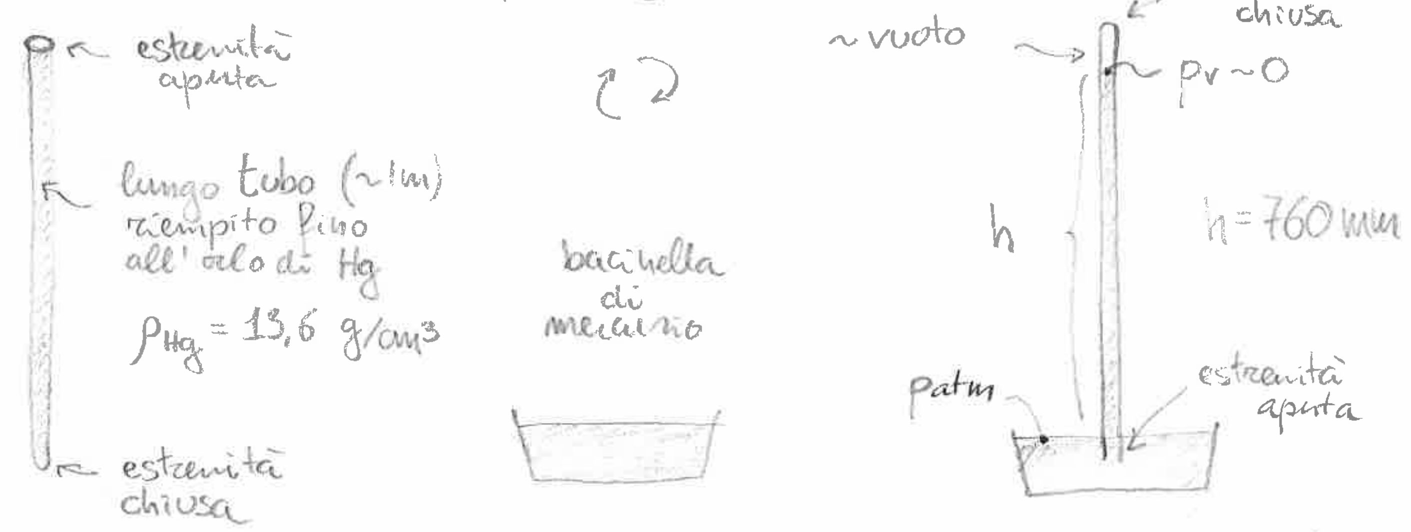
Per cui il lavoro di $\overline{F}_2$ è:

$$L_2 = F_2 \cdot \Delta l_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{S_1}{S_2} \Delta l_1 = F_1 \Delta l_1 = L_1$$

(TANSTAAFL: There ain't no such thing as a free lunch)

4.1.5 La pressione atmosferica

→ Esperienza di Torricelli (Evangelista Torricelli 1608-1647)



1 + 2 → $p_{atm} = 0 + \rho_{Hg}\, g\, h$

$1\ atm = 760\ mm\ Hg$
$= 760\ Torr$

→ Dipendenza della pressione atmosferica dalla quota

Assumiamo $T = cost. \Rightarrow pV = cost. \Rightarrow \frac{p}{\rho} = cost. = \frac{p_0}{\rho_0}$ ⟵ s.l.m.

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad \rho = \frac{\rho_0}{p_0}\cdot p \qquad \rho_0 \cong 1.2\ kg\, m^{-3}, \quad p_0 \cong 10^5\ Pa$$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\rho_0}{p_0}\cdot g \cdot p$$

$$\int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp}{p} = \int_{z_0}^{z} -\frac{\rho_0}{p_0}\, g\, dz$$

assumo $z_0 = 0$ s.l.m.

$$\ln\frac{p(z)}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0}\, g\, (z - \underbrace{z_0}_{=0})$$

$$p(z) = p_0\, e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g z}$$

$$p(z) = p_0\, e^{-(1.17\cdot 10^{-4}\ m^{-1})\cdot z}$$

Alcuni valori:

OK
$p(9000\ m) = 35\ \%\ p_0 \sim \frac{1}{3} p_0$ → Everest
$p(15000\ m) = 17\ \%\ p_0$ → stratosfera
$p(50\ km) = 2,9\ ‰\ p_0$ → mesosfera

NO
$p(400\ km) = 4.7\cdot 10^{-21}\ p_0$ → stazione spaziale

il modello mostra il suo limite → vuoto interplanetario 10^{-13} Pa