Geometria 3 - Curve e superfici 2024/2025
Prova scritta 28 gennaio 2026

Prof. Valentina Beorchia

1. **(10 punti)** Sia $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ con
$$\beta(t) = (t + \sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t - \sin t).$$
Si verifichi che $\beta(t)$ è una curva regolare priva di flessi e si calcoli curvatura e torsione in un punto generale, verificando in particolare che sono entrambe costanti e non nulle.

   Si trovi un'elica della forma $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ isometrica a $\beta(t)$ e si descriva un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$ che trasforma $\beta(t)$ in $\alpha(t)$.

2. Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $\varphi(u, v) = (u, v^3, u - v)$.
   (a) **(5 punti)** Si dimostri che $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$ è una superficie regolare.
   (b) **(5 punti)** Si dimostri che è orientabile e si calcoli un campo di versori normali a S.
   (c) **(4 punti)** Si verifichi che S è una superficie rigata e si dica se è sviluppabile.

3. **(6 punti)** Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da
$$\varphi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right).$$
Sapendo che
$$S = \varphi(\mathbb{R}^2) \setminus (\{x = 0\} \cup \{y = 0\})$$
è una superficie regolare e φ, opportunamente ristretto, è una parametrizzazione locale di S, svolgere i seguenti punti:
   (a) verificare che S è una superficie minima;
   (b) calcolare la curvatura Gaussiana e le curvature principali.