

GEOMETRIA 3 - CURVE E SUPERFICI 2024/2025
PROVA SCRITTA 8 SETTEMBRE 2025
PROF. VALENTINA BEORCHIA

(1) **(10 punti)** Si consideri la seguente curva:

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \alpha(t) = (e^t, e^{2t}, e^{3t})$$

Si dica, giustificando la risposta, se α è biregolare e si calcolino, ove possibile, la sua curvatura e torsione.

Infine, si verifichi se la curva è piana e si giustifichi la risposta.

(2) **(10 punti)**

(a) Si dia la definizione di diffeomorfismo tra superfici regolari.

(b) Si esibisca un diffeomorfismo tra la sfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

e l'ellissoide

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(3) Si consideri il cono a una falda parametrizzato da

$$\varphi : U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, 0 < v < 2\pi\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = \left(\frac{1}{2} u \cos v, \frac{1}{2} u \sin v, \frac{\sqrt{3}}{2} u \right).$$

(a) **(4 punti)** Si calcolino i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

(b) **(3 punti)** Si dica, motivando la risposta, se il cono è una superficie di rotazione.

(c) **(2 punti)** Si dimostri che il cono è una superficie rigata, indicando una parametrizzazione di una direttrice e una parametrizzazione della generatrice.

(d) **(3 punti)** Si dica, motivando la risposta, se si tratta di una rigata sviluppabile.