

MECCANICA HAMILTONIANA

EQUAZIONI DI HAMILTON

Le equazioni di Lagrange sono n equazioni differenziali del secondo ordine:

$$\ddot{\bar{q}} = \bar{f}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Uno può passare a $\underline{2n}$ equazioni differenziali del 1° ordine nel solito modo:

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \bar{\eta} \\ \dot{\bar{\eta}} = \bar{f}(\bar{q}, \bar{\eta}, t) \end{cases}$$

Tuttavia, questo non è sempre il metodo più conveniente per passare a equazioni differenziali del 1° ordine.

Equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial q_h} = 0$$

l'idea è di definire nuove **VARIABILI**

$$(*) \quad p_h = \frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial \dot{q}_h} \quad h=1, \dots, n$$

**MOMENTI
CONIUGATI**

↑
Ora p_h sono intese come
vel. e proprie coord.

In queste nuove coord. le equazioni di Lagrange diventano

$$\dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q_h} \quad h=1, \dots, n$$

Vogliamo invertire le relazioni (*) per trovare

$$\dot{\bar{q}} = \bar{u}(\bar{p}, \bar{q}, t) \quad (0)$$

Perché sia ammissibile questa inversione deve avvenire che:

$$\det \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{=} \right) \neq 0 \quad \leftarrow \text{Cambiamento di coordinate invertibile}$$

$$= \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}$$

Per sistemi MECCANICI ($L = T - V$) con $V = V(q)$
e $T = T_2 + T_1 + T_0$

$$\rightsquigarrow p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \sum_{l=1}^n a_{nl} \dot{q}_l + b_n$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = a_{ij} \quad \text{che è invertibile (det } a \neq 0)$$

$$\dot{\bar{q}} = \bar{a}^{-1}(\bar{p} - \bar{b}(q, t)) \quad \leftarrow \text{qta è la funzione che in (0) abbiamo chiamato } \bar{u}(p, q, t)$$

Le equazioni di Lagrange prendono la forma:

$$\begin{cases} \dot{p}_n = \frac{\partial L}{\partial q_n}(\bar{q}, \bar{a}^{-1}(\bar{p} - \bar{b}), t) & \leftarrow \text{eq. di Lagr. vere e proprie} \\ \dot{q}_n = \bar{a}^{-1}(\bar{p} - \bar{b}) & \leftarrow \text{ottenute dalla relazione tra } \bar{p} \text{ e } \dot{\bar{q}}. \end{cases}$$

Quindi arriviamo a eq. diff. del tipo:

$$\begin{cases} \dot{\bar{p}} = \bar{f}_p(\bar{p}, \bar{q}, t) \\ \dot{\bar{q}} = \bar{f}_q(\bar{p}, \bar{q}, t) \end{cases}$$

$$\leftarrow \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t)$$

$$\text{con } \bar{f} = \begin{pmatrix} \bar{f}_p \\ \bar{f}_q \end{pmatrix}$$

che ha una forma

particolare che ora vedremo.

Prop. Si consideri una Lagrangiana $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ con det. Hessiano non nullo, cioè $\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \right) \neq 0$.

Allora il sistema

$$\begin{cases} \dot{q}_h = u_h(p, q, t) & \leftarrow \text{ottenute invertendo } p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(q, \dot{q}, t) \\ \dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q_h}(q, u(p, q, t), t) & \leftarrow \text{eq. di Lagrange} \end{cases}$$

è equivalente al sistema

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{p}_h = - \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q}, t)}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h = \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q}, t)}{\partial p_h} \end{cases} \quad \text{con} \quad H(\bar{p}, \bar{q}, t) = \left[\bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \right] \Big|_{\dot{\bar{q}} = \bar{u}(\bar{p}, \bar{q}, t)}$$

Inoltre si ha $\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$.

H è detta **HAMILTONIANA** (o funz. di Hamilton)
 le eq. (*) sono dette **EQ. DI HAMILTON** (o eq. canoniche)

Dim. Siccome per ipotesi $\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \right) \neq 0$, allora

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \quad \text{si può invertire, ottenendo} \quad \dot{q}_h = u_h(p, q, t)$$

$\Rightarrow H(\bar{p}, \bar{q}, t)$ è ben definita:

$$H(p, q, t) = \sum_k p_k u_k(p, q, t) - L(q, u(p, q, t), t)$$

Ora facciamo le derivate parziali di H :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_h} &= \sum_k p_k \frac{\partial u_k}{\partial q_h}(p, q, t) - \frac{\partial L}{\partial q_h}(q, u(p, q, t), t) \\ &\quad - \sum_e \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_e}(q, u(p, q, t), t)}_{= p_e} \frac{\partial u_e}{\partial q_h}(p, q, t) \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q_h}(q, u(p, q, t), t) = -\dot{p}_h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_h} &= \sum_k \delta_{hk} u_k(p, q, t) + \sum_k p_k \frac{\partial u_k}{\partial p_h}(p, q, t) \\ &\quad - \sum_e \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_e}(q, u(p, q, t), t)}_{= p_e} \frac{\partial u_e}{\partial p_h}(p, q, t) \\ &= u_h(p, q, t) = \dot{q}_h \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \end{cases}$$

$$\text{Inoltre } \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_k p_k \frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} - \sum_e \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_e} \frac{\partial u_e}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} .$$

Dimostrazione alternativa.

Dalla def. di differenziale:

$$dH = \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_m} dp_m + \frac{\partial H}{\partial q_m} dq_m \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

○ Una facciamo il def. delle funz. $H = (\bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - L)_{\dot{\bar{q}} = \bar{u}(\bar{p}, \bar{q}, t)}$

$$dH = \sum_{m=1}^n \boxed{p_m} du_m + \sum_{m=1}^n u_m dp_m - \sum_{m=1}^n \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}} du_m - \sum_m \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

è il differenziale della funzione $\bar{u}(\bar{p}, \bar{q}, t)$

Notiamo che il differenziale della funz. $\bar{u}(\bar{p}, \bar{q}, t)$ appare in due punti; siccome $p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$ questi contributi si cancellano.

$$= \sum_{m=1}^n \left(\dot{q}_m dp_m - \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

○ \Rightarrow vettori sono uguali, quindi sono uguali le componenti rispetto a una base (dp_m, dq_m, dt)

$$\dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} \quad \frac{\partial L}{\partial q_m} = - \frac{\partial H}{\partial q_m} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\uparrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = \dot{p}_m$$

Eq. di Lagrange

Quindi le eq. del moto si possono esprimere come

$$\begin{cases} \dot{p}_m = - \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q_m} \\ \dot{q}_m = \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p_m} \end{cases} \quad \text{def. } \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t)$$

Vediamo che forma assume \bar{f} :

$$\vec{f}(x, t) = \begin{pmatrix} -\vec{\nabla}_q H \\ \vec{\nabla}_p H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_p H \\ \vec{\nabla}_q H \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{vett. } 2m\text{-dim.}} \vec{\nabla}_x H$$

Chiamiamo questa matrice E

⇒ Le eq. di Hamilton si possono risolvere come
 $\dot{\vec{x}} = E \vec{\nabla}_x H$ con $E = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$ ← MATRICE ANTISIMMETRICA

In componenti: $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{2n} E_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}(x, t)$ $i = 1, \dots, 2n$ NOTAZIONE COMPATTA

Le componenti della matrice E sono $\rightarrow E_{ij} = \begin{cases} 0 & i, j = 1, \dots, n \\ -\delta_{hk} & i=h, j=k+n, h, k = 1, \dots, n \\ \delta_{hk} & i=h+n, j=k, h, k = 1, \dots, n \\ 0 & i, j = n+1, \dots, 2n \end{cases}$

Prop. In un sistema meccanico, H prende la forma:

$$H = \underbrace{T_2}_{\text{omogenea di grado 2 in } \dot{q}_i} - T_0 + V$$

→ Nel caso di vincoli indep dal tempo, $H = T + V$ (en. tot. del sistema)

Dim. T_2, T_1, T_0 sono funz. omogenee di grado rispettivamente 2, 1, 0:

$$\sum_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h = \sum_h \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h + \sum_h \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h + \sum_h \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h =$$

$$= 2T_2 + T_1 + 0$$

Quindi $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - V)$

$$= T_2 - T_0 + V. //$$

Esempi

1) PTO MATERIALE in coord. cartesiane

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad V = V(x, y, z)$$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad p_y = m\dot{y} \quad p_z = m\dot{z}$$

inversione

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m} \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$H(p_x, p_y, p_z, x, y, z) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + V(x, y, z) = \frac{P^2}{2m} + V$$

Energia cinetica

2) Oscillatore ARMONICO

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \rightarrow H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

3) FORZE ELETTROMAGNETICHE

$$\vec{F} = e (\vec{E} + \dot{\vec{q}} \times \vec{B})$$

$$\vec{E} = -(\nabla\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{F} \text{ si ricava da } V(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \underbrace{e\phi(\vec{q})}_{V_0} - \underbrace{e\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}(\vec{q})}_{V_1}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^2 + e\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A} - e\phi$$

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = m\dot{q}_h + eA_h \Rightarrow \dot{q}_h = \frac{p_h - eA_h}{m} \quad (\neq)$$

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L|_{(\neq)} = \vec{p} \cdot \left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \right) - \frac{m}{2} \left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \right)^2 - e \left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \right) \cdot \vec{A} + e\phi$$

↓

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\phi = T + V_0$$

Extra: "Invarianza di GAUGE"

Dinamica CLASSICA dipende solo da $\vec{B} \Rightarrow \vec{A}$ e $\vec{A} + \vec{\omega}$ sono EQUIVALENTI se $\nabla \cdot \vec{\omega} = 0$ (cioè se ω è una 1-forma CHIUSA)

Infatti le eq. di Hamilton sono

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{1}{m} \sum_{h=1}^3 (p_h - e A_h) \frac{\partial A_h}{\partial q_i} (-e) & \nearrow & = e \sum_h \dot{q}_h \frac{\partial A_h}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} (p_i - e A_i) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_i = \frac{1}{m} \dot{p}_i - e \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = \frac{e}{m} \sum_j \dot{q}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \right)$$

→ Troviamo la stessa equazione del moto se sostituiamo

$$\bar{A} \mapsto \bar{A} + \bar{\nabla} \lambda \quad (*)$$

$$\left(\text{Infatti } \frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \mapsto \frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} + \frac{\cancel{\partial^2 \lambda}}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\cancel{\partial^2 \lambda}}{\partial q_j \partial q_i} \right)$$

⇒ La dinamica del sistema è invariante sotto

la transf. (*), chiamata **TRASFORMAZIONE DI GAUGE**

Notiamo che \bar{A} e $\bar{A}' = \bar{A} + \bar{\nabla} \lambda$ danno lo stesso campo magnetico \bar{B} (perché $\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \lambda = 0$). Quindi abbiamo appena riscoperto che la dinamica classica dipende solo dal campo magnetico \bar{B} (non dal particolare \bar{A}).

Notiamo che le eq. del moto di $\bar{p}(t)$ cambiano sotto (*), questo avviene perché (*) cambia la definizione di momento coniugato. Si nota però che (*) non cambia quello che chiamiamo velocità della particella ($\dot{\bar{q}}$) che è la grandezza fisica effettivamente osservabile.

Extra: FORMULAZIONE VARIATIONALE

Siamo interessati alle traiettorie nelle sp. delle fasi

$$\underbrace{p_i(t) \quad q_i(t)}_{\text{sono funzioni}} \quad i=1, \dots, m \quad : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$$

Funzionale AZIONE HAMILTONIANA

$$S[\bar{p}, \bar{q}] \equiv \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left[\sum_{h=1}^m p_h(t) \dot{q}_h(t) - H(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) \right]}_{L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)} dt$$

Se il sistema Hamiltoniano è equiv. a un sist. lagrangiano, S coincide con l'azione hamiltoniana vista in precedenza.

$$\left[\text{Se } \mathcal{L} \text{ } S[\bar{p}, \bar{q}] \equiv \int dt F(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) \right]$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{d}{d\alpha} \int dt \left[F(\bar{p} + \alpha \delta \bar{p}, \bar{q} + \alpha \delta \bar{q}, t) \right] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \int dt \sum_h \left(\frac{\partial F}{\partial p_h} \delta p_h + \frac{\partial F}{\partial q_h} \delta q_h \right) \end{aligned}$$

$$S[\bar{p}, \bar{q}] \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{h=1}^m p_h(t) \dot{q}_h(t) - H(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) \right] dt$$

$$\begin{aligned}
 \delta S [\bar{p}, \bar{q}, \delta \bar{p}, \delta \bar{q}] &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^m \left[\underbrace{\delta p_s(t) \dot{q}_s(t)}_{\frac{\partial}{\partial p_s} \left(\sum_h p_h \dot{q}_h \right) \delta p_s} + \underbrace{p_s(t) \delta \dot{q}_s(t)}_{\substack{\text{Integriamo per} \\ \text{parti}}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial H}{\partial p_s} \delta p_s(t) - \frac{\partial H}{\partial q_s} \delta q_s(t) \right] dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^m \left[\left(\dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s} \right) \delta p_s - \left(\underline{\dot{p}_s} + \frac{\partial H}{\partial q_s} \right) \delta q_s \right] dt \\
 &\quad + \sum_{s=1}^m p_s \delta q_s \Big|_{t_0}^{t_1}
 \end{aligned}$$

\Downarrow
Prop. Il moto $\bar{p}(t), \bar{q}(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) rende stazionario il funzionale azione $S[\bar{p}, \bar{q}]$ corrispondente a una data Hamiltoniana H , m variabili arbitrarie e m $\delta \bar{q}$ nulle agli estremi, SE E SOLO SE esso soddisfa le eq. di Hamilton relative a H .