

Esercizi dati negli esami scritti precedenti

La divisione in anni accademici si riferisce all'anno accademico in cui è stato effettuato il corso. Cronologicamente gli appelli sono di giugno, luglio, settembre (2), gennaio, febbraio. L'anno accademico 2019/2020 comprende più esercizi perché a causa del Covid gli appelli scritti telematici e/o in presenza a volte sono stati sdoppiati in più gruppi.

Parti lasciate come esercizio, sono lasciate allo studente e andrebbero analizzate in sede d'esame nel caso di un esercizio analogo.

Man mano che si procede con gli esercizi, alcune risoluzioni sono omesse perché molto simili a esercizi già esposti. Contengono quindi rimandi ad esercizi già visti e sono lasciate volutamente incomplete.

Sono stati riscontrati errori *di battitura* (e non solo) nelle risoluzioni. Alcuni sono stati sistemati, altri mi sono dimenticato di correggerli perché ho perso il foglio su cui mi ero segnato le vostre segnalazioni. Non date per scontata la validità di ogni singolo passaggio. Provate a risolvere voi stessi gli esercizi e successivamente controllate se sono corretti.

In fondo si trovano le risoluzioni di alcuni esercizi dati per il corso di Analisi 3 per il CdL di Matematica. Alcuni esercizi (non tutti!) sono compatibili col corso di Analisi Matematica 2 per il CdL di Fisica.

Indice

1 Serie e integrali	2
1.1 A.A. 2018/2019	2
1.2 A.A. 2019/2020	5
1.3 A.A. 2020/2021	10
1.4 A.A. 2021/2022	11
1.5 A.A. 2022/2023	12
1.6 A.A. 2023/2024	14
1.7 A.A. 2024/2025	16
2 Continuità e differenziabilità, problemi di massimo e minimo	17
2.1 A.A. 2018/2019	17
2.2 A.A. 2019/2020	24
2.3 A.A. 2020/2021	33
2.4 A.A. 2021/2022	37
2.5 A.A. 2022/2023	41
2.6 A.A. 2023/2024	45
2.7 A.A. 2024/2025	48
3 Integrazione	49
3.1 A.A. 2018/2019	49
3.2 A.A. 2019/2020	53
3.3 A.A. 2020/2021	58
3.4 A.A. 2021/2022	61
3.5 A.A. 2022/2023	63
3.6 A.A. 2023/2024	65
3.7 A.A. 2024/2025	67
4 Equazioni differenziali	68
4.1 A.A. 2018/2019	68
4.2 A.A. 2019/2020	73
4.3 A.A. 2020/2021	78
4.4 A.A. 2021/2022	81
4.5 A.A. 2022/2023	84
4.6 A.A. 2023/2024	86
4.7 A.A. 2024/2025	87
5 Campi vettoriali	89
5.1 Primi esercizi	89
5.2 A.A. 2022/2023	91
5.3 A.A. 2023/2024	94
5.4 A.A. 2024/2025	95
6 Pensati per i matematici	96
7 Altri esercizi	107

1 Serie e integrali

1.1 A.A. 2018/2019

Esercizio 1.1. *Al variare del parametro reale $\alpha < 0$, studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan(n^\alpha)}{\log_3\left(\frac{1}{n!} + 1\right)} \cdot \frac{e^{n^{-n}} - 1}{\arcsin(2^{-n} + 3^{-n})}.$$

Innanzitutto notiamo che la serie è a termini positivi. Poiché il parametro α è negativo abbiamo che $\lim_n n^\alpha = 0$ per ogni α da considerare. Dai limiti fondamentali abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{\tan(n^\alpha)}{n^\alpha} &= 1, \\ \lim_n \frac{\log_3\left(\frac{1}{n!} + 1\right)}{\frac{1}{n!}} &= \lim_n \frac{1}{\log 3} \frac{\log\left(\frac{1}{n!} + 1\right)}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\log 3}, \\ \lim_n \frac{e^{n^{-n}} - 1}{n^{-n}} &= 1, \\ \lim_n \frac{\arcsin(2^{-n} + 3^{-n})}{2^{-n} + 3^{-n}} &= 1, \\ \lim_n \frac{2^{-n} + 3^{-n}}{2^{-n}} &= \lim_n 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^n = 1.\end{aligned}$$

Dai limiti precedenti troviamo che la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha n^{-n}}{\frac{1}{n!} \cdot 2^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha \cdot n! \cdot 2^n}{n^n}.$$

Usando il criterio del confronto asintotico, infatti

$$\lim_n \frac{\frac{\tan(n^\alpha)}{\log_3\left(\frac{1}{n!} + 1\right)} \cdot \frac{e^{n^{-n}} - 1}{\arcsin(2^{-n} + 3^{-n})}}{\frac{n^\alpha n^{-n}}{\frac{1}{n!} \cdot 2^{-n}}} = \log 3 \in \mathbb{R}^+$$

(non è obbligatorio scrivere questo enorme limite nel compito, sono sufficienti le considerazioni fatte sopra). Allora studiamo il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha \cdot n! \cdot 2^n}{n^n}.$$

Proviamo col criterio del rapporto e scriviamo

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_n \frac{(n+1)^\alpha \cdot (n+1)! \cdot 2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n^\alpha \cdot n! \cdot 2^n} \\ &= \lim_n \frac{(n+1)^\alpha \cdot (n+1) \cdot n! \cdot 2^n \cdot 2}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot \frac{n^n}{n^\alpha \cdot n! \cdot 2^n} \\ &= \lim_n \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \cdot 2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1\end{aligned}$$

Concludiamo quindi che la serie converge per ogni $\alpha < 0$.

Esercizio 1.2. *Al variare del parametro reale $x \in \mathbb{R}$, studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x^2 + 5x + 5)^n.$$

Poniamo $y = x^2 + 5x + 5$ e troviamo la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} y^n. \quad (1)$$

Detto, $a_n = \frac{1}{n}$ troviamo che $L = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1$, quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è $\rho = 1/L = 1$.

In alternativa si può discutere l'assoluta convergenza della serie con il criterio del rapporto

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n+1} |y|^{n+1}}{\frac{1}{n} |y|^n} = \lim_n \frac{n}{n+1} \cdot |y| = |y|.$$

Dimenticare di trattare l'assoluta convergenza, pensando che valga sempre $y > 0$, e applicare il criterio del rapporto ad una serie a termini di segno alterno è un errore. Quindi è importante ricordare di mettere i valori assoluti nella formula precedente.

A questo punto la serie 1

- è divergente per $y > 1$ dal fatto che il raggio di convergenza è 1 o dal criterio del rapporto,
- è divergente per $y = 1$ in quanto abbiamo in questo caso $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,
- è convergente per $|y| < 1$ (assolutamente convergente per $-1 < y < 0$),
- è semplicemente convergente per $y = -1$ in quanto abbiamo in questo caso $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ a cui possiamo applicare il criterio di Leibniz,
- è indeterminata per $y < -1$ dal fatto che il raggio di convergenza è 1 o dal criterio del rapporto.

A questo punto essendo $y = x^2 + 5x + 5$ dobbiamo risolvere le equazioni

$$x^2 + 5x + 5 \begin{cases} = 1 & \text{con soluzioni } -1 \text{ e } -4, \\ = 0 & \text{con soluzioni } x_{\pm} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ = -1 & \text{con soluzioni } -2 \text{ e } -3. \end{cases}$$

A questo punto concludiamo che la serie assegnata

- è divergente se $x \leq -4$ oppure $x \geq -1$,
- è convergente se $-4 < x < -3$ oppure $-2 < x < -1$ (assolutamente convergente se $x_- < x < -3$ oppure $-2 < x < x_+$),
- è semplicemente convergente se $x = -3$ oppure $x = -2$,
- è indeterminata se $-3 < x < -2$.

Esercizio 1.3. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n) \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})}.$$

La serie è a segno qualunque, il segno è deciso da $\sin n$ che oscilla tra -1 e 1 . Quindi di essa studiamo l'assoluta convergenza. Notiamo che

$$\left| (\sin n) \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})} \right| = |\sin n| \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})} \leq 1 \cdot \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})}.$$

Se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})} \quad (2)$$

risultasse convergente, potremmo concludere che anche la serie iniziale è assolutamente convergente usando il criterio del confronto.

Dai limiti fondamentali deduciamo che

$$\lim_n \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\frac{1}{n!}} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_n \frac{\arctan(2^{-n})}{2^{-n}} = 1,$$

quindi la serie (2) ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. Per quest'ultima proviamo ad applicare il criterio del rapporto

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_n \frac{2^n \cdot 2}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_n \frac{2}{n} = 0 < 1,$$

da cui concludiamo la convergenza dell'ultima serie, e di conseguenza l'assoluta convergenza della serie assegnata.

Esercizio 1.4. Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right) (\arctan n^\alpha).$$

La serie è a termini positivi. Per quanto riguarda il primo fattore osserviamo che

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \tag{3}$$

da cui ricordando il limite fondamentale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \tag{4}$$

troviamo

$$\lim_n \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n} \cdot \frac{1}{n}} = \lim_n \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Quindi abbiamo mostrato che

$$\lim_n \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{n^{-2/3}} = \frac{1}{3}.$$

Passiamo ora a studiare il secondo fattore:

- se $\alpha > 0$ abbiamo $\lim_n \arctan n^\alpha = \frac{\pi}{2}$,
- se $\alpha \geq 0$ abbiamo $\arctan n^\alpha = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- se $\alpha < 0$ useremo che $\lim_n \frac{\arctan n^\alpha}{n^\alpha} = 1$.

Mettendo assieme i due fattori concludiamo che

- se $\alpha \geq 0$ il termine della serie può essere confrontato asintoticamente con $n^{-2/3}$ e concludiamo che la serie di partenza diverge.
- se $\alpha < 0$ il termine della serie può essere confrontato asintoticamente con $n^{-2/3+\alpha}$. A questo punto abbiamo convergenza se $-\frac{2}{3} + \alpha < -1$, ovvero se $\alpha < -\frac{1}{3}$. Mentre se $\alpha \geq -\frac{1}{3}$ la serie diverge.

Esercizio 1.5. Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{3^n + 4^n}.$$

Osserviamo che la serie è a termini positivi. Valendo il seguente limite

$$\lim_n \frac{4^n}{3^n + 4^n} = \lim_n \frac{1}{1 + (\frac{3}{4})^n} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico il carattere della serie data sarà lo stesso della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^x}{4} \right)^n,$$

che è una serie geometrica. Ne consegue che abbiamo convergenza se $|e^x/4| < 1$ ovvero se e solo se $e^x < 4$, da cui $x < 2 \ln 2$. Per $x \geq 2 \ln 2$ avremo divergenza.

Esercizio 1.6. Studiare, al variare di $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+1} (\tan x)^k.$$

Innanzitutto poniamo $y = \tan x$, con $y \in \mathbb{R}$, essendo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ne studiamo l'assoluta convergenza e osserviamo che la frazione $\frac{k+2}{k^2+1}$ è sempre positiva. Inoltre vale

$$\lim_k \frac{\frac{k+2}{k^2+1}}{\frac{1}{k}} = 1$$

per cui avremo l'assoluta convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+1} y^k$$

se e solo se la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} y^k$$

è assolutamente convergente. Essa è una serie di potenze di raggio 1 (mostrarlo per esercizio). Quindi avremo che se $|y| < 1$ la serie è assolutamente convergente. Per $y > 1$ sarà divergente, per $y < -1$ sarà indeterminata. Tornando alla variabile x troviamo quindi:

- Se $x \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ allora la serie è indeterminata
- Se $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ sarà assolutamente convergente.
- Se $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ sarà divergente.
- Vanno risolti a parte i casi rimanenti. Se $x = \frac{\pi}{4}$ otteniamo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+1}$, che ha lo stesso carattere di $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$, ovvero è divergente. Per $x = -\frac{\pi}{4}$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+2}{k^2+1}$ converge semplicemente usando il criterio di Leibniz. Infatti vale facilmente $\lim_k \frac{k+2}{k^2+1} = 0$ ed è decrescente (per k sufficientemente grandi). Dimostrare per esercizio quest'ultima affermazione.

1.2 A.A. 2019/2020

Esercizio 1.7. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Essendo $\sin(1/n) < 1$ la serie è a termini positivi. Ad essa applichiamo il criterio della radice e troviamo

$$\lim_n \left(1 - \sin \frac{1}{n}\right)^n = \lim_n e^{n \ln(1 - \sin \frac{1}{n})} = e^{-1} < 1$$

essendo

$$\lim_n n \ln(1 - \sin \frac{1}{n}) = \lim_n \frac{\ln(1 - \sin \frac{1}{n})}{-\sin \frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} (-1) = -1.$$

La serie quindi converge.

Esercizio 1.8. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} \frac{\sin(n^{-1})}{6^n}.$$

Dopo aver osservato che la serie è a termini positivi, possiamo usare il criterio del confronto asintotico, essendo $\lim_n \frac{\sin n^{-1}}{n^{-1}} = 1$, ottenendo che la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} \frac{n^{-1}}{6^n}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto e otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{\binom{3n+3}{n+1} \frac{1}{(n+1)6^{n+1}}}{\binom{3n}{n} \frac{1}{n6^n}} &= \lim_n \frac{\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)! (n+1)n! (n+1)6^{n+1}}}{\frac{(3n)!}{(2n)! n! \frac{1}{6^n}}} \\ &= \lim_n \frac{n(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{6(2n+2)(2n+1)(n+1)^2} = \frac{27}{24} > 1. \end{aligned}$$

La serie diverge.

Esercizio 1.9. *Discutere la convergenza del seguente integrale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\tan x - \alpha \sin x} dx.$$

Notiamo innanzitutto che la funzione non è definita in $x = 0$. Dobbiamo quindi studiare l'ordine di infinitesimo del denominatore. Approssimiamo quindi il denominatore usando il polinomio di Taylor

$$\tan x - \alpha \sin x = \left(x + \frac{1}{3}x^3\right) - \alpha \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + R_3(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0$$

Nel caso particolare $\alpha = 1$ otteniamo

$$\tan x - \sin x = \frac{1}{2}x^3 + R_3(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0,$$

da cui otteniamo che la funzione integranda è tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\tan x - \sin x}}{\frac{1}{x^2}} = 2 \in \mathbb{R}.$$

Deduciamo quindi che l'integrando cresce come x^{-2} in un intorno di $x = 0$ e quindi l'integrale non converge.

Consideriamo ora $\alpha \neq 1$, per cui otteniamo

$$\tan x - \alpha \sin x = (1 - \alpha)x + R_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0,$$

da cui segue con ragionamento analogo a sopra

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^\alpha}{\tan x - \alpha \sin x}}{x^{\alpha-1}} = \frac{1}{1 - \alpha} \in \mathbb{R}.$$

Quindi l'integrando cresce come $x^{\alpha-1}$ in un intorno di $x = 0$. Abbiamo la convergenza dell'integrale se $\alpha - 1 > -1$, ovvero se $\alpha > 0$ (ma abbiamo posto $\alpha \neq 1$!).

Quindi *in un intorno destro dell'origine abbiamo la convergenza dell'integrale se $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$* , altrimenti non c'è convergenza.

Il ragionamento seguente (impegnativo) conferiva punteggio extra anche se risolto parzialmente.

Per la discussione dell'integrabilità della funzione bisogna controllare che il denominatore non si annulli in altri punti $x \in (0, 1]$. Risolvendo l'equazione $\tan x - \alpha \sin x = 0$ troviamo $\frac{1}{\cos x} - \alpha = 0$ e quindi $\cos x = \alpha^{-1}$, ovvero $x = \arccos \alpha^{-1}$, ricordando che chiediamo $x \in (0, 1]$. Quindi l'equazione ha soluzione in questo intervallo se $1 < \alpha \leq (\cos 1)^{-1}$.

Per questi valori dobbiamo verificare l'andamento della funzione in un intorno del punto x_α tale che $\cos x_\alpha = \alpha^{-1}$. Per fare questo basta calcolare il polinomio di Taylor di grado uno della funzione in questo punto:

$$\begin{aligned}\tan x - \alpha \sin x &= \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \alpha \cos x \right)_{x=x_\alpha} (x - x_\alpha) + S_1(x) \\ &= (\alpha^2 - 1)(x - x_\alpha) + S_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S_1(x)}{x - x_\alpha} = 0.\end{aligned}$$

In un intorno di x_α la funzione integranda va quindi come $\frac{1}{x-x_\alpha}$ che ha integrale divergente. Concludiamo quindi questa parte aggiuntiva concludendo che l'integrale converge se $\alpha \in (0, 1) \cup (\frac{1}{\cos 1}, +\infty)$.

Esercizio 1.10. *Discutere la convergenza del seguente integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1 - \sin x}{e^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)} dx.$$

Innanzitutto notiamo che dovremo discutere la convergenza in un intorno di $x = 0$ e di $+\infty$. Il denominatore si annulla (per $x \geq 0$) solo in zero in quanto $e^y - 1 > y > \sin y$ per ogni $y > 0$. Notiamo anche che, detta $f(x) = \frac{e^x - 1 - \sin x}{e^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)}$, vale $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^{(1-\pi)x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x} - \frac{\sin x}{e^x}}{1 - e^{-\pi x} - \frac{\sin(\pi x)}{e^{\pi x}}} = 1,$$

ovvero la funzione integranda, in un intorno di $+\infty$ si comporta come $e^{(1-\pi)x}$. Quest'ultima funzione è integrabile in senso generalizzato su $[1, +\infty)$, quindi abbiamo la convergenza dell'integrale generalizzato di f su $[1, +\infty)$ per confronto: infatti esiste \bar{x} tale che, per ogni $x \geq \bar{x}$,

$$0 < \frac{f(x)}{e^{(1-\pi)x}} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x) \leq 2e^{(1-\pi)x}.$$

Quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x - 1 - \sin x}{e^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)} dx \leq 2 \int_1^{+\infty} e^{(1-\pi)x} dx \in \mathbb{R}.$$

Discutiamo ora la convergenza dell'integrale generalizzato su $(0, 1]$. Possiamo calcolare, scrivendo il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in $t = 0$,

$$g(t) = e^t - 1 - \sin t = \frac{1}{2}t^2 + R_2(t), \quad \text{dove } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R_2(t)}{t^2} = 0.$$

Con una semplice sostituzione troviamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{e^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + R_2(x)}{\frac{1}{2}(\pi x)^2 + R_2(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2\frac{R_2(x)}{x^2}}{\pi^2 + 2\pi^2\frac{R_2(\pi x)}{\pi^2 x^2}} = \frac{1}{\pi^2}.$$

La funzione f ha limite finito in zero, allora è integrabile sull'intervallo $(0, 1]$.

Concludiamo che l'integrale richiesto è convergente.

Esercizio 1.11. *Determinare il carattere della serie al variare di $x \in \mathbb{R}$.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^n.$$

Dopo aver effettuato la sostituzione $y = \frac{x+2}{x-2}$ troviamo una serie di potenze con raggio di convergenza 1, che risulta indeterminata per $y < -1$, assolutamente convergente per $|y| \leq 1$ e divergente per $y > 1$ (scrivere tutti i dettagli per esercizio). A questo punto, una volta disegnato il grafico della funzione $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$, notiamo che

$$\begin{aligned}f(x) < -1 &\iff x \in (0, 2), \\ |f(x)| \leq 1 &\iff x \in (-\infty, 0], \\ f(x) > 1 &\iff x \in (2, +\infty).\end{aligned}$$

Concludendo quindi che la serie è indeterminata per $x \in (0, 2)$, assolutamente convergente per $x \in (-\infty, 0]$ e divergente per $x \in (2, +\infty)$. Ovviamente per $x = 2$, la serie non è ben definita.

Esercizio 1.12. *Discutere la convergenza del seguente integrale al variare di $\alpha > 0$*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha}) \alpha^x} dx.$$

Dopo aver notato che il denominatore si annulla in $x = 0$, notiamo che dobbiamo discutere la convergenza dell'integrale in un intorno di $x = 0$ e $x = +\infty$. Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(\sqrt{x^\alpha}) = \frac{\pi}{2},$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x - 1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha}) \alpha^x}}{\frac{e^x}{\alpha^x}} = \frac{2}{\pi}$$

e quindi deduciamo l'esistenza di un certo x_0 tale che per ogni $x > x_0$ vale

$$\frac{1}{2} \left(\frac{e}{\alpha} \right)^x \leq f(x) = \frac{e^x - 1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha}) \alpha^x} \leq \left(\frac{e}{\alpha} \right)^x,$$

Per confronto con le funzioni presenti al membro sinistro e al membro destro osserviamo che l'integrale generalizzato di f in $[1, +\infty)$ è convergente se e solo se $\alpha > e$.

Passiamo ora ad analizzare la convergenza dell'integrale di f sull'intervallo $(0, 1]$. Usando i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \alpha^x = 1,$$

mostriamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x - 1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha}) \alpha^x}}{x^{-(\frac{\alpha}{2} - 1)}} = 1$$

e quindi deduciamo l'esistenza di un certo $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (0, \delta)$ vale

$$\frac{1}{2} x^{-(\frac{\alpha}{2} - 1)} \leq f(x) = \frac{e^x - 1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha}) \alpha^x} \leq 2 x^{-(\frac{\alpha}{2} - 1)},$$

Per confronto con le funzioni presenti al membro sinistro e al membro destro osserviamo che l'integrale generalizzato di f in $(0, 1]$ è convergente se e solo se $\frac{\alpha}{2} - 1 < 1$, cioè se e solo se $\alpha < 4$.

Concludiamo quindi che l'integrale richiesto converge in senso generalizzato se e solo se $e < \alpha < 4$.

Esercizio 1.13. *Determinare il carattere della serie al variare di $\alpha \geq 0$.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \arctan(\alpha^n).$$

Osserviamo che

$$\lim_n \alpha^n = \begin{cases} 0 & 0 \leq \alpha < 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_n \arctan(\alpha^n) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \alpha < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \alpha = 1 \\ \frac{\pi}{2} & \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi per $\alpha \geq 1$ troviamo che la serie diverge usando il criterio del confronto asintotico: ha lo stesso comportamento di 2^n . Se $\alpha = 0$, la serie è costantemente uguale a zero, quindi ovviamente converge.

Consideriamo quindi il caso $0 < \alpha < 1$. Ricordiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_n \frac{\arctan(\alpha^n)}{\alpha^n} = 1,$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^n \arctan(\alpha^n)}{(2\alpha)^n} = 1,$$

Abbiamo quindi che, per $0 < \alpha < 1$, la serie richiesta ha lo stesso carattere della serie geometrica di ragione 2α .

Concludiamo quindi che abbiamo convergenza se $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, divergenza se $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Esercizio 1.14. *Determinare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n!}{n^n n!}.$$

L'esercizio si può risolvere applicando sia il criterio del rapporto che quello della radice, vediamo il secondo metodo. Usando la stima $n! < n^n$ otteniamo

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{2^n!}{n^n n!}} > \lim_n \sqrt[n]{\frac{2^{n(n-1)!}}{n^{2n}}} = \lim_n \frac{2^{(n-1)!}}{n^2} = +\infty,$$

dove abbiamo usato che un'esponenziale cresce più di una qualsiasi potenza: per ogni $\alpha > 0$ esiste \bar{n} tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ vale $2^{(n-1)!} > 2^n > n^\alpha$.

La serie quindi diverge.

Esercizio 1.15. *Discutere la convergenza della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{2(n+1)}}}{\frac{(2n)!}{n^{2n}}} &= \lim_n \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}} \frac{n^{2n}}{(2n)!} \\ &= \lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^{2n}(n+1)^2} \frac{n^{2n}}{(2n)!} \\ &= \lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} (n+1)^2} = \frac{4}{e^2} < 1, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato

$$\lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4, \quad \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \lim_n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = e^2.$$

La serie quindi converge.

Esercizio 1.16. *Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato*

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

Innanzitutto dobbiamo discutere la convergenza di due integrali generalizzati, uno in zero l'altro a infinito.

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_0^1 \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}} dx + \int_1^{\infty} \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}} dx$$

In zero. Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(x^{-1}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (0, \delta) \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}} \leq 2 \frac{1}{x^{1/3}}$$

Poiché, essendo $1/3 < 1$,

$$\int_0^1 2 \frac{1}{x^{1/3}} dx < +\infty,$$

allora deduciamo per confronto che

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}} dx < +\infty.$$

A infinito. In questo caso invece

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x^{-1})}{x^{-1}} = 1 \Rightarrow \exists \bar{x} > 0 : \forall x > \bar{x} \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}} \leq 2 \frac{1}{x^{4/3}},$$

Poiché, essendo $4/3 > 1$,

$$\int_1^{\infty} 2 \frac{1}{x^{4/3}} dx < +\infty,$$

allora deduciamo per confronto che

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}} dx < +\infty.$$

L'integrale richiesto è convergente.

1.3 A.A. 2020/2021

Esercizio 1.17. Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^{e^{-x}} - 1) \sinh x}{x^\alpha} dx.$$

Risoluzione omissa. Vedi Esercizio [1.12](#)

Esercizio 1.18. Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato (e, se possibile, darne una stima)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(1/x)}{\sqrt{|x^2 - 1|}} dx.$$

Risoluzione omissa. Si noti tuttavia che sarà necessario discutere la convergenza dell'integrale nei punti $-\infty, -1, 0, +1, +\infty$. Essendo la funzione integranda dispari, se l'integrale dovesse risultare convergente, il valore ottenuto sarà necessariamente zero. Il fatto che la funzione sia dispari inoltre ci permette di concludere anche che la funzione è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $-\infty$ se e solo se è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $+\infty$. Analogamente la funzione è integrabile in senso generalizzato in un intorno di -1 se e solo se è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $+1$.

Esercizio 1.19. Dire per quali valori di x converge la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^{-2})}{\log\left(\frac{n+4}{n}\right)} \left(\frac{2x+4}{x-2}\right)^n.$$

Risoluzione omissa. Vedi Esercizio [1.11](#)

Esercizio 1.20. Dire per quali valori positivi a, b, c converge la seguente serie effettuando tutti i calcoli necessari

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a (\log_b n)^c}.$$

Risoluzione omissa. Cambiando la base al logaritmo ci si riconduce ad un esercizio presente negli appunti del corso. Usare il metodo della condensata.

Esercizio 1.21. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arcsin(n^\alpha)}{\sin \frac{1}{n}},$$

dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie è ben definita e per questi determinarne il carattere.

Esercizio 1.22. Dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{|x^3 - x^2|^{\frac{1}{2}}} ds$$

converge in senso generalizzato.

1.4 A.A. 2021/2022

Esercizio 1.23. Dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^k \right]^{-1}.$$

Esercizio 1.24. Dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \sin(\pi x) + f(x)}{|2x - 1|^{\alpha}} dx$$

dove $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 2022 \\ \arctan(x - 2022) & \text{se } x > 2022 \end{cases}$$

I punti problematici sono $x = \frac{1}{2}$ (in cui si annulla il denominatore) e ovviamente a infinito. Per esercizio mostrare che il seguente limite ha valore reale positivo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \sin(\pi x)}{(2x - 1)^2}.$$

Ne consegue che l'integrando si comporta come la funzione $|2x - 1|^{2-\alpha}$ in un intorno di $\frac{1}{2}$. Quindi l'integrale converge in un intorno di questo punto se e solo se $2 - \alpha > -1$ ovvero se e solo se $\alpha < 3$.

Per quanto riguarda il comportamento a infinito notiamo che il numeratore soddisfa $\frac{\pi}{4} < 1 - \sin(\pi x) < \frac{\pi}{2} + 2$ in un intorno di $+\infty$. Quindi abbiamo

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{|2x - 1|^{\alpha}} < \frac{1 - \sin(\pi x) + f(x)}{|2x - 1|^{\alpha}} < \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) \cdot \frac{1}{|2x - 1|^{\alpha}}$$

in un intorno di $+\infty$. Da ciò possiamo dedurre che la funzione è integrabile se converge l'integrale della funzione $|2x - 1|^{-\alpha}$ in un intorno di $+\infty$. Essa asintoticamente si comporta come $x^{-\alpha}$, quindi se $\alpha > 1$ l'integrale converge.

Quindi tutto l'integrale converge se e solo se $\alpha \in]1, 3[$.

Si noti che in assenza della funzione f avremmo solo

$$0 < \frac{1 - \sin(\pi x)}{|2x - 1|^{\alpha}} < 2 \cdot \frac{1}{|2x - 1|^{\alpha}}$$

in un intorno di $+\infty$. Ciò potrebbe permettere di ottenere la convergenza dell'integrale anche per $\alpha \leq 1$. Ciò tuttavia non accade come vedremo col prossimo ragionamento.

(questa parte sarà aggiunta in seguito)

La funzione f è stata quindi aggiunta per rendere più semplice l'esercizio.

Esercizio 1.25. Determina il raggio di convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{3n}{2n} x^n$$

Il raggio di convergenza sarà $R = 1/\ell$ dove

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{3n+3}{2n+2}}{\binom{3n}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(3n+3)!}{(2n+2)!(n+1)!}}{\frac{(3n)!}{(2n)!n!}} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} = \frac{27}{4}$$

da cui $R = 4/27$.

Esercizio 1.26. Determina il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ definita come

$$x_0 = 100, \quad x_{n+1} = \frac{3x_n}{x_n + 4}, \quad n \in \mathbb{N}$$

L'esercizio è simile ad uno presente nelle note del corso. Risoluzione omissa.

Esercizio 1.27. Determina il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k) \sin\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Risoluzione omissa. Suggerimento: provare che la serie è assolutamente convergente.

Esercizio 1.28. Determina il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2 - 3 \sin n)^2}{\sqrt{3^n + 4n}}.$$

Qui do solo una risoluzione schematica. Dapprima usare il criterio del confronto asintotico per mostrare che questa serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{3^{n/2}}$$

(scrivere tutti i passaggi necessari per esercizio) poi si può utilizzare il criterio del rapporto asintotico (o della radice asintotico, a scelta) per mostrare che è convergente. I dettagli sono lasciati per esercizio.

1.5 A.A. 2022/2023

Esercizio 1.29. Determina il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin^2 n}{2} \left(\arctan(4n^2 - 36n + 77) + \frac{1}{4n^2 - 36n + 77} \right) \right]^n.$$

Innanzitutto osserviamo che $4n^2 - 36n + 77 < 0$ per $n \in \{4, 5\}$ essendo le soluzioni dell'equazione di secondo grado associata associata

$$x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 77}}{4} = \frac{18 \pm \sqrt{4 \cdot (9^2 - 77)}}{4} = \frac{9 \pm 2}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{7}{4}, x_2 = \frac{11}{4}.$$

Quindi, consideriamo la serie resto $\sum_{n=6}^{+\infty} a_n$ che risulta a termini positivi poiché $\tan y + \frac{1}{y} > 0$ se $y > 0$. Inoltre vale

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[\arctan y + \frac{1}{y} \right] = \frac{\pi}{4} < 1. \quad (5)$$

A questo punto consideriamo la serie a termini positivi

$$\sum_{n=6}^{+\infty} b_n = \sum_{n=6}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\arctan(4n^2 - 36n + 77) + \frac{1}{4n^2 - 36n + 77} \right) \right]^n,$$

che converge usando il criterio della radice asintotico grazie al limite in (5). Concludiamo osservando che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \geq 6$. Quindi per il criterio del confronto abbiamo la convergenza della serie richiesta.

Importante! Si osservi che NON è possibile argomentare nel modo seguente: *la serie data converge per il criterio della radice asintotico essendo*

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_n \sqrt[n]{b_n} = \frac{\pi}{4} < 1.$$

Infatti quanto sopra non permette di ottenere la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tramite il criterio in quanto le precedenti disuguaglianze non garantiscono l'esistenza del limite $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ che infatti non esiste.

Esercizio 1.30. Determina il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{\sqrt[3]{n}}$ dove la successione $(b_n)_n$ è periodica di periodo 10 (ovvero $b_{n+10} = b_n$ per ogni $n \geq 1$) e vale $\sum_{k=1}^{10} b_k = 0$.

L'obiettivo è usare il criterio di Dirichlet. La successione $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ è decrescente e infinitesima. Se riusciamo a dimostrare che la successione delle ridotte

$$s_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

è limitata, allora otteniamo la convergenza della serie richiesta. Dalle proprietà della successione $(b_n)_n$ deduciamo che, per $n = 10m + r$ con $m, r \in \mathbb{N}$ e $1 < r \leq 10$,

$$s_n = s_{10m+r} = \sum_{k=1}^{10m+r} b_k = \sum_{k=1}^{10m} b_k + \sum_{k=10m+1}^{10m+r} b_k = m \left(\sum_{k=1}^{10} b_k \right) + \sum_{k=1}^r b_k = \sum_{k=1}^r b_k = s_r.$$

Concludiamo quindi che la successione s_n assume solo dieci possibili valori: $s_1, s_2, \dots, s_9, s_{10}$. Quindi s_n è limitata.

Esercizio 1.31. Dire se i seguenti integrali in senso generalizzato sono convergenti o divergenti:

$$\int_{-\infty}^{10} \sqrt{y^2 + 1} - y \, dy, \quad \int_0^{\pi^2} \frac{\sqrt{\sin \sqrt{x}}}{e^{-x} - 1} \, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \, ds.$$

Esercizio 1.32. Dire per quali valori reali del parametro λ converge la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n.$$

Successivamente scrivere dominio e valore assunto al variare di x dalla funzione

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n.$$

Risoluzione breve. Si nota che siamo in presenza di una serie geometrica. Il valore λ deve soddisfare $-1 < 1 - \frac{1}{x} < 1$, condizione valida se e solo se $\lambda > 1/2$. A questo punto la funzione S ha dominio $]1/2, +\infty[$ e il valore assunto dalla funzione è la somma della serie che quindi è

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n - 1 = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} - 1 = x - 1.$$

Esercizio 1.33. Determina il carattere della seguente serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} (\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3})$.

La serie diverge. Per dimostrarlo si usa il criterio del confronto asintotico dimostrando che il seguente limite esiste reale positivo

$$\lim_n \frac{\sqrt{n} (\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3})}{\frac{1}{n}}.$$

I dettagli sono lasciati per esercizio (suggerimento: raccogliere il termine $\sqrt{n^3}$ al numeratore).

Esercizio 1.34. Determina il carattere della serie

$$\sum_{n=12}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \log n}.$$

Risoluzione omessa. Usare il criterio della radice asintotico.

1.6 A.A. 2023/2024

Esercizio 1.35. Determina il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5) \log(n+5)}{n^2 \sqrt{n}}.$$

Dopo aver notato che

$$\lim_n \frac{n+5}{n} \frac{\log(n+5)}{n^\alpha} = 0$$

per ogni $\alpha > 0$, scegliendo ad esempio $\alpha = 1/4$ si trova

$$\lim_n \frac{(n+5) \log(n+5)}{n^{5/4}} = 0.$$

Da ciò deduciamo che la serie converge grazie al criterio del confronto asintotico.

Esercizio 1.36. 1) Discutere la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$; e scrivere la somma della serie;

2a) Dimostrare che $\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2n+1}$.

2b) Sapendo che le serie $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sono serie convergenti di numeri non negativi, dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ è convergente.

Ponendo $y = x^2$ troviamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n$; che converge uniformemente per ogni $y \in \mathbb{R}$ (spiegare perché) con somma e^y . Troviamo quindi che la serie data converge uniformemente per ogni $x \in \mathbb{R}$ con somma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} = e^{x^2}$. A questo punto possiamo scambiare limite e integrale nelle seguenti identità

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{x^2} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} dx = \int_0^1 \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} x^{2n} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} x^{2n} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \int_0^1 x^{2n} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Per l'ultimo punto, data la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ possiamo affermare che esiste $N > 0$ tale che $0 \leq b_n \leq 1$ per ogni $n > N$. Quindi $0 \leq a_n b_n \leq a_n$ per ogni $n > N$ e concludiamo usando il criterio del confronto.

Esercizio 1.37. Data la serie

$$\sum_{n \geq 1} n \frac{x^{n+1}}{(x+1)^n} \quad x \geq 0,$$

trovare l'insieme di convergenza puntuale, trovare l'insieme dove c'è convergenza uniforme, calcolare la somma ove possibile.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$ e la sua serie derivata $\sum_{n=1}^{+\infty} n y^{n-1} = \frac{1}{(1-y)^2}$ convergono puntualmente su $[-1, 1[$ e uniformemente sui compatti contenuti in questo intervallo. Ponendo $y = \frac{x}{x+1}$, troviamo

$$\sum_{n \geq 1} n \frac{x^{n+1}}{(x+1)^n} = \frac{x^2}{x+1} \sum_{n=1}^{+\infty} n y^{n-1} = \frac{x^2}{x+1} \frac{1}{(1-y)^2} = \frac{x^2}{x+1} (x+1)^2 = x^2(x+1)$$

dove quanto sopra vale per i valori di $x \geq 0$ tali che $y = \frac{x}{x+1} \in [-1, 1[$. Questa condizione vale per tutti gli $x \geq 0$. Concludiamo poi osservando che la convergenza uniforme si ha sui compatti del tipo $[0, a]$ con $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.38. Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+4}}{n+1},$$

trovare l'insieme di convergenza puntuale, trovare l'insieme dove c'è convergenza uniforme, calcolare la somma ove possibile.

Possiamo porre $y = x^3$ e trovare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+4}}{n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1}$$

Nel membro destro riconosciamo la serie integrale della serie geometrica con somma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-y)$$

che converge puntualmente su $[-1, 1[$. Andando a ritroso possiamo quindi scrivere

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+4}}{n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} = -x \ln(1-x^3)$$

che converge puntualmente su $[-1, 1[$. Per la convergenza uniforme notiamo che essa converge uniformemente su compatti del tipo $[-r, r]$ con $r < 1$.

Esercizio 1.39. Determinare per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{(e^{\alpha x} - 1)x}{\sqrt[3]{x}(x^3 + x^2)^{1-\alpha}} dx.$$

Studiamo dapprima la convergenza dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{(e^{\alpha x} - 1)x}{\sqrt[3]{x}(x^3 + x^2)^{1-\alpha}} dx.$$

Dapprima osserviamo che le due funzioni

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x}(x^3 + x^2)^{1-\alpha}} \quad e \quad x^{3(\alpha-1)+2/3}$$

hanno lo stesso comportamento a infinito. In particolare notiamo che per $\alpha > 0$ comanda il termine con l'esponenziale e quindi l'integrando non tende a zero, da cui deduciamo la divergenza dell'integrale. Per $\alpha = 0$ invece la funzione integranda è identicamente nulla, quindi l'integrale converge (anche in un intorno di zero). Per $\alpha < 0$ l'integrando va come $-x^{-7/3}$ e quindi l'integrale è convergente. Concludiamo quindi che a infinito l'integrale converge per $\alpha \leq 0$. Analizziamo ora la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{(e^{\alpha x} - 1)x}{\sqrt[3]{x}(x^3 + x^2)^{1-\alpha}} dx.$$

Usando il limite fondamentale notiamo che l'integrando va come $\alpha x^{-\frac{1}{3}+2\alpha}$. Quindi l'integrale converge se e solo se $-\frac{1}{3} + 2\alpha > -1$ ovvero $\alpha > -1/3$. Concludiamo quindi che l'integrale converge per $-\frac{1}{3} < \alpha \leq 0$.

Esercizio 1.40. Data la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}(4x-3)^n$, trovare l'insieme di convergenza puntuale, trovare l'insieme dove c'è convergenza uniforme, calcolare la somma ove possibile.

Poniamo $y = 4x-3$ e troviamo la serie di potenze $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}y^n$. Dopo aver mostrato che il raggio di convergenza è

1 e aver motivato che la serie converge semplicemente per $y = -1$, assolutamente per $|y| < 1$, concludiamo anche che converge uniformemente sui compatti del tipo $[-a, a]$ con $|a| < 1$. Notiamo che

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}y^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n+1}y^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}y^{n+1} - y - \frac{y^2}{2} = -\ln(1-y) - y - \frac{y^2}{2}$$

(si veda l'Esercizio 1.38 per analogia). Si lascia per esercizio la gestione del ritorno alla variabile x .

Esercizio 1.41. Determinare per quali valori $y \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (4y-3)^n$.

Calcoli lasciati per esercizio. Dopo aver introdotto la variabile $x = 4y - 3$ troviamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$. Per esercizio provare che il raggio di convergenza è $1/4$. Successivamente per $x = -1/4$ è possibile utilizzare il criterio di Leibniz provando che vale

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \text{ dove } a_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n},$$

da cui segue che la successione è decrescente. Nel caso $x = 1/4$ la serie diverge. La cosa è meno intuitiva ed una spiegazione dettagliata non era pretesa. Una possibile strategia è mostrare per induzione che vale $a_n > \frac{1}{n+1}$ usando il calcolo precedente

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} a_n > \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2}$$

dove l'ultima maggiorazione segue dal fatto che

$$(n+2)(2n+1) = 2n^2 + 5n + 2 > 2n^2 + 3n + 2 = (2n+2)(n+1).$$

Si lascia per esercizio la gestione del ritorno alla variabile x .

Esercizio 1.42. Per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie?

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{\alpha \sin n}}{n^\alpha + 1}$$

1.7 A.A. 2024/2025

Esercizio 1.43. Dire se la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin n)(1 - \cos(1/n!))}{n^{-n}}.$$

Dimostreremo che la serie è assolutamente convergente. Dapprima notiamo che

$$\left| \frac{(\sin n)(1 - \cos(1/n!))}{n^{-n}} \right| \leq \frac{1 - \cos(1/n!)}{n^{-n}} = a_n$$

Quindi mostreremo che la serie di termine a_n converge da cui dedurremo per confronto che la serie data è assolutamente convergente. Successivamente, essendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, troviamo che la serie di termine a_n , grazie al criterio del confronto asintotico ha lo stesso carattere della serie di termine generale

$$b_n = \frac{(1/n!)^2}{n^{-n}} = \frac{n^{-n}}{(n!)^2}.$$

Completare l'esercizio utilizzando il criterio del rapporto asintotico (il limite farà zero).

Esercizio 1.44. Discutere per quali valori convergono le seguenti serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n \ln n}$$

Esercizio 1.45. Discutere la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n - 1}, \quad \sum_{n=20}^{\infty} \sqrt{n+10} - \sqrt{n-10}.$$

Esercizio 1.46. Studiare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n^4) + n^{3/5}}{n^{3/5} \log(n^n + n!)}$$

2 Continuità e differenziabilità, problemi di massimo e minimo

2.1 A.A. 2018/2019

Esercizio 2.1. *Discutere, della seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Scrivere il valore del gradiente di f al variare di $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Facilmente si vede che la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ in quanto rapporto fra polinomi (usando il teorema di continuità del rapporto fra funzioni continue). Calcoliamo le derivate parziali nei punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 + y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{4y^3(x^2 + y^2) - 2y(x^3 + y^4)}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Le derivate parziali quindi esistono in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Quindi per $(x, y) \neq (0, 0)$ abbiamo

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 + y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{4y^3(x^2 + y^2) - 2y(x^3 + y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

Poiché il gradiente è continuo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, per il teorema del differenziale totale la funzione è differenziabile per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$.

Passiamo ora a studiare le proprietà di f nell'origine $(0, 0)$. Per la continuità dobbiamo mostrare che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

A questo scopo notiamo che per $(x, y) \neq (0, 0)$ possiamo ottenere le seguenti maggiorazioni:

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^3 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 \cdot |x|}{x^2 + y^2} + \frac{y^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| + y^2,$$

dove abbiamo usato che $x^2 \leq x^2 + y^2$ e $y^2 \leq x^2 + y^2$. Valendo $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} |x| + y^2 = 0$, possiamo concludere che $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$, quindi f è continua in zero. Quindi f è continua in tutto il dominio.

Studiamo ora l'esistenza delle derivate parziali in $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 0}{h} = 0, \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che le derivate parziali esistono in tutto il dominio.

Studiamo ora la differenziabilità di f in $(0, 0)$. Dobbiamo vedere se possiamo mostrare che vale

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (6)$$

dove “ \cdot ” denota il prodotto scalare su \mathbb{R}^2 , in particolare

$$\nabla f(0, 0) \cdot (x, y) = (1, 0) \cdot (x, y) = x.$$

Calcoliamo il termine nel limite

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{\frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} - 0 - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{x^3 + y^4 - x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y^4 - xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Se ci avviciniamo all'origine lungo la retta $y = x$ troviamo che

$$\frac{f(t, t) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (t, t)}{\sqrt{t^2 + t^2}} = \frac{t^4 - t^3}{2^{3/2}|t|^{3/2}} = 2^{-3/2} \left(\sqrt{|t|} + \frac{t}{|t|} \right)$$

dove il secondo addendo in parentesi non ammette limite per $t \rightarrow 0$. Quindi non può valere il limite (6).
Quindi f non è differenziabile in $(0, 0)$.

Esercizio 2.2. Dato l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \leq 2\},$$

determinare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$ nell'insieme E dopo aver dimostrato che questi esistono.

La funzione ammette massimo e minimo su E in quanto l'insieme è chiuso e limitato (infatti è un sottinsieme della palla di \mathbb{R}^2 di raggio $\sqrt{2}$ centrata nell'origine).

Osserviamo che l'insieme E è simmetrico rispetto all'asse delle x e vale $f(x, y) = f(x, -y)$. Questa simmetria della funzione ci faciliterà lo studio del problema. Inoltre vale anche $f(x, y) = f(-x, y)$, ma tale proprietà risulta utile in questo caso solo nella ricerca dei punti critici.

Cerchiamo innanzitutto i punti critici di f , che risulta una funzione di classe C^∞ , essendo un polinomio. I punti critici sono quindi solo i punti che soddisfano $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Risolvendo quindi il sistema

$$\nabla f(x, y) = (4x^3 - 2x, 2y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2x(2x^2 - 1) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

troviamo i punti critici $(0, 0)$ e $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. La matrice Hessiana della funzione è

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Valutando questa nei punti critici otteniamo

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad H_f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'origine è un punto di sella (un autovalore positivo e uno negativo), gli altri due punto sono di minimo locale (due autovalori positivi). Poiché $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \in E$, esso dovrà essere considerato come possibile minimo della funzione f su E . Quindi calcoliamo

$$\bullet f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\frac{1}{4}.$$

Passiamo alla seconda parte del problema. Abbiamo già individuato un punto interno candidato ad essere punto di minimo. Studiamo quindi la frontiera dell'insieme E . Disegnando E notiamo che la sua frontiera presenta tre *spigoli* nei punti $(0, 0)$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$, che sono quindi da considerare fra i candidati punti di estremo:

$$\bullet f(0, 0) = 0, \quad \bullet f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}) = \frac{5}{4}.$$

La parità della funzione nella variabile y ci permette di studiare solo l'insieme $E^+ = \{(x, y) \in E \mid y \geq 0\}$. Questo accorgimento ci permette, *dopo aver aggiunto il punto candidato* $(\sqrt{2}, 0)$ con valore

$$\bullet f(\sqrt{2}, 0) = 2$$

di studiare massimi e minimi locali negli insiemi

$$\begin{aligned} \partial E_1 &= \{(x, y) \mid y = \sqrt{3}x, x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})\}, \\ \partial E_2 &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2, x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})\}. \end{aligned}$$

La semplice sostituzione $y = \sqrt{3}x$ ci permette di studiare gli estremi locali di f su ∂E_1 tramite lo studio della funzione

$$g(x) = f(x, \sqrt{3}x) = x^4 - x^2 + 3x^2 = x^4 + 2x^2, \quad x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

che è crescente nell'intervallo considerato in quanto

$$g'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1) > 0, \quad \forall x > 0.$$

Non ha quindi punti di estremo locale. La sostituzione $y^2 = 2 - x^2$ ci permette di studiare gli estremi locali di f su ∂E_2 tramite lo studio della funzione

$$h(x) = f(x, y)|_{y^2=2-x^2} = x^4 - x^2 + 2 - x^2 = x^4 - 2x^2 + 2, \quad x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}).$$

La derivata $h'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ si annulla per $x = -1, 0, 1$, di cui $x = 1$ appartiene all'intervallo considerato. Quindi il candidato risulta $(1, 1)$ e il suo simmetrico $(1, -1)$ con

$$\bullet \quad f(1, \pm 1) = 1$$

(Uno studio più dettagliato porterebbe alla conclusione che si tratta di un minimo locale di h , ma non necessariamente di un minimo locale di f ristretta all'insieme E).

Concludiamo, confrontando i candidati nelle formule segnate con \bullet , che $\min_E f = -\frac{1}{4}$ e $\max_E f = 2$.

Alternative: se non notiamo la parità della funzione rispetto all'asse x possiamo semplicemente calcolare gli estremi locali di f sugli insiemi

$$\begin{aligned} \partial E_1 &= \{(x, y) \mid y = \sqrt{3}x, x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})\}, \\ \partial E_1^{bis} &= \{(x, y) \mid y = -\sqrt{3}x, x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})\}, \\ \partial E_2^{bis} &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2, y \in (-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})\}. \end{aligned}$$

I calcoli per ∂E_1^{bis} sono analoghi a quelli per ∂E_1 già visti sopra. Nel caso di ∂E_2^{bis} si potrebbero scomodare i moltiplicatori di Lagrange. In questo caso il punto $(\sqrt{2}, 0)$ risolverà il sistema e non emergerà da considerazioni legate alla simmetria dell'insieme. Dobbiamo quindi risolvere:

$$\begin{cases} 2x(2x^2 - 1) = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x(2x^2 - 1 - \lambda) = 0 \\ 2y(1 - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

Ha senso studiare prima la seconda equazione che porta alla scelta di $y = 0$ o $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} 2x(2x^2 - 1 - \lambda) = 0 \\ y = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (\pm\sqrt{2}, 0),$$

$$\begin{cases} 2x(2x^2 - 2) = 0 \\ \lambda = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 1 \\ y^2 = 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 1 \\ \lambda = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

Quindi troviamo i punti $(0, \pm\sqrt{2})$, $(\pm 1, \pm 1)$. I punti $(\sqrt{2}, 0)$ e $(1, \pm 1)$ appartengono all'insieme ∂E_2^{bis} e vanno considerati. Si noti infatti che il sistema impostato con i moltiplicatori di Lagrange ci dà tutti i punti di estremo locale di f sull'intera circonferenza di raggio $\sqrt{2}$.

Infine si noti che tutti i punti di estremo trovati sono coerenti con le simmetrie della funzione.

Esercizio 2.3. Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = xy^2 - x^2 - 2y^2 + 2x,$$

determinarne i punti critici e la loro natura. Dire se la funzione ammette massimi e minimi globali nel suo dominio.

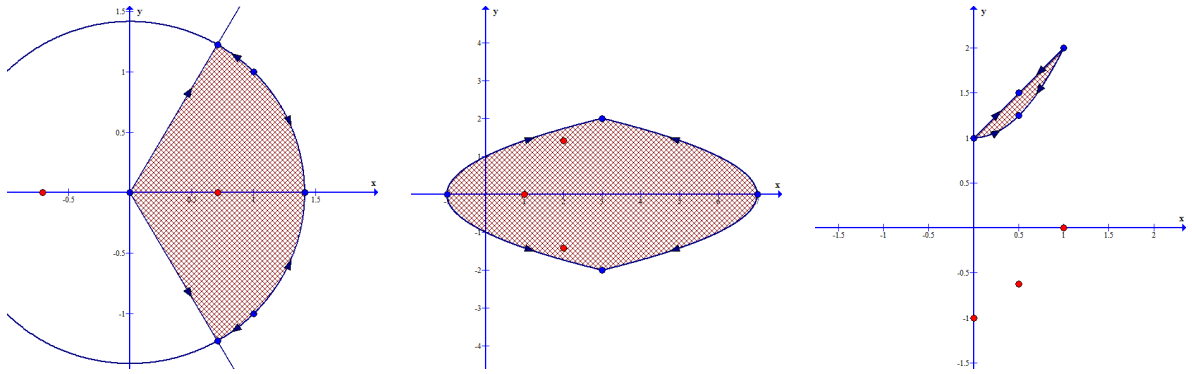


Figura 1: Vedi Esercizio [2.2](#) a sinistra, Esercizio [2.3](#) al centro, Esercizio [2.5](#) a destra.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 1 \leq x \leq 7 - y^2\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

Calcoliamo il gradiente

$$\nabla f(x, y) = (y^2 - 2x + 2, 2xy - 4y)$$

che si annulla nei punti che risolvono il sistema

$$\begin{cases} y^2 - 2x + 2 = 0 \\ 2y(x - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2 = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

ovvero i punti $(1, 0)$ e $(2, \pm\sqrt{2})$. Per determinarne la natura calcoliamo la matrice hessiana

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 2x - 4 \end{pmatrix}.$$

e valutarla nei punti precedentemente trovati:

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad H_f(2, \pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -2 & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

Il punto $(1, 0)$ risulta punto di massimo locale (due autovalori negativi), mentre per gli altri punti troviamo un determinante negativo (quindi si tratta di punti di sella).

Concludiamo che essendo

$$f(t, t) = t^3 - 3t^2 + t, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t, t) = \pm\infty,$$

la funzione non ammette massimi e minimi assoluti su \mathbb{R}^2 .

Passiamo ora allo studio di f ristretta all'insieme E . L'insieme è chiuso e limitato. La limitatezza si ottiene notando che

$$y^2 - 1 \leq 7 - y^2 \Rightarrow y \in [-2, 2]$$

e che

$$-1 \leq y^2 - 1 \leq x \leq 7 - y^2 \leq 7.$$

Quindi $E \subseteq [-1, 7] \cup [-2, 2]$. La funzione è continua su un compatto, quindi ammette massimo e minimo. La funzione ammette massimo locale interno $(1, 0)$ con valore

- $f(1, 0) = 1$.

Studiamo ora f sulla frontiera ∂E , che è costituita dai due archi di parabola:

$$\begin{aligned}\partial E_1 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 - 1, y \in (-2, 2)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 - 1, x \in [-1, 3]\}, \\ \partial E_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 7 - y^2, y \in (-2, 2)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 7 - y^2, x \in (3, 7]\},\end{aligned}$$

separati dai punti $(3, \pm 2)$ tali che

$$\bullet \quad f(3, \pm 2) = 1.$$

Studiando f ristretta a ∂E_1 troviamo

$$g_1(x) = f(x, y)|_{y^2=x+1} = x - 2, \quad x \in [-1, 3],$$

che dà come candidato punto $(-1, 0)$ tale che

$$\bullet \quad f(-1, 0) = -3.$$

Analogamente, per f ristretta a ∂E_2 troviamo

$$g_2(x) = f(x, y)|_{y^2=7-x} = -2x^2 + 11x - 14, \quad x \in (3, 7],$$

che, essendo monotona decrescente dà come candidato il punto di estremo $(7, 0)$ tale che

$$\bullet \quad f(7, 0) = -35.$$

Riassumendo troviamo, confrontando i candidati nelle formule segnate con \bullet , che $\min_E f = -35$ e $\max_E f = 1$ (raggiunto in tre punti distinti).

Esercizio 2.4. Data la funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z, y = z^2\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

La funzione f ammette come unico punto critico l'origine $O = (0, 0, 0)$. Lo studio della matrice hessiana in questo punto porta alla conclusione che si tratta di un punto di sella (dettagli per esercizio).

Mostriamo che l'insieme chiuso E è anche limitato. A questo scopo scriviamo

$$z = x^2 + y^2 \geq y^2 = z^4 \quad \Rightarrow \quad z \geq z^4,$$

che ha soluzioni $z \in [0, 1]$. A questo punto deve essere $x^2 + y^2 = z \leq 1$. Quindi concludiamo ad esempio che

$$E \subseteq [-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, 1].$$

Essendo la funzione continua, esistono massimo e minimo di f su E che si può scrivere come insieme di livello zero per la funzione

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z, y - z^2).$$

Per individuare i punti di estremo, usiamo il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Dapprima notiamo che

$$J_F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 0 & 1 & -2z \end{pmatrix}$$

non ha rango massimo se $x = 0$ e $4yz = 1$. Nessun punto di E soddisfa queste due richieste, infatti la validità della prima implica $y^2 = z$ e $y = z^2$, valide solo se $y = z = 0$ oppure $y = z = 1$. Quindi J_F ha rango massimo in tutti i punti di E .

Impostiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 2y + \mu \\ -2z = -\lambda - \mu 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1 - \lambda) = 0 \\ 2y(1 - \lambda) = \mu \\ 2z(\mu - 1) = -\lambda \\ x^2 + y^2 = z \\ y = z^2 \end{cases}$$

e distinguiamo i casi $x = 0$ e $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y(1 - \lambda) = \mu \\ 2z(\mu - 1) = -\lambda \\ y^2 = z \\ y = z^2 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (0, 1, 1)\}$$

(ignorando la seconda e terza equazione)

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ 0 = \mu \\ z = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{7}{16} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\pm \frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Riassumendo troviamo

$$\bullet f(0, 0, 0) = 0, \quad \bullet f(0, 1, 1) = 0, \quad \bullet f\left(\pm \frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Concludiamo che $\min_E f = 0$ e $\max_E f = \frac{1}{4}$.

Esercizio 2.5. Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = x^3 - x^2y + y^2 - x^2 - xy + 2y - x,$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y - 1 \leq x\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

Calcoliamo gradiente ed Hessiana della funzione f :

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 2xy - 2x - y - 1, -x^2 + 2y - x + 2),$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y - 2 & -2x - 1 \\ -2x - 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo dove si annulla il gradiente:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - 2x - y - 1 = 0 \\ y = \frac{1}{2}(x^2 + x - 2) \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow (x, y) \in \{(0, -1), \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}\right), (1, 0)\}$$

dove i calcoli sono lasciati per esercizio. Valutiamo la matrice hessiana in questi punti:

$$H_f(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$H_f\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}\right) = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

I primi due punti hanno matrice hessiana con determinante negativo, quindi autovalori di segno opposto: sono punti di sella. Invece il terzo punto ha matrice hessiana con determinante e traccia positivi, quindi due autovalori positivi: è un punto di minimo locale con valore $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}\right) = -\frac{65}{64}$.

Passiamo allo studio di f ristretta all'insieme chiuso E , che risulta limitato essendo $E \subseteq [0, 1] \times [1, 2]$: infatti dalla disequazione $x^2 \leq x$ segue che $x \in [0, 1]$, quindi troviamo $0 \leq x^2 \leq y - 1 \leq x \leq 1$ che porta a $y \in [1, 2]$.

La funzione è continua, quindi per il teorema di Weierstrass, ha massimo e minimo su E . Notiamo che il candidato $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}\right)$ non appartiene a questo insieme.

Studiamo quindi la frontiera ∂E , che risulta costituita da un segmento e un arco di parabola.

$$\partial E_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1, x \in (0, 1)\},$$

$$\partial E_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 1, x \in (0, 1)\},$$

e dai punti $(0, 1)$ e $(1, 2)$ tali che

$$\bullet \quad f(0, 1) = f(1, 2) = 3.$$

La funzione f ristretta a ∂E_1 porta alla funzione (calcoli per esercizio)

$$g(x) = \dots = -2x^2 + 2x + 3, \quad x \in (0, 1),$$

con derivata $g'(x) = -4x + 2$ che si annulla in $x = \frac{1}{2}$ con derivata seconda negativa individuando un punto di massimo locale (su ∂E_1 !). Abbiamo quindi il candidato $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ con valore

$$\bullet \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}.$$

Similmente, la funzione f ristretta a ∂E_2 porta alla funzione (calcoli per esercizio)

$$h(x) = \dots = 2x^2 - 2x + 3, \quad x \in (0, 1),$$

con derivata $g'(x) = 4x - 2$ che si annulla in $x = \frac{1}{2}$ con derivata seconda positiva individuando un punto di minimo locale (su ∂E_2 !). Abbiamo quindi il candidato $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ con valore

$$\bullet \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2}.$$

Confrontando i valori assunti nei punti candidati, notiamo che $\min_E f = \frac{5}{2}$ e $\max_E f = \frac{7}{2}$.

Esercizio 2.6. Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = xy^2 + 5xy - 8y^2 - 40y$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre gli eventuali punti di estremo vincolato della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 2\}.$$

Verificare se f assume massimo e minimo assoluto su E (si chiedono i punti di estremo, non il valore assunto!).

Calcoliamo gradiente ed hessiana della funzione f :

$$\nabla f(x, y) = (y^2 + 5y, 2xy + 5x - 16y - 40),$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y + 5 \\ 2y + 5 & 2x - 16 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo dove si annulla il gradiente:

$$\begin{cases} y(y+5) = 0 \\ 2xy + 5x - 16y - 40 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -5 \\ x = 8 \end{cases}$$

e valutiamo la matrice hessiana in questi punti:

$$H_f(8, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(8, -5) = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concludiamo quindi che i punti sono entrambi di sella essendo negativi i determinanti delle due matrici.

Passiamo ora allo studio di f ristretto ad E , insieme chiuso e non limitato: è un'iperbole equilatera. Notiamo che i valori assunti dalla funzione f su E possono essere espressi rispetto alla sola variabile y :

$$g(y) = f(x, y)|_{xy=2} = 2y + 10 - 8y^2 - 40y = -8y^2 - 38y + 10, \quad y \neq 0.$$

Poiché $g'(y) = -16y - 38$ si annulla per $y = -\frac{19}{8}$ con derivata seconda negativa troviamo che il punto $(-\frac{16}{19}, -\frac{19}{8})$ è punto di massimo locale di f ristretta ad E (si noti che la consegna non chiede il valore assunto). Facilmente notiamo inoltre che

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \pm\infty \\ (x, y) \in E}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} g(y) = -\infty$$

quindi $f|_E$ non ammette minimo assoluto. Invece

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ (x, y) \in E}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0,$$

che porta a concludere che $f|_E$ ammette massimo assoluto nel punto $(-\frac{16}{19}, -\frac{19}{8})$ precedentemente individuato.

2.2 A.A. 2019/2020

Esercizio 2.7. Classificare i punti critici della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = 2y^2 - 2y(\sin x + \cos x) + \sin(2x).$$

Disegnare l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \pi, |xy| \leq 1\}$$

e determinare, se esistono,

$$\min_{\mathbb{R}^2} f, \quad \max_{\mathbb{R}^2} f; \quad \min_E f, \quad \max_E f.$$

Dopo aver notato che la funzione è di classe almeno C^2 , calcoliamo gradiente e matrice hessiana:

$$\nabla f(x, y) = (-2y \cos x + 2y \sin x + 2 \cos(2x), 4y - 2(\sin x + \cos x))$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y \sin x + 2y \cos x - 4 \sin(2x) & -2 \cos x + 2 \sin x \\ -2 \cos x + 2 \sin x & 4 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo i punti in cui si annulla il gradiente risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \cos(2x) = y(\cos x - \sin x) \\ y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(2x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) \\ y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \cos(2x) = 0 \\ y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \end{cases}$$

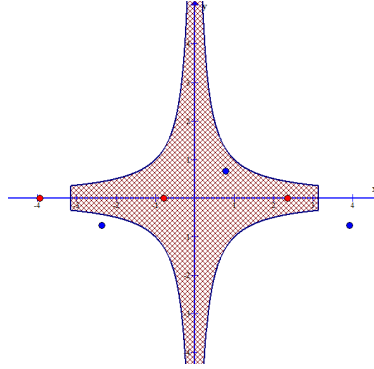


Figura 2: Vedi Esercizio [2.7](#)

da cui troviamo i punti candidati

$$\left(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, 0\right), \quad \left(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{7}{4}\pi + 2k\pi, 0\right).$$

In corrispondenza di questi punti valutiamo la matrice hessiana:

$$H_f\left(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad H_f\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, 0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$H_f\left(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad H_f\left(\frac{7}{4}\pi + 2k\pi, 0\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $\left(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sono punti di sella essendo il determinante della matrice hessiana negativo in questi punti. Gli altri presentano determinante positivo, quindi dal segno della traccia segue che i punti $\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, 0\right)$ e $\left(\frac{7}{4}\pi + 2k\pi, 0\right)$ sono tutti minimi locali stretti con valore

$$\bullet \quad f\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, 0\right) = f\left(\frac{7}{4}\pi + 2k\pi, 0\right) = -1.$$

La funzione è periodica di periodo 2π nella x e limitata inferiormente, ma non superiormente, infatti

$$2y^2 - 4y - 1 \leq f(x, y) \leq 2y^2 + 4y + 1.$$

Quindi un eventuale minimo sarà raggiunto ad esempio nell'insieme $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$. Poiché $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} 2y^2 - 4y - 1 = +\infty$ allora la funzione f ammetterà minimo (infatti ogni successione che tende a $\inf_{[0, 2\pi] \times \mathbb{R}} f$ sarà contenuta in un insieme limitato, quindi compatto e ammetterà una sottosuccessione convergente ad un punto che sarà punto di minimo). Quindi vale $\min_{\mathbb{R}^2} f = -1$.

L'insieme E è chiuso ma non limitato, infatti contiene l'asse y . Inoltre la funzione $g(y) = f(0, y) = 2y^2 - 4y$ è superiormente illimitata, quindi la funzione non ammette massimo su E . Notiamo poi che il minimo globale di f viene raggiunto in un punto appartenente ad E , quindi $\min_E f = -1$.

Esercizio 2.8. Determinare la continuità e differenziabilità di $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(y+1) - y^2(y-1)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ \beta & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Innanzitutto, per ogni valore di $\beta \in \mathbb{R}$, avremo che f sarà continua e differenziabile almeno in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ prevedendo che le derivate parziali di f saranno rapporti tra polinomi, quindi funzioni continue che permetteranno di applicare il teorema del differenziale totale.

Notiamo che $f(x, 0) = 1$ per ogni $x \neq 0$, quindi la funzione f non è continua se $\beta \neq 1$. Quindi consideriamo da qui in avanti solo il caso $\beta = 1$. Per verificare la continuità in questo caso dobbiamo mostrare che

$$0 = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) - 1 = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y - y^3}{x^2 + y^2}.$$

La tesi segue dalle seguenti maggiorazioni

$$\left| \frac{x^2 y - y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2 |y| + y^2 |y|}{x^2 + y^2} = |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Calcoliamo le derivate parziali nell'origine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-1}{t} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1-t)-1}{t} = -1. \end{aligned}$$

La funzione non è differenziabile, infatti dalla stima

$$\left| \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{\frac{x^2(y+1) - y^2(y-1)}{x^2 + y^2} - 1 - (0,-1) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{2x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right|$$

notiamo che ponendo $(x,y) = (t,t)$ — ovvero considerando la restrizione sulla retta $y = x$ — troviamo la funzione $\frac{2t^3}{|t|^3}$ che non ammette limite in zero.

Esercizio 2.9. Data la funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y,z) = \frac{e^{xy} z}{1+z^2},$$

studiare il carattere dei suoi punti critici. Quindi individuare minimo e massimo di f sull'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Dopo aver notato che la funzione è di classe almeno C^2 su \mathbb{R}^3 , calcoliamo il gradiente e la matrice hessiana:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \left(ye^{xy} \frac{z}{1+z^2}, xe^{xy} \frac{z}{1+z^2}, e^{xy} \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} \right), \\ H_f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} y^2 e^{xy} \frac{z}{1+z^2} & (1+xy)e^{xy} \frac{z}{1+z^2} & ye^{xy} \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} \\ (1+xy)e^{xy} \frac{z}{1+z^2} & x^2 e^{xy} \frac{z}{1+z^2} & xe^{xy} \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} \\ ye^{xy} \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} & xe^{xy} \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} & e^{xy} \frac{2z(z^2-3)}{(1+z^2)^3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per trovare i punti dove si annulla il gradiente dobbiamo risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ 1 - z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ z = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y0 \\ x = 0 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

e poi valutare la matrice hessiana nei punti trovati

$$H_f(0,0,\pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm \frac{1}{2} & 0 \\ \pm \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda il punto $(0,0,1)$ abbiamo l'autovalore $-\frac{1}{2}$ e un determinante positivo, quindi i possibili segno degli autovalori sono +++ oppure +-- . Ne consegue che l'unica alternativa possibile è la seconda. Siamo quindi in presenza di un punto di sella. Per quanto riguarda il punto $(0,0,-1)$ abbiamo l'autovalore $\frac{1}{2}$ e un determinante negativo, quindi i possibili segno degli autovalori sono -++ oppure --- . Ne consegue che l'unica alternativa possibile è la prima. Siamo quindi in presenza di un altro punto di sella. Non abbiamo quindi candidati punti di minimo o massimo locale per f .

Passiamo ora allo studio di massimo e minimo su E . Osserviamo innanzitutto che E non è limitato, ma è chiuso. Tuttavia applicando il teorema di Weierstrass la funzione e^{xy} ammette massimo sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$, che chiamiamo M . Quindi abbiamo

$$|f(x, y, z)| \leq M \left| \frac{z}{1+z^2} \right| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0.$$

La funzione f è quindi limitata su E . Cerchiamo i punti di estremo locale su $\partial E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2\}$ adottando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} ye^{xy} \frac{z}{1+z^2} = \lambda x \\ xe^{xy} \frac{z}{1+z^2} = \lambda y \\ e^{xy} \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pm \frac{1}{2} ye^{xy} = \lambda x \\ \pm \frac{1}{2} xe^{xy} = \lambda y \\ z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

e sostituendo $\mu = \pm 2\lambda$ troviamo

$$\begin{cases} ye^{xy} = \mu x \\ xe^{xy} = \mu y \\ z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ye^{xy} = \mu e^{-xy} \mu y \\ xe^{xy} = \mu y \\ z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(e^{2xy} - \mu^2) = 0 \\ xe^{xy} = \mu y \\ z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

di cui distinguo i casi $y = 0$ e $e^{xy} = \pm \mu$, di cui il primo, notiamo, non porta a soluzioni:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} e^{xy} = \pm \mu \\ x = \pm y \\ z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Il sistema a destra porta alle soluzioni elencate qui sotto, di cui calcoliamo subito i valori

$$\begin{array}{ll} f(1, 1, 1) = \frac{e}{2} & f(1, 1, -1) = -\frac{e}{2} \\ f(1, -1, 1) = \frac{1}{2e} & f(1, -1, -1) = -\frac{1}{2e} \\ f(-1, 1, 1) = \frac{1}{2e} & f(-1, 1, -1) = -\frac{1}{2e} \\ f(-1, -1, 1) = \frac{e}{2} & f(-1, -1, -1) = -\frac{e}{2} \end{array}$$

Concludiamo quindi che f ha minimo $-\frac{e}{2}$ e massimo $\frac{e}{2}$.

Esercizio 2.10. Della seguente funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ determinare i punti del dominio in cui è continua e quelli in cui è differenziabile.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Consideriamo un punto diverso dall'origine. In questo caso la funzione è continua e differenziabile, infatti possiamo calcolare le derivate parziali facilmente usando le usuali regole di derivazione e notare che anche queste sono continue nei punti diversi dall'origine (calcolare per esercizio il gradiente di f). Quindi usando il teorema del differenziale totale, notiamo che la funzione è differenziabile in ogni punto diverso dall'origine.

Studiamo ora la continuità di f nell'origine. Essa è conseguenza immediata delle seguenti stime:

$$\left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \leq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \xrightarrow{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} 0$$

dove abbiamo usato che

$$\max\{|x|, |y|, |z|\} = \|(x, y, z)\|_\infty \leq \|(x, y, z)\|_2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

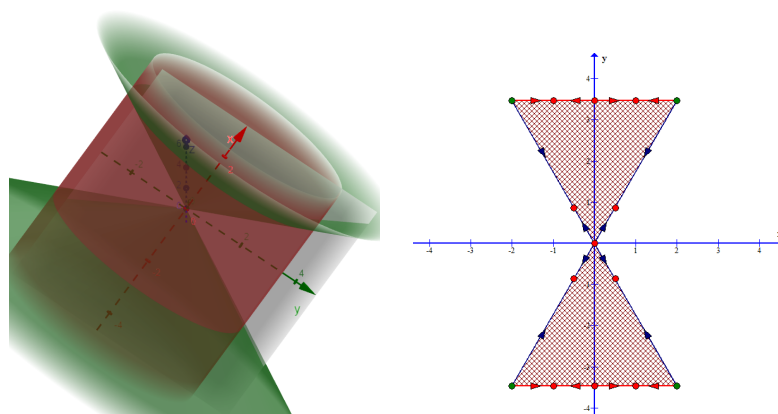


Figura 3: Vedi Esercizio [2.11](#). A sinistra una visualizzazione dell'insieme E considerare la regione interna al cilindro rosso *esterna* al cono verde. Esso è ottenuto mediante una rotazione completa attorno all'asse x dell'insieme nella figura a destra. Gli insiemi F_1 , F_2 ed F_3 sono ottenuti ruotando i sottinsiemi colorati rispettivamente in blu, rosso e verde. Inoltre dato un punto della figura a destra, la funzione f assume lo stesso valore nei punti della circonferenza ottenuta ruotando tale punto attorno all'asse x .

Notiamo che $f(x, 0, 0) = f(0, y, 0) = f(0, 0, z) = 0$ da cui segue

$$\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

Quindi per studiare la differenziabilità di f dobbiamo controllare se il seguente limite dà valore zero:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} - 0 - \langle (0,0,0), (x,y,z) \rangle}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Tale limite non fa zero, infatti se ci avviciniamo all'origine lungo la semiretta $r(t) = (t, t, t)$, $t > 0$ troviamo

$$\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Big|_{(x,y,z)=(t,t,t)} = \frac{t^3}{|t|^3} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} = 1 \neq 0.$$

Concludiamo quindi che la funzione f è continua ma non differenziabile nell'origine.

Esercizio 2.11. Dato l'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 \leq y^2 + z^2 \leq 12\}$$

e la funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x, y, z) = x^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)}$, determinare massimo e minimo di f su E e i punti in cui questi sono raggiunti.

La funzione è di classe almeno C^2 , ne calcoliamo il gradiente:

$$\nabla f(x, y, z) = (2x(1-x^2), -2x^2y, -2x^2z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

I punti in cui si annulla il gradiente sono:

$$(0, y, z), \text{ con } (y, z) \in \mathbb{R}^2, \quad (\pm 1, 0, 0).$$

Di questi, appartengono all'insieme E i punti $(0, y, z)$ con $y^2 + z^2 \leq 12$ e qui la funzione vale zero.

L'esercizio diventa più semplice notando le simmetrie della funzione e dell'insieme, trovarle per esercizio.

La frontiera di E può essere così descritta:

$$\begin{aligned} \partial E = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 = y^2 + z^2, |x| < 2\} \\ & \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 12, |x| < 2\} \\ & \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 12, |x| = 2\} \cup \{0, 0, 0\}. \end{aligned}$$

Sul sottinsieme della frontiera $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 = y^2 + z^2, |x| < 2\}$ abbiamo, usando l'identità $3x^2 = y^2 + z^2$:

$$f(x, y, z) = x^2 e^{-(x^2 + y^2 + z^2)} = x^2 e^{-4x^2}.$$

Consideriamo quindi la funzione $g: (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, definita come $g(x) = x^2 e^{-4x^2}$. Troviamo

$$g'(x) = 2x(1 - 4x^2)e^{-4x^2}$$

che si annulla per $x = 0, \pm\frac{1}{2}$, dove la funzione assume i valori

$$g(0) = 0, \quad g(\pm\frac{1}{2}) = \frac{1}{4e}.$$

In modo analogo possiamo considerare il pezzo di frontiera $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 12, |x| < 2\}$. In questi punti abbiamo:

$$f(x, y, z) = x^2 e^{-(x^2 + y^2 + z^2)} = x^2 e^{-(x^2 + 12)}.$$

La funzione $h: (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 e^{-(x^2 + 12)}$ ha derivata

$$h'(x) = 2x(1 - x^2)e^{-(x^2 + 12)}$$

che si annulla per $x = 0, \pm 1$. Troviamo

$$h(0) = 0, \quad h(\pm 1) = e^{-13}.$$

Infine nei punti di $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 12, |x| = 2\}$ la funzione vale sempre $4e^{-16}$.

Dei candidati trovati il valore minimo è 0, il massimo è $(4e)^{-1}$. Troviamo quindi che f ha minimo zero (non è sorprendente visto che la funzione f è non negativa) e ha massimo $(4e)^{-1}$. Essi sono raggiunti nei punti:

$$\begin{aligned} f|_E^{-1}(0) &= \{(x, y, z) \in E \mid x = 0\}, \\ f|_E^{-1}(\frac{1}{4e}) &= \{(x, y, z) \in E \mid x = \pm\frac{1}{2}, x^2 + y^2 = \frac{3}{4}\}. \end{aligned}$$

Esercizio 2.12. Della seguente funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ discutere continuità e differenziabilità in $O = (0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin^2 x \frac{x - y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Discutere dal punto di vista puramente teorico (ovvero senza fare i calcoli) la procedura da adottare per dimostrare continuità e differenziabilità della stessa funzione negli altri punti del suo dominio.

Notiamo che, se conoscessimo la validità del seguente limite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x^2 \frac{x - y}{x^2 + y^2} = 0$$

allora avremmo

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sin^2 x \frac{x - y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin^2 x}{x^2} x^2 \frac{x - y}{x^2 + y^2} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Mostriamo la validità del primo limite con le seguenti maggiorazioni

$$\left| x^2 \frac{x - y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} (|x| + |y|) \leq |x| + |y| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0.$$

La funzione f quindi è continua nell'origine. Calcoliamo le derivate parziali nell'origine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 t}{t} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t^2} = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0. \end{aligned}$$

Dobbiamo controllare se il seguente limite vale zero:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2 x \frac{x-y}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

La risposta è no, infatti ponendoci sulla semiretta $r(t) = (t, t)$, $t > 0$, troviamo

$$\left. \frac{\sin^2 x \frac{x-y}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|_{(x,y)=(t,t)} = -\frac{t}{|t|} = -1.$$

La funzione quindi non è differenziabile nell'origine.

Per la seconda parte dell'esercizio, ragioniamo come segue. La funzione è continua e differenziabile, infatti possiamo calcolare le derivate parziali facilmente usando le usuali regole di derivazione e notare che anche queste sono continue nei punti diversi dall'origine (calcolare per esercizio il gradiente di f). Quindi usando il teorema del differenziale totale, notiamo che la funzione è differenziabile in ogni punto diverso dall'origine.

Esercizio 2.13. *Classifica i punti critici della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x, y) = y^3 - x^2y - y^2 + x^2$. Disegna l'insieme*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 2 - y \leq 4\}$$

e determina massimo e minimo della funzione f su E e i punti in cui sono raggiunti.

Calcoliamo il gradiente della funzione

$$\nabla f(x, y, z) = (-2xy + 2x, 3y^2 - x^2 - 2y)$$

e cerchiamo dove si annulla (scrivere per esercizio i calcoli). Troviamo i punti

$$(0, 0), \quad (0, \frac{2}{3}), \quad (1, \pm 1).$$

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 2y & -2x \\ -2x & 6y - 2 \end{pmatrix}$$

e la valutiamo nei punti critici trovati precedentemente e troviamo

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad H_f(0, \frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H_f(\pm 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 4 \end{pmatrix}$$

che ci permette di concludere che $(0, \frac{2}{3})$ è un punto di minimo locale con valore

$$\bullet \quad f(0, \frac{2}{3}) = -\frac{4}{27},$$

mentre gli altri sono punti di sella.

Passiamo ora allo studio di massimo e minimo su E . La frontiera di E si può scrivere come

$$\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 - x^2, |x| < 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2, |x| < 2\} \cup \{(\pm 2, -2)\}.$$

Valutiamo innanzitutto la funzione f nei punti $(\pm 2, -2)$:

$$\bullet \quad f(\pm 2, -2) = 0.$$

Consideriamo ora i punti $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 - x^2, |x| < 2\}$, per i quali troviamo che vale

$$f(x, y) = y^3 - 3y + 2, \quad y \in [-2, 2].$$

Ha senso considerare la funzione $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = y^3 - 3y + 2$ con derivata $g'(y) = 3(y^2 - 1)$ che si annulla per $y = \pm 1$. Quindi i candidati estremi sono $(\pm 1, 1)$ e $(\pm\sqrt{3}, -1)$ per cui troviamo:

$$\bullet \quad f(\pm 1, 1) = 0, \quad \bullet \quad f(\pm\sqrt{3}, -1) = 4.$$

Dobbiamo ricordarci di aggiungere come candidato il valore assunto per $y = 2$:

- $f(0, 2) = 4$.

Invece, se consideriamo i punti $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2, |x| < 2\}$ troviamo

$$f(x, y) = 3x^2 - 12$$

Qui ha senso considerare la funzione $h : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^2 - 12$ con minimo in $x = 0$. Abbiamo quindi l'ultimo candidato $(0, -2)$ con valore

- $f(0, -2) = -12$.

Quindi la funzione f , ristretta ad E ha massimo 4 e minimo -12.

Esercizio 2.14. *Disegna l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{3x} \leq y \leq e^{2x}, |x| \leq 5\}$ e determina, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x, y) = e^{3x - \ln y}$.*

Il disegno è omesso.

Riscriviamo la funzione come $f(x, y) = e^{3x}/y$. Notiamo che il gradiente è sempre non nullo:

$$\nabla f(x, y) = \left(3 \frac{e^{3x}}{y}, -\frac{e^{3x}}{y^2} \right).$$

Quindi non abbiamo punti critici all'interno di A . Notiamo inoltre che E è chiuso e limitato. In particolare abbiamo $E \subseteq [-5, 0] \times (0, 1]$.

Consideriamo quindi il bordo ∂E . Esso è costituito da tre curve di equazioni $\gamma_1 : y = e^{3x}$, $\gamma_2 : y = e^{2x}$, $\gamma_3 : x = -5$. La restrizione di f a queste risulta, nell'ordine,

$$\begin{aligned} f|_{\gamma_1}(x, y) &= f(x, e^{3x}) = 1, \\ f|_{\gamma_2}(x, y) &= f(x, e^{2x}) = e^x, \\ f|_{\gamma_3}(x, y) &= f(-5, y) = e^{-15}/y. \end{aligned}$$

La prima è una funzione costante, le altre sono funzioni monotone, quindi non troviamo punti di estremo su queste. Sono invece da considerare tutti i punti della prima curva. Restano da considerare gli "spigoli" di ∂E :

$$f(-5, e^{-15}) = 1, f(-5, e^{-10}) = e^{-5}, f(0, 1) = 1,$$

da cui deduciamo che $\max_E f = 1$ e $\min_E f = e^{-5}$.

Esercizio 2.15. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x, y, z) = 2xyz$ e l'insieme*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3, xy = z\},$$

- determinare per quali punti di E non è possibile applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange al fine di determinare i massimi e minimi di f su E ;*
- determinare massimo e minimo di f su E , con metodo a piacere.*

Si noti che l'insieme E ha interno vuoto ed è intersezione delle due superfici individuate dalle equazioni date. Ci aspettiamo quindi un oggetto simile ad una curva, o più curve.

Non possiamo applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange se il rango della matrice Jacobiana della funzione che descrive i vincoli non è massimo. Abbiamo, scrivendolo in modo comodo per i calcoli successivi, il vincolo

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{3}{2}, xy - z \right) = (0, 0)$$

con matrice Jacobiana

$$J_F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & -1 \end{pmatrix}.$$

Essa non ha rango massimo se tutte le sottomatrici 2x2 hanno determinante nullo.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x + yz = 0 \\ y + xz = 0 \end{cases}$$

Da cui abbiamo la seguente possibilità $x = \pm y$, quindi

$$\begin{cases} x = y \\ x(1+z) = 0 \\ x(1+z) = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -y \\ x(1-z) = 0 \\ x(1-z) = 0 \end{cases}$$

Dal primo sistema otteniamo i punti del tipo $(0, 0, z)$ oppure $(x, x, -1)$, dal secondo i punti del tipo $(0, 0, z)$ oppure $(x, -x, 1)$. Notiamo che nessuno dei punti può appartenere all'insieme E

$$\begin{aligned} (0, 0, z) \in E &\Rightarrow z = xy = 0 \Rightarrow 0 = x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \text{f}, \\ (x, x, -1) \in E &\Rightarrow -1 = z = xy = x^2 \quad \text{f}, \\ (x, -x, 1) \in E &\Rightarrow 1 = z = xy = -x^2 \quad \text{f}. \end{aligned}$$

Possiamo applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange in ogni punto di E .

Passiamo alla ricerca di massimo e minimo su E , proprio usando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Dobbiamo risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} yz = \lambda x + \mu y \\ xz = \lambda y + \mu x \\ xy = \lambda z - \mu \\ xy = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Sommiamo le prime due equazioni ottenendo il nuovo sistema equivalente

$$\begin{cases} (x+y)(z-\lambda-\mu) = 0 \\ xz = \lambda y + \mu x \\ xy = \lambda z - \mu \\ xy = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

da cui separiamo i due casi

$$\begin{cases} x = -y \\ \dots \\ \dots \\ -x^2 = z \\ 2x^2 + x^4 = 3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} z = \lambda + \mu \\ \lambda(x-y) = 0 \\ xy = \lambda z - \mu \\ xy = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Dal primo sistema ricaviamo, nell'ultima equazione $x = \pm 1$ da cui i punti $(1, -1, -1)$ e $(-1, 1, -1)$. Dal secondo sistema distinguiamo i due casi $\lambda = 0$ e $x = y$

$$\begin{cases} z = \lambda + \mu \\ x = y \\ \dots \\ x^2 = z \\ 2x^2 + z^4 = 3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} z = \mu \\ \lambda = 0 \\ xy = -\mu \\ xy = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Dal primo sistema, in modo analogo a quanto fatto prima troviamo i punti $(1, 1, 1)$ e $(-1, -1, 1)$, mentre dal secondo notiamo che la terza e la quarta equazione portano a $z = -\mu$, che unita alla prima ci dà $z = \mu = 0$. Quindi $xy = 0$ unito a $x^2 + y^2 = 3$ ci dà i punti $(\pm\sqrt{3}, 0, 0)$ e $(0, \pm\sqrt{3}, 0)$.

Concludiamo che abbiamo trovato 8 candidati con valori:

$$f(\pm 1, \pm 1, 1) = 2, \quad f(\pm 1, \mp 1, -1) = 2, \quad f(\pm\sqrt{3}, 0, 0) = 0, \quad f(0, \pm\sqrt{3}, 0) = 0.$$

Quindi $\min_E f = 0$ e $\max_E f = 2$.

Nota: se invece consideriamo l'insieme

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, xy = z\},$$

il procedimento è molto simile, ma fissato $\eta = \sqrt{\sqrt{10} - 1}$, troveremo nell'ordine i seguenti candidati: dapprima $(\eta, -\eta, \eta^2)$ e $(-\eta, +\eta, \eta^2)$, poi (η, η, η^2) e $(-\eta, -\eta, \eta^2)$, infine i punti $(\pm 3, 0, 0)$ e $(0, \pm 3, 0)$.

2.3 A.A. 2020/2021

Esercizio 2.16. Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{|x| + |y|} \arctan x & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

dire in quali punti è continua e in quali punti è differenziabile.

Per esercizio scrivere i passaggi che nella seguente spiegazione sono introdotti con *si vede facilmente* o espressioni analoghe. Si noti che

$$\frac{x^2 - y^2}{|x| + |y|} = \frac{(|x| + |y|)(|x| - |y|)}{|x| + |y|} = |x| - |y|.$$

Provare a risolvere l'esercizio anche senza usare questo trucco.

Per provare la continuità e la differenziabilità nell'origine *si ragiona facilmente* come nell'Esercizio 2.12 e situazioni simili, quindi non ne scrivo i dettagli. Invece, data la presenza dei valori assoluti, bisogna studiare se f è differenziabile nei punti $(0, y_0)$ e $(x_0, 0)$ dove $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$. In questi punti *si vede facilmente* che la funzione è continua.

Partiamo con analizzare i punti $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$. Essendo $f(0, y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ abbiamo facilmente $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = 0$, mentre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y_0) - f(0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(|h| - |y_0|) \arctan h}{h} = -|y_0|.$$

Quindi per discutere la differenziabilità di f in questo punto dobbiamo controllare se il seguente limite dà risultato zero:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, y_0 + k) - f(0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

che diventa, visti i calcoli precedenti

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{(|h| - |y_0 + k|) \arctan h + |y_0|h}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

che *si semplifica facilmente* in

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{-|k + y_0| \arctan h + |y_0|h}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Aggiungiamo e sottraiamo $|y_0| \arctan h$ e troviamo

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (|y_0| - |k + y_0|) \frac{\arctan h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |y_0| \frac{h - \arctan h}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

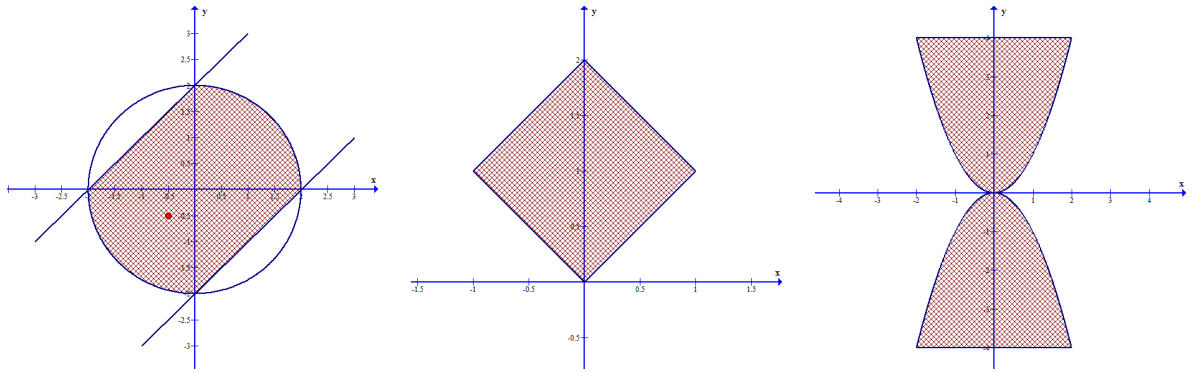


Figura 4: A sinistra, Esercizio 2.17 viene mostrato il disegno dell'insieme A . Al centro l'insieme dell'Esercizio 2.19. A destra quello dell'Esercizio 2.21

dove il primo addendo va a zero facilmente, mentre per il secondo usiamo che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \arctan h}{h^3} \in \mathbb{R}$, dove il valore del limite è suggerito dal coefficiente del termine di terzo grado del polinomio di Taylor di grado 3 dell'arcotangente (individuare per esercizio).

Passiamo ora ad analizzare i punti $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$. In questo caso il seguente limite non esiste

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, h) - f(x_0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(|x_0| - |h|) \arctan x_0 - |x_0| \arctan x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\arctan x_0 \frac{|h|}{h}.$$

Da ciò concludiamo che f non è differenziabile in questi punti.

Esercizio 2.17. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$. Calcolare $\min_E f$ e $\max_E f$ (e i punti in cui questi valori vengono assunti), dove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, |x - y| \leq 2 \leq z \leq 3\}.$$

Notiamo che il gradiente di f risulta

$$\nabla f = (2x + 1, 2y + 1, 2z + 1) \neq (0, 0, 0), \quad \forall (x, y, z) \in E.$$

Quindi passiamo subito allo studio sul bordo. Dopo aver disegnato l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, |x - y| \leq 2\}$ che è costituito da due quarti di cerchio nel primo e terzo quadrante e da due triangoli nel secondo e quarto quadrante. Il solido E risulta essere un cilindro avente A come base: infatti le condizioni su z sono semplicemente $z \in [2, 3]$. Il bordo di E quindi presenta le due facce superiori e inferiori

$$A_1 = \{(x, y, 3) : (x, y) \in A\}, \quad A_2 = \{(x, y, 2) : (x, y) \in A\},$$

e le facce laterali

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \in [2, 3]\}, \\ B_2 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, x \leq 0, y \leq 0, z \in [2, 3]\}, \\ B_3 &= \{(x, y, z) : y = x + 2, x \in [-2, 0], z \in [2, 3]\}, \\ B_4 &= \{(x, y, z) : y = x - 2, x \in [0, 2], z \in [2, 3]\}. \end{aligned}$$

Se impostiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange sul vincolo $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ che contiene gli insiemi B_1 e B_2 troviamo

$$\begin{cases} 2x + 1 = 2x\lambda \\ 2y + 1 = 2y\lambda \\ 2z + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

che dà come soluzioni solo punti con $z = -\frac{1}{2}$ che non sono punti di $B_1 \cup B_2$. Quindi non troveremo estremi locali su questi insiemi. Impostando i moltiplicatori di Lagrange sui vincoli $F_2(x, y, z) = x - y + 2$ e $F_3(x, y, z) = x - y - 2$ arriviamo alla stessa conclusione.

La cosa non deve stupire dato che l'esercizio si può risolvere anche notando che

$$f(x, y, z) = g(x, y) + h(z)$$

e separando la ricerca di massimi e minimi sugli insiemi $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, |x - y| \leq 2\}$ e $B = \{z \in \mathbb{R} : 2 \leq z \leq 3\}$. Essendo quindi h monotona crescente su B è chiaro che troveremo il massimo di f in E nell'insieme A_1 e il minimo di f in E nell'insieme A_2 .

Notando questo dettaglio tutta la trattazione sopra diventa superflua ed è sufficiente studiare la funzione g sull'insieme A .

Concluderemo poi quindi notando che

$$f(x_m, y_m, z_m) = \min_E f = \min_A g + \min_B h = g(x_m, y_m) + h(2).$$

$$f(x_M, y_M, z_M) = \max_E f = \max_A g + \max_B h = g(x_M, y_M) + h(3).$$

Studiamo ora quindi massimi e minimi della funzione $g(x, y) = x^2 + x + y^2 + y$ nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, |x - y| \leq 2\}$.

Dall'espressione del gradiente $\nabla g = (2x + 1, 2y + 1)$, troviamo che esso si annulla in $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e lo studio della matrice Hessiana ci restituisce che è un minimo locale. Il bordo di A è costituito da due segmenti contenuti nelle rette $y = x \pm 2$ (per lo studio della quale si consiglia di sostituire l'espressione della y nella funzione g per ricondursi ad una funzione di una sola variabile), e da due archi della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ (per cui si consiglia un passaggio in coordinate polari). Lascio i dettagli per esercizio.

Esercizio 2.18. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^3 - y - |x| \left(\frac{5}{2}x - 6 \right),$$

individuare i punti di massimo e minimo locale della funzione (non è necessario fornire il valore assunto). Dimostrare che f è illimitata sia superiormente che inferiormente. Calcolare, se esiste, l'approssimante lineare di f nel punto $(1, 0)$. Calcolare, se esiste, il polinomio di Taylor di grado 3 approssimante la funzione f nel punto $(1, 0)$.

La presenza del termine $|x|$ nella definizione di f ci porta immediatamente a distinguere il comportamento negli insiemi $E_+ = \{(x, y) \mid x > 0\}$, $E_- = \{(x, y) \mid x < 0\}$, $E_0 = \{(x, y) \mid x = 0\}$. Quindi su E_+ avremo

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^3 - y - \frac{5}{2}x^2 + 6x,$$

$$\nabla f(x, y) = (x^2 - 5x + 6, 3y^2 - 1),$$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff (x, y) \in \{(2, \pm 3^{-1/2}), (3, \pm 3^{-1/2})\}$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 5 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$H_f(2, \pm 3^{-1/2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pm 6 \cdot 3^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad H_f(3, \pm 3^{-1/2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 6 \cdot 3^{-1/2} \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo un massimo locale in $(2, -3^{-1/2})$ e un minimo locale in $(3, 3^{-1/2})$. Gli altri due sono punti di sella. Su E_- avremo invece

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^3 - y + \frac{5}{2}x^2 - 6x,$$

$$\nabla f(x, y) = (x^2 + 5x - 6, 3y^2 - 1)$$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff (x, y) \in \{(-6, \pm 3^{-1/2}), (1, \pm 3^{-1/2})\}$$

I punti $(1, \pm 3^{-1/2})$ sono da scartare in quanto non appartengono a E_- , per gli altri scriviamo

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x+5 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$H_f(-6, \pm 3^{-1/2}) = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & \pm 6 \cdot 3^{-1/2} \end{pmatrix}$$

da cui troviamo il massimo locale $(-6, -3^{-1/2})$.

Cerchiamo ora i punti di estremo su E_0 (è la parte più difficile dell'esercizio). Definiamo $h(y) = y^3 - y$ e $g(x) = \frac{x^3}{3} - |x|(\frac{5}{2}x - 6)$, cosicché $f(x, y) = g(x) + h(y)$. Notiamo dapprima che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} - |x|(\frac{5}{2}x - 6)}{|x|} = 6.$$

Quindi esiste $\delta > 0$ tale che se $|x| \leq \delta$ allora $g(x) \geq 5|x| \geq 0$. Quindi

$$f(0, y) = h(y) \leq g(x) + h(y) = f(x, y)$$

per ogni $(x, y) \in \{(x, y) \mid |x| \leq \delta\}$.

Quindi ha senso cercare minimi locali per f in quanto *staccandoci dall'asse $x = 0$ il grafico di f sale*. Osserviamo che h ha estremi in $y = \pm 3^{-1/2}$. In particolare un minimo locale per $y = 3^{-1/2}$ e un massimo locale in $y = -3^{-1/2}$. Quindi possiamo concludere che $(0, 3^{-1/2})$ è un minimo locale per f .

Per dimostrare che f è illimitata basta notare che è illimitata lungo la retta $y = 0$, ovvero $f(0, y) = y^3 - y$ (superiormente e inferiormente). Calcoliamo l'approssimante lineare $\ell(x, y)$ in $(1, 0)$:

$$\ell(x, y) = f(1, 0) + \langle \nabla f(1, 0), (x-1, y) \rangle = \frac{23}{6} + \langle (2, -1), (x-1, y) \rangle = \frac{23}{6} + 2x - 2 - y = \frac{11}{6} + 2x - y.$$

La funzione f in un intorno di $(1, 0)$ è un polinomio di grado 3, quindi banalmente il polinomio di grado 3 richiesto è semplicemente

$$\frac{x^3}{3} + y^3 - y - \frac{5}{2}x^2 + 6x.$$

Esercizio 2.19. Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita come $f(x, y) = x|y-1| + x^2 - \frac{1}{2}x$ determinare in quali punti è differenziabile e in quali non lo è (motivare la risposta in modo adeguato e completo). Trovare massimo e minimo della funzione f nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2 - y, |x| \leq y\}$.

Per ogni punto (x, y) con $y \neq 1$ possiamo trovare un intorno in cui la funzione è espressa da un polinomio. Quindi f è differenziabile in tutti i punti di questo tipo. Consideriamo quindi punti del tipo $(x, 1)$. Osserviamo che $f(x, 1) = x^2 - \frac{1}{2}x$. Quindi sarà possibile calcolare sempre la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 1) = 2x - \frac{1}{2}$. Calcoliamo quindi l'altra derivata parziale

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, 1+h) - f(x, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} x \frac{|h|}{h}.$$

Se $x \neq 0$ il limite non esiste. Se $x = 0$ invece il limite esiste e vale zero. Concludiamo quindi che f non è differenziabile nei punti $(x, 1)$ con $x \neq 0$. Resta da considerare il caso $(x, y) = (0, 1)$ che ammette l'esistenza delle derivate parziali. Dobbiamo vedere se il seguente limite dà risultato zero:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k+1) - f(0, 1) - \langle \nabla f(0, 1), (h, k) \rangle}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

osservando che $f(0, 1) = 0$, $\nabla f(0, 1) = (-\frac{1}{2}, 0)$. Otteniamo quindi

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h|k| + h^2 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h|k| + h^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

in cui si possono usare le maggiorazioni $|k| \leq \sqrt{h^2 + k^2}$ e $|h| \leq \sqrt{h^2 + k^2}$ per ottenere

$$\left| \frac{h|k| + h^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq |h| + |h|.$$

La funzione f è quindi differenziabile in $(0, 1)$.

Per quanto riguarda la ricerca di massimi e minimi locali in A la risoluzione completa è lasciata per esercizio, ne dò solo un accenno. L'insieme A ha come bordo un quadrato di vertici

$$(0, 0), \quad (1, 1), \quad (0, 2), \quad (-1, 1).$$

Lo studio sul bordo si può fare per sostituzione scrivendo le equazioni delle rette ed è omissso. Per lo studio dell'esistenza di massimi e minimi interni è opportuno studiare separatamente i casi $y > 1$ e $y < 1$ come fatto nell'esercizio precedente: lo studio di gradiente e matrice hessiana porterà a trovare dei punti di sella in $(0, \frac{3}{2})$ e $(0, \frac{1}{2})$. Lungo la retta $y = 1$ si può trovare un minimo locale in $(\frac{1}{4}, 1)$. Infatti lungo tale retta dobbiamo studiare la funzione

$$f(x, 1) = g(x) = x^2 - \frac{1}{2}x$$

che presenta un minimo locale in $x = \frac{1}{4}$. In un intorno del punto $(\frac{1}{4}, 1)$ notiamo che

$$f(x, y) = x|y - 1| + x^2 - \frac{1}{2}x \geq x^2 - \frac{1}{2}x = f(x, 1).$$

Anche qui, come nell'esercizio precedente, notiamo che *staccandoci dalla retta $y = 1$ il grafico di f sale*.

Concludo con questa osservazione: si poteva introdurre il cambio di variabile $Y = y - 1$ che avrebbe portato allo studio della funzione $\tilde{f}(x, Y) = x|Y| + x^2 - \frac{1}{2}x$ sull'insieme $\tilde{A} = \{(x, Y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 - Y, |x| \leq Y + 1\}$ simmetrico rispetto all'asse delle x . La funzione \tilde{f} risulta pari rispetto alla variabile Y . Naturalmente anche la funzione f presenta una simmetria rispetto alla retta $y = 1$.

Esercizio 2.20. *Classificare i punti critici della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita come*

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - x - 1.$$

Consideriamo la restrizione $f|_A: A \rightarrow \mathbb{R}$ della funzione precedente all'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}.$$

Trovare, se esistono, massimi e minimi locali della funzione $f|_A$. Essa è limitata su A ?

Esercizio 2.21. *Data la funzione $f(x, y) = x^2 + y - xy$, determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione f nell'insieme*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq |y| \leq 4\}.$$

Dire in quali punti tali valori sono raggiunti. Disegna A .

2.4 A.A. 2021/2022

Esercizio 2.22. *Dimostra che la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x| + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua nel suo dominio. Dimostra che non è differenziabile nell'origine. Dimostra che è differenziabile in ogni altro punto del dominio.

Esercizio 2.23. *Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } y > x \\ x^3 - x + 2y & \text{se } y \leq x \end{cases}$$

determina in quali punti è continua e in quali punti è differenziabile.

Determina, se esistono, massimo e minimo della funzione sull'insieme $Q = [-2, 2] \times [-2, 2]$.

La seguente risoluzione conterrà molti dettagli che non erano pretesi in sede di esame scritto, ma saranno comunque esposti per maggior chiarezza e completezza.

Riscriviamo la funzione f come

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y) & \text{se } y > x \\ f_2(x, y) & \text{se } y \leq x \end{cases}$$

dove abbiamo introdotto le funzioni $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definite come

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad f_2(x, y) = x^3 - x + 2y.$$

Calcoliamo facilmente

$$\nabla f_1(x, y) = (2x, 2y) \quad \text{e} \quad \nabla f_2(x, y) = (3x^2 - 1, 2).$$

Quindi, possiamo affermare che la funzione risulta continua e differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$ con

$$\nabla f(x, y) = \begin{cases} (2x, 2y) & \text{se } y > x \\ (3x^2 - 1, 2) & \text{se } y < x \end{cases}$$

in quanto per ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $y > x$ possiamo trovare un intorno in cui $f = f_1$ e per ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $y < x$ possiamo trovare un intorno in cui $f = f_2$. Resta da analizzare continuità e differenziabilità sulla retta $y = x$.

Abbiamo che la funzione f è continua in un punto (t, t) con $t \in \mathbb{R}$ se esiste il limite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (t, t)} f(x, y)$$

che implica verificare se vale

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (t, t) \\ y > x}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (t, t) \\ y < x}} f(x, y)$$

ovvero

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (t, t) \\ y > x}} f_1(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (t, t) \\ y < x}} f_2(x, y)$$

e quindi

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (t, t) \\ y > x}} x^2 + y^2 = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (t, t) \\ y < x}} x^3 - x + 2y.$$

Quindi sostanzialmente dobbiamo controllare per quali valori vale

$$f_1(t, t) = f_2(t, t)$$

ovvero $2t^2 = t^3 + t$ che porta all'equazione $t(t^2 - 2t + 1) = 0$ che ha soluzioni $t = 0$ e $t = 1$.

Quindi la funzione è continua in

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\} \cup \{(0, 0), (1, 1)\}.$$

Dobbiamo vedere se la funzione è differenziabile in $(0, 0)$ oppure $(1, 1)$. Poiché la differenziabilità è equivalente all'esistenza dell'approssimante lineare, allora le approssimanti lineari delle funzioni f_1 e f_2 in questi punti devono coincidere.

Sostanzialmente dobbiamo verificare se

$$\nabla f_1(0, 0) \stackrel{?}{=} \nabla f_2(0, 0) \quad \text{e} \quad \nabla f_1(1, 1) \stackrel{?}{=} \nabla f_2(1, 1).$$

La risposta si ottiene facilmente

$$(0, 0) \stackrel{NO}{=} (-1, 2) \quad \text{e} \quad (2, 2) \stackrel{SI}{=} (2, 2).$$

Quindi la funzione è differenziabile in

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\} \cup \{(1, 1)\}.$$

Per quanto riguarda la ricerca di massimi e minimi, la funzione f_1 rappresenta il quadrato della distanza dall'origine quindi troviamo facilmente che, definito l'insieme aperto $Q^+ = \{(x, y) \in Q \mid y > x\}$, vale

$$\max_{Q^+} f_1 = f_1(-2, 2) = 8, \quad \inf_{Q^+} f_1 = f_1(0, 0) = 0.$$

Notiamo che dell'estremo inferiore non viene raggiunto in quanto l'origine non appartiene a Q^+ .

Studiamo ora la funzione f_2 nell'insieme compatto $Q^- = \{(x, y) \in Q \mid y \geq x\}$. Il suo gradiente non si annulla, quindi non troveremo punti di estremo nell'interno di Q^- . Studiamo il bordo di Q^- : è un triangolo i cui vertici

$$A = (2, 2) \quad B = (-2, -2), \quad C = (2, -2)$$

sono candidati punti di estremo:

$$f_2(A) = f_2(2, 2) = 10, \quad f_2(B) = f_2(-2, -2) = -10, \quad f_2(C) = f_2(2, -2) = 2.$$

Passiamo allo studio di f_2 sui segmenti

$$\begin{aligned} \overline{AB} : g_1(t) &= f(t, t) = t^3 + t \\ \overline{BC} : g_2(t) &= f(t, -2) = t^3 - t - 4 \\ \overline{AC} : g_3(t) &= f(2, t) = 6 + 2t \end{aligned}$$

Le funzioni g_1 e g_3 sono strettamente crescenti, quindi non troviamo ulteriori candidati lungo i segmenti \overline{AB} e \overline{AC} . Invece dallo studio g_2 abbiamo

$$g_2'(t) = 0 \iff t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

con valori (sono rispettivamente massimo e minimo locali ma non globali sul segmento)

$$g_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 4 < 2 = g_2(2), \quad g_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 4 > -10 = g_2(-2).$$

Concludiamo quindi che la funzione f ammette minimo -10 e massimo 10 sull'insieme Q . Si noti che se la funzione f fosse stata definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y) & \text{se } y \geq x \\ f_2(x, y) & \text{se } y < x \end{cases}$$

(mettendo l'uguale nella prima riga) allora questi valori sarebbero stati di estremo inferiore e superiore, ma non di minimo e massimo. La funzione infatti non è continua su Q .

Esercizio 2.24. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + \sqrt{3}y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

determina se essa è continua nell'origine. Poi determina se è differenziabile nell'origine.

Determina, se esistono, massimo e minimo della funzione f sull'insieme di livello 1 della funzione $F(x, y) = x^2 + y^2$.

Mostrare per esercizio che la funzione è continua. Poi, usando la definizione di derivata parziale mostrare che $\nabla f(0, 0) = (1, \sqrt{3})$. Ora impostiamo il seguente limite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

per verificare se valga zero o meno. Con alcuni calcoli troviamo

$$\begin{aligned} & \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{x^3 + \sqrt{3}y^3}{x^2 + y^2} - 0 - (x + \sqrt{3}y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 + \sqrt{3}y^3 - (x + \sqrt{3}y)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= - \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2 + \sqrt{3}x^2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Posto $g(x, y) = \frac{xy^2 + \sqrt{3}x^2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ dobbiamo verificare se vale $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0$. Notiamo

$$h(t) = g(t, \sqrt{3}t) = \frac{3}{4} \frac{t}{|t|}$$

che non ammette limite per $t \rightarrow 0$. Quindi nemmeno il limite precedente può esistere. La funzione f quindi non è differenziabile.

L'ultima parte dell'esercizio chiede di trovare massimo e minimo di f nella circonferenza unitaria, che può essere parametrizzata in coordinate polari. Ne consegue che dobbiamo trovare massimi e minimi della funzione $k: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $k(\theta) = \cos^3 \theta + \sqrt{3} \sin^3 \theta$. Completare questa parte per esercizio.

Esercizio 2.25. Considerare l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, |x| + y \leq 0\}.$$

Data la funzione $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

determina se essa è continua nel suo dominio.

Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$, calcola massimi e minimi di f nell'insieme E .

L'insieme E può essere visto come l'intersezione della palla di raggio 3 centrata nell'origine con l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -|x|\}$. Sebbene la funzione g ricordi il classico esempio di funzione non continua in un intorno dell'origine, si noti che in questo caso, avendo la funzione un dominio particolare essa risulta continua. Nelle note lo studente troverà un esercizio simile che coinvolge l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq |x|\}$. Adattare i calcoli e risolvere autonomamente questa parte.

La seconda parte dell'esercizio invece consiste in un facile esercizio di ricerca di massimi e minimi. La risoluzione è omessa.

Esercizio 2.26. Dire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f_\alpha(x, y) = |y|^\alpha \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$$

può essere estesa con continuità nell'origine. Per quali valori α la funzione f_α è differenziabile?

Notiamo subito che $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$ per ogni scelta di $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Quindi, la funzione potrà essere estesa per continuità nell'origine se dimostriamo che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_\alpha(x, y) = 0.$$

Notiamo innanzitutto che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_\alpha(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g_\alpha(x, y)$$

dove

$$g_\alpha(x, y) = |y|^\alpha \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

grazie al primo limite fondamentale. Abbiamo che $|\frac{xy}{x^2 + y^2}| \leq 1$. Quindi se $\alpha > 0$ troviamo $0 \leq |g_\alpha(x, y)| \leq |y|^\alpha$. Poiché $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y|^\alpha = 0$ la funzione g_α , e quindi anche f_α , può essere estesa in modo continuo nell'origine se $\alpha > 0$.

Mostriamo ora che per $\alpha \leq 0$ la funzione non può essere estesa per continuità nell'origine. Se prendiamo la restrizione lungo la bisettrice del primo quadrante otteniamo

$$h(t) = f_\alpha(t, t) = |t|^\alpha \frac{\sin(t^2)}{2t^2}.$$

Abbiamo

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = +\infty & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

In entrambi i casi, quindi, non possiamo estendere per continuità la funzione nell'origine.

Esercizio 2.27. Data la funzione $h(x, y) = x|x| - y^2$ e l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$, determina massimo e minimo assoluto di g in D .

La funzione ha gradiente $\nabla h(x, y) = (|x|, -2y)$. Tale funzione è continua. Quindi h è di classe C^1 . Tuttavia h non è differenziabile due volte quando $x = 0$, non avremo quindi una matrice Hessiana da studiare per il punto critico $(0, 0)$. Tuttavia è facile notare che in un intorno dell'origine vale $h(x, 0) = x|x|$ che cambia segno. Dobbiamo quindi studiare la funzione sul bordo di D che è descritto dall'equazione $x^2 + 2y^2 = 1$. Per esercizio risolvere il problema con le seguenti strategie (in ogni caso, tranne uno, il valore assoluto porrà delle difficoltà):

- Introdurre la parametrizzazione della frontiera di D come $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ e studiare massimi e minimi di $f \circ \gamma(\theta) = \cos \theta |\cos \theta| - \frac{1}{2} \sin^2 \theta$.
- Introdurre le funzioni $a_{\pm}(y) = \pm \sqrt{1 - 2y^2}$ che descrivono la parte destra e sinistra dell'ellisse $x^2 + 2y^2 = 1$ e quindi studiare le funzioni $g_{\pm}(y) = f(a_{\pm}(y), y)$.
- Introdurre due funzioni $b_{\pm}(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 - x^2)}$ che descrivono la parte superiore e inferiore dell'ellisse $x^2 + 2y^2 = 1$ e quindi studiare le funzioni $h_{\pm}(x) = f(x, b_{\pm}(x))$.
- Si può impostare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange solo dopo aver separato i casi $x > 0$ e $x < 0$ e studiando separatamente la frontiera per $x = 0$ trovando due candidati per quest'ultima parte.

2.5 A.A. 2022/2023

Esercizio 2.28. Stabilire se la seguente funzione è continua e differenziabile:

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos(xy) + (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Per come è definita la funzione, osserviamo che continuità e differenziabilità sono soddisfatte su ogni punto diverso dall'origine. Qui di seguito discuteremo la continuità e differenziabilità nell'origine.

La funzione è continua se riusciamo a mostrare che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left| \cos(xy) + (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - 1 \right| = 0.$$

Effettuiamo quindi le seguenti maggiorazioni

$$\begin{aligned} \left| \cos(xy) + (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - 1 \right| &\leq |\cos(xy) - 1| + \left| (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right| \\ &\leq |\cos(xy) - 1| + |x^2 + y^2| = a(x, y). \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} a(x, y) = 0$, otteniamo la continuità di f tramite il teorema dei carabinieri. Calcoliamo le derivate parziali di f nell'origine. Essendo

$$f(t, 0) = f(0, t) = 1 + t^2 \sin(t^{-2}), \quad \text{se } t \neq 0,$$

troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + t^2 \sin(t^{-2}) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin(t^{-2}) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + t^2 \sin(t^{-2}) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin(t^{-2}) = 0. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo $\nabla f(0,0) = (0,0)$. La funzione è differenziabile nell'origine se il seguente limite esiste e vale zero

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (h,k) \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(hk) + (h^2 + k^2) \sin\left(\frac{1}{h^2 + k^2}\right) - 1}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

A tal fine effettuiamo le seguenti maggiorazioni

$$\left| \frac{\cos(xy) + (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \left| \frac{\cos(xy) - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| + \sqrt{x^2 + y^2} \left| \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right| \leq \left| \frac{\cos(xy) - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Se mostriamo che il seguente limite è zero possiamo concludere che la funzione f è differenziabile nell'origine grazie al teorema dei carabinieri

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\cos(xy) - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| + \sqrt{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 y^2} \right| \cdot \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si vede facilmente che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0,$$

Infine abbiamo

$$0 \leq \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq |x|y^2, \quad \text{con} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x|y^2 = 0.$$

Quindi il limite richiesto vale zero e abbiamo concluso.

Esercizio 2.29. Determina massimo e minimo assoluto di $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$ nella palla euclidea chiusa di raggio uno centrata nell'origine.

Denotiamo con B la palla data. La funzione è di classe almeno C^2 . Calcoliamo dapprima il gradiente $\nabla f(x,y) = (2x - 3, 2y - 2)$ che si annulla nel punto $(\frac{3}{2}, 1)$ che non appartiene a B . Quindi massimi e minimi si ottengono sulla frontiera di B .

Primo metodo: la frontiera si può parametrizzare in coordinate polari. Quindi basta studiare gli estremi della funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$g(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta) = 2 - 3 \cos \theta - 2 \sin \theta.$$

La derivata $g'(\theta) = 3 \sin \theta - 2 \cos \theta$ si annulla quando $\tan \theta = 2/3$, quindi risolvendo il sistema

$$\tan \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{2}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

che ha soluzioni $(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$ e $(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}})$. I valori assunti sono $f(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}) = 2 - \sqrt{13}$ e $f(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}) = 2 + \sqrt{13}$, ottenendo così i valori di massimo e minimo.

Secondo metodo: Studio i punto critici con la sostituzione $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ oppure $x = \pm\sqrt{1-y^2}$. Analizziamo il primo caso. Dobbiamo trovare gli estremi delle funzioni $a_1, a_2: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definite come

$$a_1(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = 2 - 3x - 2\sqrt{1-x^2}, \quad a_2(x) = f(x, -\sqrt{1-x^2}) = 2 - 3x + 2\sqrt{1-x^2}$$

Vanno considerati i valori assunti agli estremi (tale passaggio non è necessario nel primo metodo!): $a_i(-1) = f(-1, 0) = 5$ e $a_i(1) = f(1, 0) = -1$. Quindi calcoliamo le derivate di cui cercheremo gli zeri:

$$a_1'(x) = -3 + 2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad a_2'(x) = 3 - 2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dobbiamo risolvere le equazioni (molti studenti hanno sbagliato il passaggio con il punto esclamativo dimenticando che la x doveva avere un segno preciso)

$$\begin{aligned} a_1'(x) = 0 &\Rightarrow 2x = 3\sqrt{1-x^2} && \stackrel{(!)}{\Rightarrow} 4x^2 = 9 - 9x^2 \text{ con } x > 0! && \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{13}} && \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{13}} \\ a_2'(x) = 0 &\Rightarrow -2x = 3\sqrt{1-x^2} && \stackrel{(!)}{\Rightarrow} 4x^2 = 9 - 9x^2 \text{ con } x < 0! && \Rightarrow x = -\frac{3}{\sqrt{13}} && \Rightarrow y = -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

A questo punto si valuta f nei due punti trovati e si conclude come sopra dopo aver confrontato i valori ottenuti sopra. Si noti quante più difficoltà siano presenti in questo metodo.

Terzo metodo: utilizziamo i moltiplicatori di Lagrange. Impostiamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3 = 2x\lambda \\ 2y - 2 = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1 - \lambda) = 3 \\ 2y(1 - \lambda) = 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui notiamo che deve valere $\lambda \neq 1$ altrimenti troveremmo $3 = 0 = 2$. Quindi sottraendo il triplo della seconda riga al doppio della prima troviamo $2(2x - 3y)(1 - \lambda) = 0$, quindi dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x = 3y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

che porta alle soluzioni come nel primo metodo.

Esercizio 2.30. *Determina i punti critici della funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4x^2$ e determina la loro natura. Successivamente, trova massimo e minimo assoluto di f nella palla euclidea chiusa di raggio tre centrata nell'origine.*

Risoluzione omessa. Si troverà un punto critico (\bar{x}, \bar{y}) non classificabile tramite la matrice Hessiana (per la presenza dell'autovalore zero). In questo caso la classificazione va fatta con la verifica diretta che il punto, in questo caso, non è di estremo locale: infatti possiamo trovare due rette (individuare!) passanti per il punto che potremmo parametrizzare come $r_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ e $r_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ e tali che $r_1(0) = r_2(0) = (\bar{x}, \bar{y})$ e per cui vale $r_1(t) > 0$ e $r_2(t) < 0$ in un intorno *bucato* di $t = 0$.

Esercizio 2.31. *Individuare il valore b per cui la funzione $f: [-2, 2] \times [1, 4]$ definita come*

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2y - 3x^2 - y^2 + 3y & \text{se } y \geq x^2 \\ x^4 - x^2y - 2x^2 + by & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

risulta continua, quindi individuare massimo e minimo di f .

Notiamo che vale $f(x, y) = f(-x, y)$, quindi possiamo risolvere in modo equivalente il seguente esercizio:

Individuare il valore b per cui la funzione $f: [0, 2] \times [1, 4]$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2y - 3x^2 - y^2 + 3y & \text{se } y \geq x^2 \\ x^4 - x^2y - 2x^2 + by & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

risulta continua, quindi, fissato questo valore, individuare massimo e minimo di f .

Per comodità introduciamo la notazione

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y) = x^2y - 3x^2 - y^2 + 3y & \text{se } y \geq x^2 \\ f_2(x, y) = x^4 - x^2y - 2x^2 + by & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

e verifichiamo che $f_1(x, x^2) = f_2(x, x^2)$ per ogni $x \in [1, 2]$ (sono i valori x per cui la parabola $y = x^2$ interseca il dominio di f). Un semplice calcolo porta a

$$f_1(x, x^2) = 0, \quad f_2(x, x^2) = -2x^2 + bx^2$$

da cui deduciamo che dobbiamo porre $b = 2$.

Consideriamo il gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{cases} \nabla f_1(x, y) = (2xy - 6x, x^2 - 2y + 3) & \text{se } y > x^2 \\ \nabla f_2(x, y) = (4x^3 - 2xy - 4x, -x^2 + 2) & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

Si noti che per ogni punto (x, y) tale che $y = x^2$ non possiamo garantire che f ammetta derivate parziali, mentre quando vale $y \neq x^2$ possiamo sempre trovare un intorno di questo punto in cui questa disuguaglianza

permane, quindi la funzione f coincide o con f_1 o con f_2 in questo intorno. La differenziabilità per $y \neq x^2$ segue immediatamente dalla differenziabilità di f_1 o f_2 a seconda dei casi. Poiché l'obiettivo dell'esercizio è trovare massimi e minimi, consideriamo tutti i punti (x, y) tali che $y = x^2$ come candidati punti di estremo. Tra l'altro abbiamo già notato che $f(x, y) = f(x, x^2) = 0$ in tutti questi punti.

Cerchiamo ora i punti (x, y) con $y \neq x^2$ tali che $\nabla f(x, y) = 0$. Per farlo dobbiamo risolvere i sistemi

$$\begin{cases} 2x(y-3) = 0 \\ x^2 - 2y + 3 = 0 \\ y > x^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x(2x^2 - y - 2) = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \\ y < x^2 \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$\text{per il primo} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 3/2 \\ y > x^2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x^2 = 3 \\ y > x^2 \end{cases} \quad \text{mentre per il secondo} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ y < x^2 \end{cases} .$$

Notiamo che solo il punto $(0, 3/2)$ risolve i sistemi precedenti. Poiché abbiamo notato che la funzione è *pari nella variabile x* e abbiamo ristretto la nostra attenzione sul dominio $[0, 2] \times [1, 4]$ anche questo punto è da scartare in quanto non appartiene all'interno del dominio. *Se invece non avessimo notato questa proprietà allora il punto diventa un candidato di estremo con valore $f(0, 3/2) = 9/4$. Uno studio della matrice Hessiana porterebbe ad una matrice con autovalori negativi, da cui dedurremmo la presenza di un massimo locale (fare i calcoli per esercizio). Tuttavia l'esercizio non contempla la discussione esplicita dei punti critici, quindi considerarlo a priori un candidato di estremo non è poi così grave.*

Molti studenti hanno considerato le disuguaglianze larghe nei sistemi sopra, hanno quindi considerato questi come punti critici (ed in essi sappiamo già che il valore assunto dalla funzione è zero). Questi studenti hanno poi eseguito il test della matrice Hessiana attraverso le funzioni f_1 e f_2 . Questo è un errore grave perché in questi punti non è nemmeno garantita la differenziabilità della funzione f , quindi è ancora meno probabile il fatto che sia differenziabile due volte.

A questo punto rimane solo lo studio di f lungo il bordo. Dobbiamo quindi studiare le funzioni

$$\begin{aligned} a: [0, 2] &\rightarrow \mathbb{R}, & a(x) &= f(x, 4) = f_1(x, 4) = \dots = x^2 - 4, \\ b: [1, 4] &\rightarrow \mathbb{R}, & b(y) &= f(0, y) = f_1(0, y) = \dots = 3y - y^2, \\ c: [1, 4] &\rightarrow \mathbb{R}, & c(y) &= f(2, y) = f_2(2, y) = \dots = 8 - 2y, \\ d: [0, 2] &\rightarrow \mathbb{R}, & d(x) &= f(x, 1), \end{aligned}$$

lasciando lo studio di quest'ultima funzione a un secondo momento. Le funzioni a e c non hanno punti critici interni all'intervallo, mentre la funzione b presenta un massimo per $y = 3/2$ recuperando così il candidato $(0, 3/2)$ già individuato precedentemente con valore $f(0, 3/2) = 9/4$. Infine abbiamo

$$d(x) = \begin{cases} -2x^2 + 2 & x \leq 1 \\ x^4 - 3x^2 + 2 & x > 1 \end{cases} .$$

Oltre al candidato $x = 1$ come punto di estremo in quanto in esso d non è derivabile (ma in cui la funzione vale $d(1) = f(1, 1) = 0$ come già calcolato) troviamo dallo studio della derivata solo il punto $x = \sqrt{3/2}$ (fare i calcoli per esercizio). Abbiamo $d(\sqrt{3/2}) = f(\sqrt{3/2}, 1) = f_2(\sqrt{3/2}, 1) = -1/4$. Infine dobbiamo considerare gli spigoli del rettangolo

$$f(0, 4) = -4, \quad f(0, 1) = 2, \quad f(2, 4) = 0, \quad f(2, 1) = 6 .$$

Quindi concludiamo che il minimo è -4 , mentre il massimo è 6 .

Esercizio 2.32. Data la funzione f definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{|x|+|y|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

determina il suo dominio D e disegnalolo. In quali punti del dominio la funzione è continua? La funzione è differenziabile nell'origine?

Il dominio è $D = \{(x, y) \mid xy \geq -1\}$ e consiste nella parte aperta e illimitata di piano che contiene gli assi ed è delimitata dall'iperbole $xy = -1$. La funzione è continua su $D \setminus \{(0, 0)\}$ in quanto rapporto di funzioni continue. La continuità nell'origine è ottenuta nel modo seguente.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{|x|+|y|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{\ln(1+xy)}{xy}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{xy}{|x|+|y|}}_{\rightarrow 0} = 0,$$

dove si dimostra che il secondo fattore va a zero mediante l'utilizzo del teorema dei carabinieri dopo aver fatto le seguenti maggiorazioni

$$0 \leq \left| \frac{xy}{|x|+|y|} \right| = \frac{|x||y|}{|x|+|y|} \leq |x| \rightarrow 0$$

in cui si usa la maggiorazione $|y| \leq |x| + |y|$.

La funzione non è differenziabile in zero. Dopo aver dedotto che $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ essendo la funzione costante lungo gli assi, dalla definizione di differenziabilità si giunge a discutere se vale la seguente affermazione

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{\ln(1+xy)}{|x|+|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{(|x|+|y|)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Tuttavia questa identità non vale infatti restringendoci alla retta $y = x$ possiamo verificare che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+xy)}{(|x|+|y|)\sqrt{x^2+y^2}} \right]_{(x,y)=(t,t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t^2)}{(|t|+|t|)\sqrt{t^2+t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t^2)}{2\sqrt{2}|t|^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t^2)}{2\sqrt{2}t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

Esercizio 2.33. Su una palla di raggio 3 centrata nell'origine, la temperatura segue la legge $T(x, y, z) = x - 2y + 2z$. Trova il punto più caldo e il punto più freddo.

Risoluzione omessa. Dopo aver mostrato che massimo e minimo non sono raggiunti all'interno, trovare i punti di estremo sul bordo usando i moltiplicatori di Lagrange. Si noti che la sfera si descrive come $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e non come $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ come fatto da ben 3 studenti dei 13 che hanno consegnato il compito.

2.6 A.A. 2023/2024

Esercizio 2.34. Data una funzione $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , si definisce la funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ come $f(x, y, z) = \mu(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Per quali punti (x, y, z) la funzione f è continua? In quali punti possiamo dire con certezza che la funzione è differenziabile? Quale condizione aggiuntiva su μ va richiesta affinché sia differenziabile su tutto \mathbb{R}^3 ?

Sapendo che la funzione μ ha le seguenti proprietà: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mu(t) = 0$, la funzione è decrescente nell'intervallo $]-\infty, -3]$, crescente nell'intervallo $[-3, 4]$ e di nuovo decrescente in $[4, +\infty[$. Inoltre abbiamo i seguenti valori $\mu(-3) = -2$, $\mu(0) = -1$, $\mu(4) = 1$. Cosa possiamo affermare sull'esistenza (o non esistenza) di massimi e minimi per la funzione f ? In caso di esistenza, quanto valgono questi valori e in quali punti sono raggiunti?

Introduciamo la funzione $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Questa funzione è continua e differenziabile su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Essendo le funzioni μ e ρ continue, deduciamo che f è continua in quanto composizione di funzioni continue. Con un'argomentazione analoga possiamo affermare che f è differenziabile almeno su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Resta da risolvere il problema della differenziabilità nell'origine. Le derivate parziali di f si calcolano come segue (si mostrano i calcoli solo per la derivata in x , gli altri sono identici per simmetria della funzione)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mu(|t|) - \mu(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mu(|t|) - \mu(0)}{|t|} \cdot \frac{|t|}{t}.$$

Nell'ultimo limite la prima frazione tende al valore $\mu'(0)$. Se $\mu'(0) \neq 0$ allora la derivata parziale non esiste, se invece $\mu'(0) = 0$ allora la derivata parziale esiste con valore zero. Ne consegue che, se $\mu'(0) \neq 0$ allora f non è differenziabile nell'origine, se invece $\mu'(0) = 0$ troviamo che esiste il gradiente $\nabla f(0, 0, 0)$ con valore $(0, 0, 0)$. Verifichiamo che in questo caso f è differenziabile nell'origine calcolando il seguente limite

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{f(x, y, z) - f(0, 0, 0) - \nabla f(0, 0, 0) \cdot (x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\mu(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) - \mu(0)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \mu'(0) = 0.$$

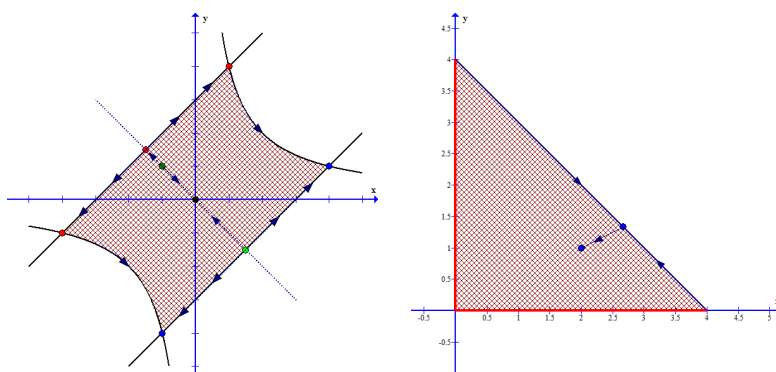


Figura 5: Vedi Esercizio [2.36](#) a sinistra. Vedi Esercizio [2.37](#) a destra.

Successivamente, notiamo che su $[0, +\infty)$ la funzione μ presenta un minimo assoluto in 0 con valore -1 e un massimo assoluto in 4 con valore 1. Quindi la funzione f ha minimo assoluto -1 nell'origine e massimo assoluto 1 sulla sfera di raggio 4 centrata nell'origine.

Esercizio 2.35. Determinare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 - x^2 + y^2 - 5 = 0\}.$$

Per risolvere questo esercizio impostiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} 4x = \lambda(4x^3 - 2x) \\ 2y = \lambda 2y \\ x^4 - x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

dopo aver notato che $\nabla F(x, y) = (0, 0)$, ovvero non ha rango massimo, nei punti $(0, 0)$ e $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$ che non appartengono all'insieme A . Dalla seconda equazione troviamo $2y(\lambda - 1) = 0$ che ci porta a considerare i due casi $y = 0$ e $\lambda = 1$. Nel primo caso, sostituendo direttamente nel vincolo troviamo i candidati $(x_0, 0)$ dove x_0 è una soluzione dell'equazione $x^4 - x^2 - 5 = 0$. I possibili valori di x_0 sono $\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}$. In questi punti la funzione vale $1 + \sqrt{21}$ che è un numero nell'intervallo $[5, 6]$.

Invece, ponendo $\lambda = 1$ troviamo nella prima equazione $4x^3 - 6x = 0$ che ha soluzioni $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3/2}$. Nel caso $x = 0$, troviamo i candidati $(0, \pm\sqrt{5})$ dove la funzione vale 5. Per gli altri valori di x troviamo $y = \pm\sqrt{17}/4$ dove la funzione vale $29/4 > 6$. Concludiamo quindi che il massimo è $29/4$ e il minimo 5.

Esercizio 2.36. Determinare i massimi e i minimi relativi e assoluti della funzione $f(x, y) = xy e^{x-y}$ sulla regione piana delimitata dalle curve $|x - y| = 3$ e $xy = 4$.

Dopo aver calcolato il gradiente $\nabla f(x, y) = e^{x-y}(y(x+1), x(y-1))$, andiamo a vedere dove questo si annulla risolvendo il sistema $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ che si riduce facilmente a

$$\begin{cases} y(x+1) = 0 \\ x(y-1) = 0 \end{cases}$$

che porta come candidati i punti $(0, 0)$ e $(-1, 1)$. La matrice hessiana risulta

$$H_f(x, y) = e^{x-y} \begin{pmatrix} y(x+2) & (1+x)(1-y) \\ (1+x)(1-y) & x(y-2) \end{pmatrix}$$

Lo studio della matrice hessiana per il punto $(0, 0)$ restituisce che l'origine è un punto di sella. Invece il punto $(-1, 1)$ è un minimo locale con valore $f(-1, 1) = -e^{-2}$. Studiamo il bordo della regione. Essa è costituita da un quadrilatero con due lati curvilinei che sono sottinsiemi della curva di livello $\{xy = 4\}$ e due segmenti sottinsiemi delle rette $y = x - 3$ e $y = x + 3$. I vertici sono nei quattro punti $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(-1, -4)$, $(-4, -1)$ con valori

$f(1, 4) = 4e^{-3}$, $f(4, 1) = 4e^3$, $f(-1, -4) = 4e^3$, $f(-4, -1) = 4e^{-3}$ che sono automaticamente candidati estremi locali.

Sui pezzi di curva di livello $\{xy = 4\}$ la funzione ha valori $f(x, y) = xy e^{x-y} = 4e^{x-y}$. Osservando le equazioni delle due rette $x - y = \pm 3$, si può notare che il valore dell'esponente varia nell'intervallo $[-3, 3]$ e concludere che la funzione f varia in maniera monotona lungo questi insiemi. Quindi non abbiamo estremi in questa zona da aggiungere ai candidati già introdotti. Sui segmenti contenuti nelle rette $x - y = \pm 3$ la funzione assume valori $f(x, y) = xy e^{\pm 3}$. La funzione lungo tali segmenti assume il valore massimo agli estremi e valore minimo nel punto di intersezione con la bisettrice $y = -x$. Verificare per esercizio questa affermazione sia con calcolo diretto, sia mediante uno studio degli insiemi di livello della funzione $g(x, y) = xy$. Troviamo quindi dei possibili punti di estremo nei punti $(\pm \frac{3}{2}, \mp \frac{3}{2})$. Essi sono minimi locali per la funzione f ristretta ai suddetti segmenti. I valori sono $f(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = -\frac{9}{4}e^{-3}$ e $f(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{9}{4}e^3$. Dobbiamo analizzare ora se preservano questa proprietà anche per la funzione f ristretta alla regione piana richiesta nell'esercizio. Il punto $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ è il punto di minimo assoluto. Per quanto riguarda il punto $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ è possibile mostrare che non si tratta di un punto di minimo locale studiando il comportamento di f sulla bisettrice $y = -x$ su cui assume i valori $-x^2 e^{2x}$. La funzione infatti è decrescente nell'intervallo $[-\frac{3}{2}, -1]$.

Infine studiando i valori di f lungo il bordo della regione deduciamo che $(4, 1)$ e $(-1, -4)$ sono punti di massimo assoluto, mentre gli altri due non sono punti di estremo.

Esercizio 2.37. Sia A il dominio della funzione $a(x, y) = \sqrt{4 - x - y}$ e sia B il dominio della funzione $b(x, y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt{y}$. Disegna $A \cap B$.

Classifica tutti i punti critici della funzione $f(x, y) = x^2 y e^{-(x+y)}$. Calcola massimo e minimo, se esistono, della funzione f nell'insieme $A \cap B$.

Dallo studio dei domini delle funzioni a e b deduciamo le richieste $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 4$. Quindi $A \cap B$ è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 0)$. Inoltre la funzione si annulla sugli assi coordinati e ha lo stesso segno di y . In particolare $f \geq 0$ su $A \cap B$ con minimo zero raggiunto sui due lati contenuti negli assi. Potremmo a questo punto già dedurre un massimo locale per f ristretta al lato obliquo contenuto nella retta $y = 4 - x$. In particolare studiando la funzione $h(x) = f(x, 4 - x) = x^2(4 - x)e^{-4}$ nell'intervallo $[0, 4]$ troviamo che la derivata di h risulta $h'(x) = e^{-4}(8x - 3x^2)$ che si annulla in $x = 0$ e $x = 8/3$. Troviamo come candidato il punto $P = (\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$ con valore $f(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}) = 2^8 e^{-4}/27$.

Studiamo ora i punti critici della funzione f su tutto \mathbb{R}^2 . Possiamo calcolare il gradiente

$$\nabla f(x, y) = (xy(x-2), x^2(y-1)) e^{-(x+y)}$$

e la matrice Hessiana

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} y(x^2 - 4x + 2) & x(x-2)(y-1) \\ x(x-2)(y-1) & x^2(y-2) \end{pmatrix} e^{-(x+y)}.$$

Il gradiente si annulla nel punto $(2, 1) \in A \cap B$ e in tutti i punti dell'asse $x = 0$. Possiamo calcolare

$$H_f(2, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} e^{-3} \quad e \quad H_f(0, y) = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-y}.$$

Da quanto sopra deduciamo che il punto $(2, 1)$ è di massimo locale con valore $f(2, 1) = 4e^{-3}$. Per quanto riguarda i punti dell'asse y non possiamo determinare nulla dallo studio della matrice hessiana. Tuttavia lo studio del segno della funzione f assicura che i punti $(0, y)$ con $y > 0$ sono minimi locali, quelli con $y < 0$ sono massimi locali mentre l'origine non è un punto di estremo locale.

Dal fatto che la funzione tende a zero per $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$ se restiamo nel primo quadrante potremmo dedurre che il punto $(2, 1)$ è punto di massimo assoluto su tutto il primo quadrante. In alternativa possiamo notare che $f(2, 1) = 4e^{-3} > 2^8 e^{-4}/27 = f(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$. Infatti moltiplicando i valori per $e^4/4$ troviamo $e > 64/27$ che è vera essendo $e > 2.5 = 67.5/27 > 64/27$.

Esercizio 2.38. Dopo averne stabilito l'esistenza, trovare tutti i punti di massimo/minimo relativo e assoluti della funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$ sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y^2 - x^2 \geq z^2, |y| \leq 2\}.$$

Accenno di risoluzione. Dopo aver notato che l'origine appartiene all'insieme, possiamo concludere che la funzione ha minimo assoluto zero sull'insieme richiesto. L'insieme E risulta avere la forma di un doppio cono disposto orizzontalmente. La funzione f ha solo l'origine come punto critico, quindi non ci sono candidati nell'interno di E . Eventuali massimi e minimi locali sono raggiunti sulla frontiera. Sulle basi descritte dalle equazioni $y = \pm 2$ e $x^2 + z^2 \leq 12$ la funzione assume valori $x^2 + z^2 + 12$. Quindi i massimi sono raggiunti sul bordo della base circolare con valore 24. Per quanto riguarda i punti sulla superficie laterale del doppio cono, descritta dalle equazioni $|y| \leq 2$ e $x^2 + z^2 = 3y^2$, notiamo che la funzione assume valori $6y^2$ e quindi anche in questo caso i valori massimi sono raggiunti alla quota $y = \pm 2$ e il minimo, nell'origine.

Esercizio 2.39. Dopo averne stabilito l'esistenza, trovare il minimo e il massimo della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 y^2 + z^2$ sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, |z - 1| \leq 4\}.$$

Specificare i punti in cui viene raggiunto il minimo e i punti in cui viene raggiunto il massimo.

2.7 A.A. 2024/2025

Esercizio 2.40. Discuti l'esistenza di massimi e minimi della funzione $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ sull'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$.

L'insieme E è un piano, quindi un insieme illimitato. La funzione è coerciva, quindi ammetterà minimo e sarà superiormente illimitata. Tale proprietà si può dedurre osservando che

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 \geq x^2 + y^2 + z^2 = \|(x, y, z)\|^2$$

e quindi dal teorema del confronto è facile concludere che

$$\lim_{\|(x, y, z)\| \rightarrow +\infty} f(x, y, z) = +\infty.$$

A questo punto usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per trovare il minimo impostando il sistema $\nabla f = \lambda \nabla F$ con il vincolo $F(x, y, z) = 1$ dove $F(x, y, z) = x + y + z$. Il sistema risulta

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ 4y = \lambda \\ 6z = \lambda \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda/2 \\ y = \lambda/4 \\ z = \lambda/6 \\ \frac{11}{12}\lambda = 1 \end{cases}$$

da cui deduciamo il punto di minimo $(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11})$ con minimo $f(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}) = \frac{1}{121}(36 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 4) = \frac{66}{121}$.

Esercizio 2.41. Discuti l'esistenza di massimi e minimi della funzione $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$ sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq 3x \leq 12\}$.

Esercizio 2.42. Considerare la funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 y + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

e dire se è continua nell'origine, se ammette derivate parziali nell'origine, se è differenziabile nell'origine. Come si può motivare l'affermazione

<< se $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, allora f è differenziabile in (x_0, y_0, z_0) ? >>
senza eseguire i calcoli?

Esercizio 2.43. Dato l'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3(x^2 + y^2) - 2y^2 = 0\}$, verificare che il punto $P = (1, 1)$ appartiene all'insieme. Spiegare perché in un intorno di questo punto è possibile vedere V come il grafico di una funzione $y = h(x)$ e calcolare la retta tangente a tale grafico nel punto P .