Geometria 3 - Curve e superfici 2024/2025
Prova scritta
14 gennaio 2026

Prof. Valentina Beorchia

1. **(10 punti)** Sia $\alpha : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la curva data da $\alpha(t) = (t, 2t, t^4)$.
   (a) Si dimostri che α è una curva regolare.
   (b) Si calcoli la curvatura di α in un punto generico e si verifichi che α è biregolare.
   (c) Si dica se α è una curva piana e in caso affermativo si calcoli il piano in cui è contenuta.

2. **(14 punti)** Si consideri il toro $T = \varphi(\mathbb{R}^2)$ ottenuto come immagine della funzione
$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(u, v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u))$$
   dove a e r sono numeri reali tali che $a > r > 0$:
   (a) si calcoli la curvatura gaussiana di S in un punto generico;
   (b) si classifichino i punti del toro;
   (c) si dica, motivando la risposta, se esistono isometrie locali fra il toro e il piano.

3. **(6 punti)** Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare.
   (a) Con un argomentazione qualitativa (senza fare conti), si dimostri che se per un punto di S passano 3 rette contenute in S allora il punto è planare.
   (b) Sia α una curva regolare contenuta in S. Si supponga che il piano tangente a S lungo i punti di α sia costante, Con un argomentazione qualitativa (senza fare conti), si dimostri che i punti di α sono o planari o parabolici.