Geometria 3 - Curve e superfici 2025/26
Foglio di esercizi 7

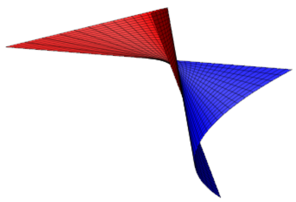
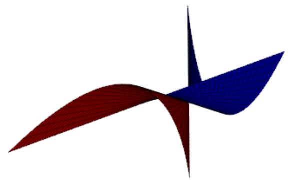
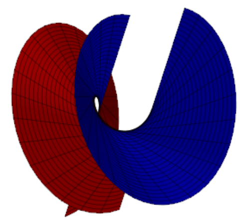
Prof. Valentina Beorchia

2 maggio 2026

1. Si consideri il seguente atlante per il *nastro di Möbius*:
$$\mathcal{A} = \{(U_1 = (0, 2\pi) \times (-1, 1), \varphi_1), (U_2 = (0, 2\pi) \times (-1, 1), \varphi_2)\}$$
$$\varphi_1 : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3,$$
$$\varphi_1(u_1, v_1) = \left((2 - v_1 \sin \frac{u_1}{2}) \sin u_1, (2 - v_1 \sin \frac{u_1}{2}) \cos u_1, v_1 \cos \frac{u_1}{2}\right),$$
$$\varphi_2 : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3,$$
$$\varphi_2(u_2, v_2) = \left((2 - v_2 \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{u_2}{2}) \cos u_2, -(2 - v_2 \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{u_2}{2})) \sin u_2, v_2 \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{u_2}{2})\right).$$
Si verifichi che $\mathcal{A}$ non è un atlante orientato, e che non è possibile modificare $\mathcal{A}$ in un atloante orientato, quindi il nostro di Móbius è una superficie (regolare) non orientabile.

2. Dati tre vettori $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$, si dimostri che si ha
$$\mathrm{Span}(w_1 + vw_2, w_3) = \mathrm{Span}(w_1, w_3)$$
per ogni $v \in I \subset \mathbb{R}$, con I intervallo aperto, se e solo se w_1, w_2, w_3 sono linearmente dipendenti.

3. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata regolare, e supponiamo che la curvatura di α non si annulli mai: $k(t) > 0$, per ogni $t \in I$. Poniamo
$$\varphi : I \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t, s) = \alpha(t) + s\alpha'(t),$$
dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Si dimostri che $\varphi(I \times \mathbb{R}^*) \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie, detta *sviluppabile delle tangenti*, che verifica le condizioni 1 e 3 della definizione di superficie regolare.

Si verifichi, inoltre, che i piani tangenti alla superficie lungo le curve $\varphi(\text{cost}, s)$ sono costanti, e che si tratta, quindi, di una superficie rigata sviluppabile.

4. Fissato $a \neq 0$, sia $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'elica circolare parametrizzata da $\sigma(u) = (\cos u, \sin u, au)$. L'elicoide retto S costruito a partire da essa è l'unione delle rette che passano per $\sigma(u)$ e che intersecano perpendicolarmente l'asse delle z, ed è parametrizzato da $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$.

   (a) Per ogni $p \in S$, si determini una base del piano tangente $T_P S$.

   (b) Si calcolino i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

   (c) Si calcolino curvatura Gaussiana e curvatura media dell'elicoide.

   (d) Si verifichi che l'elicoide è una superficie rigata e si dica se è sviluppabile o meno.

5. Si consideri il cono a una falda senza vertice, di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; si verifichi che la mappa

$$\varphi_2 : (0, +\infty) \times (0, \sqrt{2}\,\pi) \to \mathbb{R}^3,\ \varphi_2(\rho, \theta) = \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}\,\theta), \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\,\theta), \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right)$$

è una sua parametrizzazione locale, la cui immagine è il cono meno una retta (una generatrice).

Si verifichi, inoltre, che la mappa

$$\varphi_1 : (0, +\infty) \times (0, \sqrt{2}\pi) \to \mathbb{R}^3,\ \varphi_1(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)$$

è una parametrizzazione locale del piano coordinato $z = 0$ (rappresenta le coordinate polari del piano).

Si confrontino, infine, i coefficienti delle prime forme fondamentali delle due parametrizzazioni, e se ne deduca che $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ è un'isometria.

6. Si verifichi che le due superfici parametrizzate

$$\varphi_1(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \ln u),$$

$$\varphi_2(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$$

hanno curvature Gaussiane coincidenti in tutti i punti $\varphi_1(u,v)$ e $\varphi_2(u,v)$, ma che $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ non è un'isometria.

7. Si calcolino i coefficienti di Christoffel delle seguenti superfici (notazioni usate a lezione):

   (a) superfici rigate $\varphi(u,v) = \alpha(u) + v\, w(u)$;

   (b) sfera parametrizzata da $\varphi(x,y,z) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$;

   (c) sfera parametrizzata in coordinate polari $\varphi(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$;

   (d) elicoide $\varphi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, au)$, con $a > 0$;

   (e) paraboloide ellittico $\varphi(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$;

   (f) superfici di rotazione $\varphi(u,v) = (y(u)\cos v, y(u)\sin v, z(u))$.