Capitolo 9

Coniche

9.1 Coniche nel piano euclideo

9.1.1 Coniche come luoghi geometrici

L'ambiente in cui inizialmente studieremo le coniche è il piano euclideo $\mathbb{E}^2 = \mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$. Successivamente avremo bisogno anche di coordinate complesse, quindi "amplieremo" il nostro ambiente ad $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$: dall'inclusione canonica $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$, segue l'inclusione dei piani euclidei

$$\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}.$$

Le coniche sono note fino dai tempi più remoti come luoghi geometrici, *cioè come insiemi di punti caratterizzati da proprietà geometriche.*

Definizione 9.1.1. a) Fissata una retta δ e un punto F del piano, il luogo dei punti equidistanti da δ e da F si dice *parabola* e il punto F e la retta δ sono detti, rispettivamente, *fuoco* e *direttrice* della parabola.

b) Fissati due punti del piano F_1 ed F_2, il luogo dei punti tali che la somma delle loro distanze da F_1 ed F_2 è costante si dice *ellisse*.

c) Fissati due punti del piano F_1 ed F_2, il luogo dei punti tali che la differenza delle loro distanze da F_1 ed F_2 è costante si dice *iperbole*.

Nei casi (b) e (c), i punti F_1 e F_2 sono detti *fuochi* dell'ellisse o dell'iperbole, rispettivamente

Per determinare le equazioni di questi luoghi geometrici, al fine di semplificare i calcoli, scegliamo opportunamente i punti e le rette in questione.

a) Siano, ad esempio, in un riferimento cartesiano ortogonale $(O; x, y)$:

$$\delta: \; y = -p/2, \quad F = (0, p/2).$$

Sia $P = (x, y)$ un generico punto del piano; il luogo geometrico in questione è caratterizzato dalla proprietà

$$d(P, \delta) = d(P, F).$$

Poiché la proiezione ortogonale di P su δ è il punto $P' = (x, -p/2)$ e $d(P, \delta) = d(P, P')$, la condizione precedente diventa:

$$\|P - P'\|^2 = \|P - F\|^2 \quad \textit{cioè} \quad \|(0, y + p/2)\|^2 = \|(x, y - p/2)\|^2$$

quindi

$$(y + p/2)^2 = x^2 + (y - p/2)^2 \quad \textit{da cui} \quad x^2 = 2py.$$

b) Siano $F_1 = (-q, 0)$, $F_2 = (q, 0)$ (con $q \geq 0$) e sia k un numero reale positivo tale che $k > 2q$; vogliamo determinare l'equazione del luogo dei punti $P = (x, y)$ tali che

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = k. \tag{9.1.1}$$

Consideriamo le intersezioni di tale luogo geometrico con i semiassi positivi, cioè due punti del tipo $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$, con $a > 0, b > 0$. Dal fatto che $d(A, F_1) + d(A, F_2) = k$, segue $k = 2a$; inoltre dalla relazione $d(B, F_1) + d(B, F_2) = k$ segue che $2\sqrt{q^2 + b^2} = k$. Quindi si hanno le uguaglianze

$$k = 2a, \quad q^2 = a^2 - b^2.$$

(Si osservi che, in particolare, si deduce $a \geq b$). Elevando al quadrato ambo i membri di (9.1.1), si ottiene:

$$\|(x + q, y)\|^2 + \|(x - q, y)\|^2 + 2\,\|(x + q, y)\|\,\|(x - q, y)\| = 4a^2$$

cioè

$$2(x^2 + y^2 + q^2) + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + q^2 + 2qx)(x^2 + y^2 + q^2 - 2qx)} = 4a^2$$

e quindi

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + q^2)^2 - 4q^2x^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + q^2).$$

Elevando ancora al quadrato e semplificando si ottiene

$$-q^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + y^2 + q^2)$$

e quindi, operando la sostituzione $q^2 = a^2 - b^2$, si ottiene l'equazione del luogo geometrico in questione in funzione dei due parametri a e b:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividendo ambo i membri per a^2b^2 si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se $q = 0$, cioè se $a = b$, allora i fuochi F_1 ed F_2 coincidono nell'origine, l'ellisse si dice circonferenza e la sua equazione assume la forma

$$x^2 + y^2 = r^2$$

dove $r = a = b$ ed è detto raggio della circonferenza.
$c)$ *Fissiamo i punti $F_1 = (-q, 0)$, $F_2 = (q, 0)$ (con $q \geq 0$) e un numero reale positivo $k < 2q$; vogliamo determinare l'equazione del luogo dei punti $P = (x, y)$ tali che*

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = k. \tag{9.1.2}$$

Si osservi che, contrariamente al caso precedente, tale luogo geometrico non interseca l'asse y, in quanto ogni suo punto P è equidistante da F_1 e F_2, mentre $k \neq 0$. Si consideri, invece, l'intersezione $A = (a, 0)$ ($a > 0$) di tale luogo geometrico con il semiasse positivo delle x. Anche per A vale

$$k = |d(A, F_1) - d(A, F_2)| = |a + q - |a - q||.$$

Se fosse $|a - q| = a - q$, si avrebbe $k = 2q$, contro l'ipotesi $k < 2q$. Quindi deve essere $a < q$ e dunque la condizione precedente implica

$$k = |a + q + a - q| = 2a.$$

Elevando al quadrato ambo i membri di (9.1.2), si ottiene:

$$\|(x + q, y)\|^2 + \|(x - q, y)\|^2 - 2\,\|(x + q, y)\|\,\|(x - q, y)\| = 4a^2$$

cioè

$$2(x^2 + y^2 + q^2) - 2\sqrt{(x^2 + y^2 + q^2 + 2qx)(x^2 + y^2 + q^2 - 2qx)} = 4a^2$$

e quindi

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + q^2)^2 - 4q^2x^2} = (x^2 + y^2 + q^2) - 2a^2.$$

Elevando ancora al quadrato e semplificando si ottiene dunque:

$$-q^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + y^2 + q^2)$$

e quindi

$$(a^2 - q^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - q^2).$$

Poiché $a < q$, la quantità $q^2 - a^2$ è sicuramente positiva; si ponga dunque, in analogia con quanto visto nel caso b), $q^2 - a^2 = b^2$; pertanto l'equazione del luogo geometrico in questione diventa:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Dividendo ambo i membri per $-a^2b^2$ si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Osservazione 9.1.2. Da quanto visto in precedenza, segue che, se C è una parabola di equazione

$$x^2 = 2py,$$

allora la sua direttrice ha equazione $y = -p/2$ e il suo fuoco è il punto $(0, p/2)$. Con procedimento del tutto analogo, se C è una parabola di equazione $y^2 = 2px$, allora la sua direttrice è $x = -p/2$ e il suo fuoco è il punto $(p/2, 0)$. Se C è una ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e $a > b$, allora i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ (con procedimento del tutto analogo, si vede che se $a < b$ allora i suoi fuochi sono i punti $(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2})$). Se C è un'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

allora i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$.

Ricordiamo ora le rette e i punti notevoli di una conica.

Definizione 9.1.3. i) Sia C una parabola di fuoco F e di direttrice δ; - la retta ortogonale a δ e passante per F si dice *asse* di C; - il punto di intersezione dell'asse con la parabola si dice *vertice*.

ii) Sia C un'ellisse di fuochi (distinti) F_1 e F_2; - la retta per i fuochi si dice *asse maggiore*; - la retta asse del segmento $\overline{F_1F_2}$ si dice *asse minore*; - il punto di intersezione dell'asse maggiore e dell'asse minore (cioè il punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$) si dice *centro* di C; - i quattro punti di intersezione di C con gli assi si dicono *vertici*; - la misura dei segmenti congiungenti il centro e i vertici che appartengono all'asse maggiore si dice *semiasse maggiore* (analogamente si definisce il *semiasse minore*).

iii) Sia C un'iperbole di fuochi (distinti) F_1 e F_2; - la retta per i fuochi si dice *asse trasverso*; - la retta asse del segmento $\overline{F_1F_2}$ si dice *asse non trasverso*; - il punto di intersezione dell'asse trasverso e dell'asse non trasverso (cioè il punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$) si dice *centro* di C; - i due punti di intersezione di C con l'asse trasverso si dicono *vertici*; - la misura dei segmenti congiungenti il centro e i vertici si dice *semiasse trasverso*.

Esempio 9.1.4. La parabola vista sopra: $x^2 = 2py$ ha fuoco $F = (0, p/2)$ e direttrice $\delta : y = -p/2$. Dunque il suo asse è $x = 0$ e il suo vertice è soluzione del sistema $x = 0 = x^2 - 2py$ e pertanto è il punto $(0, 0)$. L'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ha come asse maggiore la retta per i due fuochi $F_1 = (-q, 0)$, $F_2 = (q, 0)$, cioè la retta $y = 0$ e come asse minore la retta $x = 0$. Il centro è quindi il punto $(0, 0)$.

Definizione 9.1.5. Sia $C \subset \mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ un sottoinsieme.

$a)$ Una retta r si dice *asse di simmetria* per C se, per ogni punto $P \in C$, il punto P' simmetrico di P rispetto a r appartiene ancora a C;

$b)$ un punto O si dice *centro di simmetria* per C se, per ogni punto $P \in C$, il punto P' simmetrico di P rispetto a O appartiene ancora a C.

Proposizione 9.1.6.
i) Se C è una parabola di equazione

$$x^2 = 2py$$

allora il suo asse è asse di simmetria; inoltre il suo vertice è equidistante dal fuoco e dalla direttrice;

ii) se C è un'ellisse (con fuochi distinti) o un iperbole, di equazioni rispettive

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

allora i suoi assi sono assi di simmetria e il suo centro è centro di simmetria.

Dimostrazione. $i)$ Come visto nell'esempio precedente, l'asse di C è la retta $x = 0$ che risulta asse di simmetria per C. Infatti, se $P = (x_0, y_0) \in C$ allora vale $x_0^2 = 2py_0$. Il punto simmetrico di P rispetto all'asse y è $P' = (-x_0, y_0)$, che appartiene ancora a C in quanto $2py_0 = x_0^2 = (-x_0)^2$. Inoltre il vertice è l'origine $(0, 0)$, che è chiaramente equidistante da δ e dal fuoco F. $ii)$ Se C è l'ellisse considerata, nel caso in cui $a > b$ per l'Osservazione 9.1.2

i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2-b^2},0)$, dunque l'asse maggiore è la retta $y=0$. L'asse minore è la retta $x=0$, quindi il centro di C è l'origine. Il caso $a<b$ è analogo. Se un punto $P=(x_0,y_0)$ verifica l'equazione di C, allora anche i punti $P'=(x_0,-y_0)$ (simmetrico di P rispetto all'asse x), $P''=(-x_0,y_0)$ (simmetrico di P rispetto all'asse y), $P'''=(-x_0,-y_0)$ (simmetrico di P rispetto all'origine), verificano la stessa equazione. Dunque gli assi dell'ellisse sono assi di simmetria e il centro è il centro di simmetria. Infine sia C l'iperbole data; ancora per l'Osservazione 9.1.2 i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2+b^2},0)$, dunque l'asse trasverso è la retta $y=0$. L'asse non trasverso è la retta $x=0$, quindi il centro di C è l'origine. Se un punto $P=(x_0,y_0)$ verifica l'equazione di C, allora anche i punti $P'=(x_0,-y_0)$, $P''=(-x_0,y_0)$, $P'''=(-x_0,-y_0)$ verificano la stessa equazione. $\square$

Definizione 9.1.7. Una conica si dice *conica a centro* se è una ellisse o una iperbole.

9.1.2 Equazione di una conica generale e sua forma matriciale

Abbiamo visto che, in un opportuno sistema di riferimento, una parabola, un'ellisse e un'iperbole hanno una equazione del tipo

$$x^2=2py;\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{9.1.3}$$

Tali equazioni sono piuttosto particolari, infatti i luoghi geometrici di cui sopra sono in una posizione particolare rispetto agli assi cartesiani (che, ad esempio, nel caso dell'ellisse e dell'iperbole, sono i loro assi di simmetria). Ciò che accomuna le tre equazioni precedenti è il fatto che sono tutte associate a polinomi di secondo grado nelle variabili x e y.

Vediamo ora come trattare il caso generale.

Definizione 9.1.8. Si dice *conica* il luogo dei punti di $\mathbb{E}^2$ aventi coordinate (x,y) che soddisfano una equazione polinomiale di secondo grado a coefficienti reali in due variabili, cioè una equazione del tipo:

$$a_{11}\,x^2+2\,a_{12}\,xy+a_{22}\,y^2+2\,a_{13}\,x+2\,a_{23}\,y+a_{33}=0 \tag{9.1.4}$$

dove $a_{ij}\in\mathbb{R}$. La denominazione dei coefficienti (con due indici) come pure il fattore 2 nei coefficienti di alcuni monomi sono dovuti a motivi pratici, che risulteranno chiari a breve.

Tratteremo generalmente i punti reali *di una conica, tuttavia in alcuni contesti considereremo anche i punti a coordinate* complesse, *tenendo conto dell'inclusione* $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$.

Osservazione 9.1.9. Le coniche di (9.1.3) sono casi particolari dell'equazione generale (9.1.4); ad esempio la prima si ottiene per

$$a_{11} = 1, \quad a_{23} = -p, \quad a_{12} = a_{22} = a_{13} = a_{33} = 0$$

e analogamente le altre; si osservi che in tutte le equazioni (9.1.3) il coefficiente a_{12} del monomio xy è nullo.

Ci chiediamo se ogni equazione del tipo (9.1.4) descrive uno dei luoghi geometrici precedentemente definiti (cioè se è una parabola, un'ellisse o un'iperbole). Tale domanda, così formulata, ha chiaramente risposta negativa. Infatti, ad esempio, il polinomio $x^2 - y^2$ *si fattorizza nel prodotto* $(x+y)(x-y)$ *e quindi la conica di equazione* $x^2 - y^2 = 0$ *risulta essere l'unione delle due rette di equazione* $x+y=0$ *e* $x-y=0$.

Più in generale, ogni equazione di secondo grado del tipo

$$(ax+by+c)(a'x+b'y+c') = 0$$

rappresenta l'unione di due rette. Tali rette non sempre sono reali. Ad esempio si consideri l'equazione $x^2 + y^2 = 0$. *In* $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ *tale equazione ha la sola soluzione* $(0,0)$, *mentre in* $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$, *poiché* $x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)$, *corrisponde all'unione delle due rette complesse e coniugate* $x+iy=0$ *e* $x-iy=0$.

Definizione 9.1.10. Una conica si dice *degenere* se è unione di due rette (che possono essere reali e distinte, reali e coincidenti, complesse e coniugate).

Nel seguito utilizzeremo ampiamente una scrittura più sintetica ma equivalente all'equazione (9.1.4).

Definizione 9.1.11. Sia C la generica conica di equazione (9.1.4), cioè

$$C: \; a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y + a_{33} = 0.$$

Le matrici

$$B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

sono dette, rispettivamente, *matrice dei coefficienti* e *matrice della parte quadratica* di C.

Osservazione 9.1.12. L'equazione (9.1.4) di una conica C diventa dunque

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \; B \; \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Inoltre la parte omogenea di secondo grado del polinomio che definisce la conica C, cioè

$$F_C(x,y) := a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2$$

è una *forma quadratica*, esprimibile anch'essa in termini di matrici come

$$F_C(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \; A \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Esempio 9.1.13. Le matrici associate alla parabola $y = 3x^2$ sono:

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservazione 9.1.14. Si noti che i 6 coefficienti a_{ij} che compaiono in (9.1.4) individuano una conica, ma non viceversa; infatti per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'equazione

$$ka_{11}\, x^2 + 2\, ka_{12}\, xy + ka_{22}\, y^2 + 2\, ka_{13}\, x + 2\, ka_{23}\, y + ka_{33} = 0$$

definisce lo stesso luogo di punti del piano, cioè la stessa conica.

9.2 Forma canonica: traslazioni

Vogliamo risolvere il seguente problema: data una conica non degenere in forma generale, esiste un riferimento cartesiano del piano euclideo in cui tale conica assume una forma particolarmente semplice, cioè una forma "simile" a quelle di (9.1.3)? O, più in generale, in cui la matrice A è diagonale? A tale scopo introduciamo la seguente importante nozione.

Definizione 9.2.1. Si dice *forma canonica* di una conica non degenere C una sua equazione in riferimento cartesiano $(O; x, y)$ che è di una delle seguenti forme:

$$\begin{array}{llll} (P.i) & x^2 = 2py & (P.ii) & y^2 = 2px \\ (E.i) & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & (E.ii) & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1 \\ (I.i) & \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & (I.ii) & \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1 \end{array}$$

dove p, a, b sono non nulli. La conica C viene detta, rispettivamente: - *parabola*, nei casi $(P.i)$ e $(P.ii)$; - *ellisse reale*, nel caso $(E.i)$; - *ellisse immaginaria*, nel caso $(E.ii)$; - *iperbole*, nei casi $(I.i)$ e $(I.ii)$.

Risolveremo il problema iniziale in due passi successivi: dapprima, in questo paragrafo, ci limiteremo a coniche nella cui equazione non appare il monomio xy, cioè tali $a_{12} = 0$; vedremo che il sistema di riferimento cercato è ottenibile mediante traslazione. Nel prossimo paragrafo vedremo che, data una conica in forma generale, il riferimento in cui si annulla il coefficiente del monomio xy si otterrà mediante una rotazione. La procedura globale per ottenere una forma canonica di una conica risulterà essere, quindi, una rototraslazione del piano, cioè un'isometria diretta di $\mathbb{E}^2$.

Esempio 9.2.2. Sia $\Gamma : \quad y = 2x^2$ una parabola in forma canonica; vediamo come varia l'equazione di Γ se operiamo la traslazione del piano

$$t_{(-\alpha,-\beta)} : \quad \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}.$$

Sostituendo si ottiene l'equazione di Γ in $(O'; X, Y)$:

$$Y = 2X^2 + 4\alpha X + 2\alpha^2 - \beta.$$

Esempio 9.2.3. Sia $\Gamma' : \ x^2 + 2y^2 = 1$ un'ellisse in forma canonica; con la traslazione $t_{(-\alpha,-\beta)}$ dell'esempio precedente, l'equazione di Γ' diventa:

$$X^2 + 2Y^2 + 2\alpha X + 4\beta Y + \alpha^2 + 2\beta^2 - 1 = 0.$$

Si osservi che, attraverso la traslazione $t_{(-\alpha,-\beta)}$, le coniche Γ e Γ' passano dalla forma canonica a una nuova forma nella quale il coefficiente a_{12} è zero. Proviamo ora il viceversa: se una conica ha una equazione priva del monomio xy, la si può ridurre a forma canonica operando una traslazione.

Osservazione 9.2.4 (*Metodo del completamento dei quadrati)***.** Si consideri, in un riferimento cartesiano $(O; x, y)$ di $\mathbb{E}^2$, una conica non degenere con equazione priva del monomio xy

$$C : \ a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x + 2\, a_{23}\, y + a_{33} = 0. \tag{9.2.1}$$

Si possono presentare due casi: o entrambi i coefficienti a_{11} e a_{22} sono non nulli oppure uno dei due è nullo.

I. Caso $a_{11} = 0, \ a_{22} \neq 0$. (il caso $a_{11} \neq 0, \ a_{22} = 0$ è del tutto analogo). L'equazione (9.2.1) diventa dunque:

$$a_{22}\, y^2 + 2\, a_{23}\, y + a_{33} + 2\, a_{13}\, x = 0. \tag{9.2.2}$$

Poiché

$$a_{22}\, y^2 + 2\, a_{23}\, y = a_{22} \left(y^2 + 2\, \frac{a_{23}}{a_{22}}\, y \right) = a_{22} \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} \tag{9.2.3}$$

l'equazione (9.2.2) diventa:

$$a_{22} \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} + a_{33} + 2\, a_{13}\, x = 0. \tag{9.2.4}$$

Poiché si suppone C non degenere, allora $a_{13} \neq 0$ e quindi

$$a_{22} \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 + 2\, a_{13} \left(x + \frac{a_{33}a_{22} - a_{23}^2}{2\, a_{22}a_{13}} \right) = 0$$

da cui

$$\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 = -\frac{2\, a_{13}}{a_{22}} \left(x + \frac{a_{33}a_{22} - a_{23}^2}{2\, a_{22}a_{13}} \right).$$

Quindi con la traslazione

$$\begin{cases} X &= x + \dfrac{a_{33}a_{22} - a_{23}^2}{2\, a_{22}a_{13}} \\ \\ Y &= y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

e ponendo $p = -a_{13}/a_{22}$, si ottiene la forma canonica:

$$Y^2 = 2\, p\, X.$$

Il caso $a_{11} \neq 0,\ a_{22} = 0$ è analogo e conduce (nell'ipotesi non degenere, cioè $a_{23} \neq 0$) alla forma canonica

$$X^2 = 2\, p\, Y.$$

Se non richiediamo alla conica in questione di essere non degenere, dobbiamo esaminare anche il caso $a_{13} = 0$ (rispettivamente, $a_{23} = 0$); in questo caso l'equazione (9.2.4) diventa:

$$\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 = \frac{a_{23}^2 - a_{33}a_{22}}{a_{22}^2}$$

e con la traslazione

$$\begin{cases} X &= x \\ \\ Y &= y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

assume la forma

$$Y^2 = q \quad (X^2 = q). \tag{9.2.5}$$

II. Caso $a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0$. A meno di un cambio di segno nell'equazione (9.2.1), si può supporre $a_{11} > 0$. Tenendo conto dell'uguaglianza (9.2.3) e dell'analoga

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{13}\, x = a_{11} \left(x^2 + 2\, \frac{a_{13}}{a_{11}}\, x \right) = a_{11} \left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}} \right)^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}$$

l'equazione (9.2.1) diventa:

$$a_{11} \left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}} \right)^2 + a_{22} \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 + a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} = 0.$$

Se si pone $h = -a_{33} + \frac{a_{13}^2}{a_{11}} + \frac{a_{23}^2}{a_{22}}$ e si opera la traslazione

$$\begin{cases} X &= x + \dfrac{a_{13}}{a_{11}} \\ Y &= y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

nel sistema di riferimento $(O'; X, Y)$ la conica C ha equazione

$$a_{11} X^2 + a_{22} Y^2 = h. \tag{9.2.6}$$

Se $h \neq 0$ si ha chiaramente

$$\frac{a_{11}}{h}\, X^2 + \frac{a_{22}}{h}\, Y^2 = 1. \tag{9.2.7}$$

$II.a)$ Caso $a_{11} > 0,\ a_{22} > 0$.

- se $h > 0$ i coefficienti della (9.2.7) sono strettamente positivi quindi possiamo porre $a_{11}/h = 1/a^2$ e $a_{22}/h = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$. In tal caso l'equazione (9.2.7) diventa:
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$
- se $h < 0$ si ponga $-a_{11}/h = 1/a^2$ e $-a_{22}/h = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$; quindi l'equazione (9.2.7) diventa
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1.$$

- se $h = 0$, ponendo nell'equazione (9.2.6) $a_{11} = 1/a^2$ e $a_{22} = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$, si ottiene
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0. \tag{9.2.8}$$

$II.b)$ Caso $a_{11} > 0,\ a_{22} < 0$. Con un ragionamento del tutto analogo al precedente, si hanno i seguenti casi.

- se $h > 0$, con opportune sostituzioni, si ottiene
$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$
- se $h < 0$, con opportune sostituzioni, si ottiene
$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1.$$
- se $h = 0$, con opportune sostituzioni, si ottiene
$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0. \tag{9.2.9}$$

Osservazione 9.2.5. Esaminiamo geometricamente le tre coniche particolari emerse nella costruzione precedente. -) La conica C di equazione (9.2.5), cioè
$$x^2 = q \quad \text{(rispettivamente } y^2 = q\text{)}$$
è l'unione delle rette $x = \pm\sqrt{q}$. Se $q > 0$, tali rette sono reali e distinte e parallele all'asse y; se $q < 0$ tali rette sono complesse e coniugate; infine se $q = 0$ la conica C risulta essere l'asse y "contato due volte", cioè costituita da due rette coincidenti. -) Si noti poi che l'equazione (9.2.8), cioè
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$
è soddisfatta da un solo punto a coordinate reali: l'origine $(0, 0)$; mentre nel piano complesso $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$ tale conica è l'unione di due rette complesse e coniugate, in quanto si può operare la fattorizzazione di polinomi (in $\mathbb{C}[x, y]$):
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + i\,\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\,\frac{y}{b}\right).$$

-) Infine l'equazione (9.2.9), cioè

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

corrisponde all'unione di due rette reali e distinte, in quanto si può operare la fattorizzazione di polinomi (in $\mathbb{R}[x, y]$):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Quanto precede conduce a provare il seguente fatto.

Osservazione 9.2.6. L'equazione (9.2.6) rappresenta una conica non degenere se e solo se $h \neq 0$.

Infatti, col *Metodo di completamento dei quadrati*, si è provato che, se $h \neq 0$ allora si ottiene una forma canonica di tipo $(E.i)$, $(E.ii)$, $(I.i)$ o $(I.ii)$, cioè una conica a centro non degenere.

Viceversa, se $h = 0$ si ottiene un'equazione dei tipi (9.2.8) o (9.2.9), le quali, come osservato sopra, rappresentano coniche degeneri.

E' naturale, dopo lo studio precedente, dare la seguente nozione.

Definizione 9.2.7. Si dice *forma canonica* di una conica degenere una delle equazioni del tipo (9.2.5), (9.2.8), (9.2.9) e le corrispondenti coniche si diranno *degeneri di tipo parabolico, ellittico, iperbolico*, rispettivamente. In analogia con la Definizione 9.2.1, le denoteremo, rispettivamente, con le sigle $(P.iii)$, $(E.iii)$, $(I.iii)$.

Definizione 9.2.8. Una conica si dice *semplicemente* degenere se è unione di due rette distinte e *doppiamente* degenere se è unione di due rette coincidenti.

La procedura vista nell'Osservazione 9.2.4 prova il seguente risultato.

Teorema 9.2.9. *Sia C una conica (degenere o non degenere) di equazione priva del monomio xy in un riferimento cartesiano $(O; x, y)$; allora esiste un riferimento cartesiano $(O'; X, Y)$, ottenuto dal precedente mediante traslazione, in cui C si esprime con un'equazione in forma canonica.*

Esempio 9.2.10. Sia C la conica di equazione

$$C: \quad x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 3 = 0.$$

Applicando il metodo del completamento dei quadrati, poiché

$$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1\ , \quad 4y^2 - 12y = 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 9$$

si ha:

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 3 = (x+1)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 7.$$

Pertanto, operando la traslazione:

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - \frac{3}{2} \end{cases}$$

l'equazione di C diventa

$$X^2 + 4Y^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{X^2}{7} + \frac{Y^2}{7/4} = 1.$$

Si tratta quindi di una ellisse di centro $(-1, 3/2)$, assi le rette $x = -1$ e $y = 3/2$ e semiassi $\sqrt{7}$, $\sqrt{7}/2$.

Infine si possono determinare i 4 vertici dell'ellisse intersecandola con gli assi, sia nel sistema di riferimento $(O; x, y)$ che nel sistema $(O'; X, Y)$ (si confrontino i risultati ottenuti con i due metodi).

9.3 Forma canonica: rotazioni

Esempio 9.3.1. Nel sistema di riferimento $(O; x, y)$, sia data la parabola Γ di equazione (canonica) $y = x^2$. Vogliamo determinare l'equazione di Γ nel sistema di riferimento $(O; X, Y)$ ottenuto dal precedente mediante la seguente rotazione:

$$\begin{cases} x = \quad \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione di Γ, si ottiene

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y = \frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 \;\Rightarrow\; X^2 + 2XY + Y^2 + \sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y = 0.$$

In questo esempio si vede che, per effetto della rotazione, nella ultima equazione della conica appare il monomio XY. E' naturale chiedersi se vale il viceversa, cioè se sia possibile, attraverso una rotazione, passare da un'equazione che contiene il monomio XY a una che non lo contiene. In altri termini, vogliamo determinare un riferimento in cui la matrice della forma quadratica di una conica è diagonale. Il teorema di diagonalizzazione delle matrici reali simmetriche garantisce che ciò è possibile.

Iniziamo con un risultato che lega le equazioni di una conica in due diversi riferimenti cartesiani.

Teorema 9.3.2. *Siano $(O; x, y)$ e $(O'; X, Y)$ due riferimenti cartesiani di $\mathbb{E}^2$ e siano Q e P, rispettivamente, le matrici completa e quella di rotazione associate al cambio speciale di riferimento dal primo al secondo. Sia $C \subset \mathbb{E}^2$ una conica e siano B e A le matrici di C nel riferimento $(O; x, y)$. Poste*

$$B' := {}^tQ\ B\ Q \quad e \quad A' := {}^tP\ A\ P = P^{-1}\ A\ P,$$

allora B' e A' sono matrici associate a C nel riferimento $(O'; X, Y)$. In particolare, B e B' sono congruenti e A e A' sono simili.

Siano

$$P := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \quad e \quad Q := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a \\ p_{21} & p_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove la matrice P è ortogonale speciale, dunque ${}^tP = P^{-1}$ e $\det(P) = 1$. Il cambio di coordinate è dato da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9.3.1}$$

Trasponendo ambo i membri:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} {}^tQ. \tag{9.3.2}$$

La conica C, nel sistema di riferimento $(O; x, y)$, ha equazione

$$C: \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

e quindi, operando le sostituzioni (9.3.1) e (9.3.2) si ottiene

$$C: \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} {}^tQ\ B\ Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

che è l'equazione di C nel riferimento $(O'; X, Y)$. Si osservi che $B' = {}^tQBQ$ è ancora una matrice simmetrica, come deve essere in quanto matrice di una conica. Con un facile calcolo, si vede che la matrice A' della forma quadratica di C nel riferimento $(O'; X, Y)$, cioè la sottomatrice 2×2 di B' ottenuta intersecando le prime due righe con le prime due colonne, è esattamente

$$A' = {}^tPAP = P^{-1}AP$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che P è ortogonale.

Esempio 9.3.3. Riduciamo a forma canonica la conica

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizziamo A come al solito, calcolandone il polinomio caratteristico, gli autovalori, gli autospazi e quindi una base di autovettori per l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ ad essa associato:

$$p_A(T) = |A - TI| = \begin{vmatrix} 1-T & -1 \\ -1 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2 - 1 = T^2 - 2T = T(T-2)$$

da cui si ottengono gli autovalori

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$$

e gli autospazi associati:

$$V_0 = \ker(f_A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\} = \langle (1, 1) \rangle$$

$$V_2 = \ker(f_{A-2I}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} = \langle (1, -1) \rangle.$$

Pertanto la matrice ortogonale speciale P che esprime l'opportuno cambiamento di base è:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(Si noti che l'ordine degli autovettori è scambiato per ottenere $\det(P) = 1$). Se non operiamo alcuna traslazione, la matrice di rototraslazione ha la forma:

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice della conica C nel sistema di riferimento $(O; \overline{x}, \overline{y})$, dove

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{x} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{y} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{x} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{y} \end{cases} \tag{9.3.3}$$

diventa dunque, per il Teorema 9.3.2,

$$
\begin{aligned}
&= {}^t B = \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Quindi l'equazione di C nel nuovo sistema di riferimento risulta:

$$2\overline{x}^2 + 4\sqrt{2}\overline{y} - 1 = 0$$

da cui

$$\overline{x}^2 = -2\sqrt{2}\left(\overline{y} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right).$$

Operando dunque la traslazione

$$\begin{cases} X = \overline{x} \\ Y = \overline{y} - \frac{\sqrt{2}}{8} \end{cases} \tag{9.3.4}$$

si ottiene la parabola, in forma canonica:

$$X^2 = -2\sqrt{2}\,Y.$$

Chiaramente si può procedere alla rototraslazione globale mediante la matrice Q che esprima sia la precedente rotazione, sia la traslazione sopra scritta. Da (9.3.3) e (9.3.4) si hanno le equazioni della rototraslazione

$$\begin{cases} x = \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y + \dfrac{1}{8} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y + \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine si può verificare che la matrice della conica nel riferimento $(O'; X, Y)$ diventa

$$\begin{aligned}
&{}^tQ\ B\ Q = \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = B'.
\end{aligned}$$

L'esempio precedente suggerisce un metodo generale per la riduzione di una conica a forma canonica: è la dimostrazione (costruttiva) del seguente risultato.

Teorema 9.3.4. *Sia C una conica data in un sistema di riferimento cartesiano $(O; x, y)$ di $\mathbb{E}^2$; allora esiste un riferimento cartesiano $(O'; X, Y)$, ottenuto dal precedente mediante rototraslazione, in cui C ha un'equazione in forma canonica.*

Siano A e B le matrici associate a C nel riferimento $(O; x, y)$.

$i)$ Diagonalizzazione di A. - Se $a_{12} = 0$ (cioè se A è diagonale) si passa al punto $iii)$. - Se $a_{12} \neq 0$, si diagonalizza A nel modo consueto, determinando una base ortonormale di autovettori: $v_1 = (p_{11}, p_{21})$, $v_2 = (p_{12}, p_{22})$, in modo che la matrice ortogonale

$$P := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

sia speciale.

$ii)$ Posta

$$:= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si opera la rotazione corrispondente

$$\begin{cases} x = p_{11}\overline{x} + p_{12}\overline{y} \\ y = p_{21}\overline{x} + p_{22}\overline{y} \end{cases}. \tag{9.3.5}$$

Nel riferimento $(O; \overline{x}, \overline{y})$ la conica ha matrice $= {}^tB$ e matrice della forma quadratica $\overline{A} = {}^tPAP$, che risulta dunque diagonale. Pertanto in tale riferimento la conica ha equazione

$$\begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{y} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

che è priva del monomio $\overline{xy}$.

iii) Si opera la traslazione da $(O;\overline{x},\overline{y})$ a $(O';X,Y)$ indotta dal Metodo del completamento dei quadrati

$$\begin{cases} X = \overline{x} + \alpha \\ Y = \overline{y} + \beta \end{cases}. \tag{9.3.6}$$

Per ottenere la forma canonica di C, cioè la sua equazione nel sistema $(O';X,Y)$, basta operare la sostituzione inversa di (9.3.6) nell'equazione della conica in $(O;\overline{x},\overline{y})$.

iv) Infine la rototraslazione da $(O;x,y)$ a $(O';X,Y)$ si ottiene sostituendo la relazione inversa di (9.3.6) in (9.3.5).

Osservazione 9.3.5. Il precedente teorema può essere riformulato così: data una conica C esiste una rototraslazione φ tale che $\varphi(C)$ è espressa in forma canonica.

Corollario 9.3.6. *Data un'equazione di secondo grado in x e y a coefficienti reali, il luogo degli zeri (in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$) di tale equazione, se contiene almeno due punti reali, è uno dei seguenti luoghi geometrici: ellisse, iperbole, parabola, unione di due rette (distinte o coincidenti).*

9.4 Classificazione delle coniche in $\mathbb{E}^2$

Utilizzando i precedenti risultati, vedremo quali sono gli invarianti di una conica e come è possibile determinarne una forma canonica senza calcolare esplicitamente la rototraslazione.

Teorema 9.4.1. *Sia C una conica avente, come matrici completa e della forma quadratica, rispettivamente, B e A, nel riferimento $(O;x,y)$. Siano B' e A' le matrici associate a C (la cui equazione è ottenuta mediante cambio speciale di coordinate) nel riferimento $(O';X,Y)$. Allora:*

i) i polinomi caratteristici di A e di A', $p_A(T)$ e $p_{A'}(T)$, coincidono;

ii) $\det(A) = \det(A')$ *e rg*$(A) =$ *rg*(A')

iii) $\det(B) = \det(B')$ *e rg*$(B) =$ *rg*(B').

Per il Teorema 9.3.2, le matrici A e A' sono simili e le matrici B e B' sono congruenti (tramite una matrice Q di determinante 1). La tesi segue dalle Proposizioni **??** *e* **??**.

Alla luce dei Teoremi 9.3.4 e 9.4.1, si può caratterizzare una conica nel piano euclideo mediante i determinanti delle matrici associate. Infatti, data una conica in forma generale, esiste un'isometria diretta del piano tale che la conica trasformata sia in forma canonica. Per quest'ultima è immediato calcolare i determinanti e i ranghi delle matrici associate; ma tali invarianti, come appena visto, si mantengono per isometria.

La seguente tabella contiene le possibili forme canoniche e i rispettivi invarianti numerici. Per convenzione, le forme paraboliche $(P.i)$ *e* $(P.ii)$ *restano distinte e il coefficiente di* x^2 *(risp.* y^2*) è esattamente l'autovalore non nullo di* A. *Inoltre le coniche di tipo* (E) *ed* (I) *possono essere scritte anche entrambe nell'unica forma*

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

dove α *e* β *sono gli autovalori di* A.

Entrambe queste convenzioni sono utili per esprimere in modo omogeneo le rispettive matrici complete delle coniche e per il "metodo rapido" di riduzione a forma canonica illustrato nella prossima Osservazione 9.4.3.

tipo	*equazione*	B	$\det(B)$	$\det(A)$
$P.i$	$\alpha x^2 = 2\gamma y,\ \gamma \neq 0$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$	$-\alpha\gamma^2$	*0*
$P.ii$	$\beta y^2 = 2\gamma x,\ \gamma \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-\beta\gamma^2$	*0*
$P.iii$	$x^2 = \gamma\ (y^2 = \gamma)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}$	*0*	*0*
$E.i$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_1$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta > 0$
$E.ii$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_2$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta > 0$
$E.iii$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} *_3$	*0*	$\alpha\beta > 0$
$I.i$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_4$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta < 0$
$I.ii$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_5$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta < 0$
$I.iii$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} *_6$	*0*	$\alpha\beta < 0$

Tabella delle forme canoniche in $\mathbb{E}^2$

dove si sono posti:

$*_1$ $\alpha = b^2, \quad \beta = a^2, \quad \gamma = a^2b^2$

$*_2$ $\alpha = b^2, \quad \beta = a^2, \quad \gamma = -a^2b^2$

$*_3$ $\alpha = b^2, \quad \beta = a^2$

$*_4$ $\alpha = b^2, \quad \beta = -a^2, \quad \gamma = a^2b^2$

$*_5$ $\alpha = b^2, \quad \beta = -a^2, \quad \gamma = -a^2b^2$

$*_6$ $\alpha = b^2, \quad \beta = -a^2$

Teorema 9.4.2. *Sia C una conica e siano A e B le matrici associate in un qualunque sistema di riferimento cartesiano. Allora:*

$a)$ *C è degenere se e solo se $|B| = 0$; in particolare, è doppiamente degenere se e solo se rg$(B) = 1$;*

$b)$ *se C è non degenere allora:*

- *C è una parabola se e solo se $|A| = 0$;*
- *C è un'ellisse se e solo se $|A| > 0$;*
- *C è un'iperbole se e solo se $|A| < 0$.*

Segue dal Teorema 9.3.4, dal Teorema 9.4.1 e dalla precedente tabella.

La discussione precedente fornisce un metodo per ottenere la forma canonica di una conica non degenere senza *utilizzare le matrici di rototraslazione.*

Osservazione 9.4.3 (*Metodo rapido di riduzione a forma canonica*)**.** Sia C una conica e siano A e B le matrici associate in un certo sistema di riferimento cartesiano.

$i)$ Si determinano gli autovalori α e β della matrice A (cioè le radici, sicuramente reali, del polinomio caratteristico $p_A(T)$).

$ii)$ Caso $\det(A) = 0$.

- Poiché $\det(A) = \alpha\beta$, si può supporre $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$.

- Se $\det(B) = -\alpha\gamma^2 \neq 0$, la conica è una parabola e si ha

$$\gamma = \pm\sqrt{-\frac{|B|}{\alpha}}$$

  e quindi una forma canonica è $\alpha X^2 = 2\gamma Y$.

- Se $\det(B) = 0$, la conica è degenere e una sua forma canonica è $X^2 = \gamma$. Se $\gamma = 0$ allora C è unione di due rette reali e coincidenti; se $\gamma > 0$, C è unione di due rette reali e distinte, se $\gamma < 0$, C è unione di due rette complesse e coniugate. Si noti che, in questo caso, non si riesce a determinare γ partendo solo dalle matrici A e B.

$iii)$ Caso $\det(A) \neq 0$.

- Poiché $\det(A) = \alpha\beta$, allora $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Inoltre $\det(B) = -\alpha\beta\gamma$.

- Se $\det(B) \neq 0$, la conica è un'ellisse o un'iperbole e si ha

$$\gamma = -\frac{|B|}{|A|}$$

  e quindi una forma canonica della conica è $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$.

- Se $\det(B) = 0$, la conica è degenere e di forma canonica $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 0$.

Esempio 9.4.4. Determiniamo una forma canonica della conica vista nell'Esempio 9.3.3

$$C: \; x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$$

con il metodo ora descritto. Abbiamo già visto che le matrici associate a C sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$|B| = -16 \quad \text{e} \quad |A| = 0$$

la conica è non degenere ed è una parabola, infatti gli autovalori di A calcolati in precedenza sono: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$. Scegliendo dunque la forma $(P.i)$:

$$\alpha X^2 = 2\,\gamma\,Y$$

poiché $\alpha = 2$ e $\det(B) = -\alpha\gamma^2$, si ha $\gamma^2 = 8$; scegliendo ad esempio $\gamma = -2\sqrt{2}$, si ottiene

$$2X^2 = -4\sqrt{2}Y$$

cioè

$$X^2 = -2\sqrt{2}\,Y.$$

L'altra scelta $\gamma = 2\sqrt{2}$ significa riferirsi ad un altro sistema di riferimento $(O'; \overline{X}, \overline{Y})$ nel quale la parabola ha equazione:

$$\overline{X}^2 = 2\sqrt{2}\,\overline{Y}.$$

Esempio 9.4.5. Determiniamo una forma canonica della conica

$$C:\ 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 5 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

di determinanti, rispettivamente:

$$|B| = -11, \quad |A| = 2.$$

Quindi C è non degenere ed è una ellisse (reale). Determiniamone una forma canonica del tipo:

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma,$$

dove α e β sono gli autovalori di A, $|A| = \alpha\beta$ e $|B| = -\alpha\beta\gamma$. Poiché

$$p_A(T) = |A - TI| = T^2 - 4T + 2$$

gli autovalori di A sono

$$\alpha = 2 - \sqrt{2}, \quad \beta = 2 + \sqrt{2}.$$

Inoltre $\gamma = -|B|/|A| = 11/2$. Da cui segue che una forma canonica di C è

$$(2 - \sqrt{2})X^2 + (2 + \sqrt{2})Y^2 = \frac{11}{2}.$$

Si noti che anche in questo caso non è unica la forma canonica: infatti, scambiando gli autovalori α e β, la forma canonica risulta

$$(2 + \sqrt{2})\overline{X}^2 + (2 - \sqrt{2})\overline{Y}^2 = \frac{11}{2}.$$

Concludiamo col risultato più importante di questa sezione. Se richiediamo che una conica sia un insieme non vuoto di punti, oltre che soddisfare un'equazione del tipo (9.1.4), dobbiamo eliminare il caso (E.ii) dalla tabella precedente.

Teorema 9.4.6 (*Classificazione delle coniche nel piano euclideo reale*)**.** *Ogni conica C in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ (costituita da almeno un punto reale) è definita, a meno di isometrie dirette, da un'equazione di una delle seguenti famiglie*

(P) famiglie paraboliche:

$$x^2 = qy, \quad q \neq 0$$
$$x^2 = q^2, \quad q \neq 0$$

(E) famiglie ellittiche:

$$x^2 + p^2y^2 = q^2, \quad p, q \neq 0$$
$$x^2 + p^2y^2 = 0, \quad p \neq 0$$

(I) famiglie iperboliche:

$$x^2 - p^2y^2 = q^2, \quad p, q \neq 0$$
$$x^2 - p^2y^2 = 0, \quad p \neq 0$$

(D) conica doppiamente degenere:

$$x^2 = 0$$

descritte dai parametri $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Inoltre le famiglie precedenti sono distinte, a meno di isometrie.

Per i Teoremi 9.3.2 e 9.3.4, è sufficiente mostrare che ogni conica in forma canonica può essere trasformata in una conica delle precedenti famiglie attraverso un'isometria diretta. Le forme canoniche delle coniche sono elencate nella Tabella precedente, ma bisogna tenere conto della limitazione dell'ipotesi: la conica deve contenere almeno un punto reale. Questo esclude alcune coniche degeneri paraboliche e precisamente quelle di tipo $(P.iii)$ di equazione $x^2 = \gamma$ con $\gamma < 0$ e le ellissi immaginarie $(E.ii)$: entrambe, come osservato, non hanno punti reali. Prendiamo dunque in esame le restanti forme canoniche della Tabella precedente.

$(P.i)$ Per tali coniche è immediato: basta dividere l'equazione per α e si ottiene la prima famiglia parabolica. $(P.ii)$ L'equazione è $\beta y^2 = 2\gamma x$ associata alla matrice B come nella Tabella. Si ponga

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che

$$^tQBQ = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

quindi è una conica di tipo $(P.i)$ e dunque riconducibile alla prima famiglia parabolica. $(P.iii)$ Una conica di equazione $x^2 = \gamma$ ha punti reali se e solo se $\gamma \geq 0$. Quindi, nel caso $\gamma > 0$, possiamo scrivere la sua equazione come $x^2 = q^2$, ottenendo la seconda famiglia parabolica. Se invece $\gamma = 0$, otteniamo la conica doppiamente degenere denotata con (D) nell'enunciato. $(E.i)$ Tali coniche hanno equazione

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

e quindi, dividendo per b^2 si ottiene la prima famiglia ellittica. $(E.iii)$ Per tali coniche si procede come in $(E.i)$, ottenendo la seconda famiglia ellittica. $(I.i)$ Tali coniche hanno equazione

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

e quindi, dividendo per b^2 si ottiene la prima famiglia iperbolica. $(I.ii)$ Basta applicare l'isometria associata alla matrice Q definita sopra e si ottiene una conica di tipo $(I.i)$ e quindi riconducibile alla prima famiglia iperbolica. $(I.iii)$ Per tali coniche si procede come in $(I.i)$, ottenendo la seconda famiglia iperbolica.

Per provare l'ultima affermazione, è sufficiente confrontare i determinanti delle matrici associate a ogni famiglia dell'enunciato e applicare "in negativo" il Teorema 9.4.1.

famiglia	$\det(B)$	$\det(A)$
$(P)-1$	<0	*0*
$(P)-2$	*0*	*0*
$(E)-1$	<0	>0
$(E)-2$	*0*	>0
$(I)-1$	>0	<0
$(I)-2$	*0*	<0
(D)	*0*	*0*

Chiaramente le righe di questa tabella sono tutte distinte, eccetto la seconda famiglia parabolica e la conica (unica) doppiamente degenere. In tal caso, però, il rango di B è diverso: vale 2 nel primo caso e 1 nel secondo. Questo conclude la dimostrazione.

Osservazione 9.4.7. Come notato nella dimostrazione del precedente *Teorema di classificazione*, sono escluse le coniche di tipo $(P.iii)$ di equazione $x^2 = \gamma$ con $\gamma < 0$ e quelle di tipo $(E.ii)$

di equazione $b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$: infatti entrambe non hanno punti reali. La prima è unione di due rette complesse e coniugate $x = \pm\sqrt{\gamma}$ e la seconda è un'ellisse immaginaria.

Nell'analogo risultato di *Classificazione delle coniche nel piano euclideo complesso* (che qui omettiamo), entrambe vengono recuperate nelle famiglie elencate nel *Teorema di classificazione* visto sopra.

9.5 Studio di una conica in forma generale

Lo scopo di questo paragrafo è determinare i punti e le rette notevoli di una conica in forma generale. Strumento fondamentale sarà il Teorema 9.3.4 che qui ricordiamo:

Sia $C \subset \mathbb{E}^2$ una conica data in un sistema di riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$ con coordinate (x, y). Allora esiste un riferimento cartesiano $(O', \mathcal{B}')$ con coordinate (X, Y), ottenuto dal precedente mediante rototraslazione (isometria diretta), in cui C ha un'equazione in forma canonica.

Utilizzeremo la consueta notazione, introdotta nel Teorema 9.3.2, dove Q e P denotano, rispettivamente, le matrici completa e quella di rotazione associate al cambio (speciale) di riferimento

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \quad e \quad Q = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a \\ p_{21} & p_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9.5.1}$$

con $P \in SO(2)$ e vale la (9.3.1):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9.5.2}$$

Chiaramente non è restrittivo supporre che $\mathcal{B}$ sia la base canonica, quindi P è la matrice le cui colonne sono i vettori della base (ortonormale) $\mathcal{B}'$.

Osservazione 9.5.1. I punti e le rette notevoli di una conica in forma canonica sono stati definiti e studiati nel Paragrafo 4.1: gli assi di una conica a centro sono gli assi coordinati X e Y, il suo centro è l'origine O', i suoi vertici sono le intersezioni della conica con gli assi. Nel caso della parabola, il suo asse è l'asse Y e il vertice l'origine O'.

E' chiaro che basta applicare a tali punti e rette il cambio di coordinate inverso a quello descritto sopra per ottenerli nel riferimento $(O; x, y)$. Cercheremo invece strade alternative più brevi.

Iniziamo stabilendo alcune proprietà generali

Lemma 9.5.2. *Gli assi di simmetria e i centri di simmetria di un sottoinsieme di $\mathbb{E}^2$ si mantengono per isometrie. Più precisamente, se f è un'isometria del piano, X un sottoinsieme di $\mathbb{E}^2$ e r è una retta asse di simmetria per X, allora $f(r)$ è asse di simmetria per $f(X)$. Inoltre, se M è centro di simmetria per X, allora $f(M)$ è centro di simmetria per $f(X)$.*

Per esercizio.

Proposizione 9.5.3. *Sia C una conica nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$.*

i) Se C è una parabola allora il suo asse è asse di simmetria; inoltre il suo vertice è equidistante dal fuoco e dalla direttrice;

ii) se C è un'ellisse (con fuochi distinti) o un'iperbole, allora i suoi assi sono assi di simmetria e il suo centro è (l'unico) centro di simmetria.

Segue dal Lemma precedente e dal fatto che l'enunciato vale per coniche in forma canonica grazie alla Proposizione 9.1.6.

Vediamo ora come risolvere il problema iniziale: determinare gli assi e il centro di una conica a centro e l'asse e il vertice di una parabola, quando queste siano date in forma generale (senza trasformarla in forma canonica).

Proposizione 9.5.4. *Sia $(O; x, y)$ un riferimento cartesiano di $\mathbb{E}^2$ e sia C una conica a centro. Allora C ha per centro il punto O se e solo se nella sua equazione non compaiono i termini di primo grado.*

Supponiamo dapprima che C sia non degenere e abbia equazione generale

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y + a_{33} = 0. \tag{9.5.3}$$

Per la Proposizione 9.5.3, è sufficiente provare che O è suo centro di simmetria se e solo se $a_{13} = 0 = a_{23}$.

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di C e $Q_0 = (-x_0, -y_0)$ il suo simmetrico rispetto a O. Se $a_{13} = 0 = a_{23}$ è chiaro che anche le coordinate di Q_0 soddisfano l'equazione (9.5.3) e dunque $Q_0 \in C$. Pertanto O è centro di simmetria della conica.

Viceversa, supponiamo che O sia il centro di simmetria della conica e si consideri un altro punto $P_1 = (x_1, y_1) \in C$ in modo che O, P_0, P_1 non siano allineati (tale punto esiste perché C è non degenere). Dunque anche il punto $Q_1 = (-x_1, -y_1)$, simmetrico di P_1 rispetto a O, appartiene alla conica. In conclusione:

$$P_0, Q_0 \in C \Rightarrow \begin{cases} a_{11}\,x_0^2 + 2\,a_{12}\,x_0y_0 + a_{22}\,y_0^2 + 2\,a_{13}\,x_0 + 2\,a_{23}\,y_0 + a_{33} = 0 \\ a_{11}\,x_0^2 + 2\,a_{12}\,x_0y_0 + a_{22}\,y_0^2 - 2\,a_{13}\,x_0 - 2\,a_{23}\,y_0 + a_{33} = 0 \end{cases}$$

e dal sistema precedente (ad esempio, sottraendo un'equazione dall'altra) segue $a_{13}\,x_0 + a_{23}\,y_0 = 0$. *In modo del tutto analogo, da* $P_1, Q_1 \in C$ *segue* $a_{13}\,x_1 + a_{23}\,y_1 = 0$. *Abbiamo quindi provato che, se* O *è centro di simmetria della conica, allora* (a_{13}, a_{23}) *è soluzione del sistema lineare nelle incognite* u *e* v*:*

$$\begin{cases} u\,x_0 + v\,y_0 = 0 \\ u\,x_1 + v\,y_1 = 0 \end{cases}.$$

Ma il determinante della matrice dei coefficienti è non nullo perché, per costruzione O, P_0, P_1 *non sono allineati. Pertanto il sistema ha solo la soluzione nulla e quindi* $(a_{13}, a_{23}) = (0, 0)$ *come volevamo.*

Esempio 9.5.5. Sia data la conica $\Gamma:\ 3x^2 + 4xy - y^2 + 3 = 0$; vogliamo vedere se è a centro e, in tal caso, determinarlo. Poiché $|A| = -7$ e $|B| = -21$, Γ è non degenere ed è un'iperbole. Il suo centro è nell'origine per la Proposizione 9.5.4, in quanto la sua equazione non contiene i monomi di primo grado.

Teorema 9.5.6. *Sia* C *una conica a centro di equazione*

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y + a_{33} = 0.$$

Il suo centro è il punto le cui coordinate (u, v) *sono l'unica soluzione del sistema lineare*

$$\begin{cases} a_{11}u + a_{12}v + a_{13} = 0 \\ a_{12}u + a_{22}v + a_{23} = 0 \end{cases}$$

avente come matrice completa quella costituita dalle prime due righe della matrice B *associata alla conica.*

La conica C *ha per centro* $M = (u, v)$ *nel sistema di riferimento* $(O; x, y)$ *se e solo se, operando la traslazione*

$$\begin{cases} Y = y - v \end{cases}$$

nel sistema di coordinate X *e* Y *ha per centro l'origine. Si operi dunque la sostituzione* $x = X + u, y = Y + v$ *nell'equazione di* C*, che diventa:*

$$\begin{aligned} a_{11}\,(X+u)^2 + 2\,a_{12}\,(X+u)(Y+v) + a_{22}\,(Y+v)^2 &+ \\ + 2\,a_{13}\,(X+u) + 2\,a_{23}\,(Y+v) + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

ovvero, con un calcolo immediato e denotando con γ *il termine costante, si ottiene l'equazione*

$$\begin{aligned} &a_{11}\,X^2 + 2\,a_{12}\,XY + a_{22}\,Y^2 + \\ &\qquad + 2(a_{11}u + a_{12}v + a_{13})X + 2(a_{12}u + a_{22}v + a_{23})Y + \gamma = 0 \end{aligned}$$

Dalla Proposizione 9.5.4, tale conica ha per centro l'origine se e solo se i coefficienti dei monomi X *e* Y *sono entrambi nulli.*

Esempio 9.5.7. Sia data la conica $\Gamma:\ 3x^2+4xy-y^2+6x-2y+1=0$; vogliamo vedere se è a centro e, in tal caso, determinarlo. Consideriamo le matrici associate

$$B=\begin{pmatrix}3&2&3\\2&-1&-1\\3&-1&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}3&2\\2&-1\end{pmatrix}.$$

Poiché $|A|=-7$ e $|B|=-13$, Γ è non degenere ed è un'iperbole. Il suo centro si ottiene dal sistema i cui coefficienti sono le prime due righe di B:

$$\begin{cases}3x+2y+3=0\\2x-\ \ y-1=0\end{cases}.$$

La soluzione è $(x,y)=(-1/7,-9/7)$, che sono le coordinate del centro di Γ.

Per determinare gli assi di una conica a centro (e l'asse di una parabola) occorre un fatto preliminare di algebra lineare. Valgono le notazioni ricordate all'inizio del paragrafo, in particolare si considerino due basi ortonormali $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^2$ e il cambio di riferimento di $\mathbb{E}^2$ da $(O,\mathcal{B})$ a $(O',\mathcal{B}')$ associato alla (9.5.2).

Lemma 9.5.8. *Sia $r\subset\mathbb{E}^2$ una retta di giacitura r_0. Se $r_0=\langle(\alpha,\beta)\rangle$ in $(O';X,Y)$, allora la giacitura di r in $(O;x,y)$ è $r_0=\langle(\gamma,\delta)\rangle$, dove*

$$\begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}.$$

Si osservi anzitutto che si può riportare il problema in $\mathbb{R}^2$ in quanto la giacitura r_0 è un suo sottospazio vettoriale. Il generico vettore di r_0 sulla base $\mathcal{B}'$ è quindi $(X,Y)=\lambda(\alpha,\beta)$. Poiché la matrice di cambio base è P e vale

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

il generico vettore di r_0 sulla base $\mathcal{B}$ è

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix}$$

come volevamo.

Tenendo conto dell'Osservazione 9.5.1 si prova il seguente risultato.

Proposizione 9.5.9. *Sia C una conica non degenere e siano B ed A le matrici ad essa associate in un qualunque sistema di riferimento $(O;x,y)$.*

i) Se C è una conica a centro (non circonferenza), allora i suoi assi sono le due rette passanti per il centro e aventi come giaciture i due autospazi della matrice A;

ii) se C è una parabola, allora il suo asse è la retta per il vertice e di giacitura l'autospazio della matrice A associato al suo autovalore nullo.

Con le notazioni iniziali, indichiamo con $(O'; X, Y)$ il riferimento in cui C ha forma canonica e matrici B' e A', dove $B' = {}^tQBQ$, $A' = P^{-1}AP$ e le matrici P e Q sono come in (9.5.1) e (9.5.2). $i)$ Gli assi di C sono gli assi coordinati X e Y. Vogliamo determinare la loro giacitura in $(O; x, y)$. A tal fine, utilizziamo il Lemma 9.5.8, osservando che in $(O'; X, Y)$ le loro giaciture sono $\langle(1,0)\rangle$ e $\langle(0,1)\rangle$, quindi in $(O; x, y)$ sono, rispettivamente:

$$P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{11}\\p_{21}\end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{12}\\p_{22}\end{pmatrix}.$$

Tenendo conto della costruzione della matrice P, ricordiamo che le sue colonne sono una base ortonormale di autovettori e quindi ognuna di esse genera un autospazio di A.

$ii)$ Del tutto analogo, tenendo con che l'asse di C è l'asse Y (come nella forma canonica $x^2 = qy$ nel Teorema di classificazione delle coniche nel piano euclideo reale) e quindi l'autovalore nullo è il secondo nella matrice A'.

Esempio 9.5.10. Sia Γ l'iperbole dell'Esempio 9.5.7. Abbiamo determinato il suo centro $M = (-1/7, -9/7)$. Per la Proposizione 9.5.9, gli assi di Γ sono le rette per M parallele agli autospazi di A. Per determinare tali autospazi, cosideriamo la matrice della forma quadratica di Γ:

$$A = \begin{pmatrix}3 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}.$$

Si verifica che $p_A(T) = |A - TI| = T^2 - 2T - 7$ e dunque $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$ sono gli autovalori di A. Ne segue che gli autospazi, dati dalle formule

$$V_{\lambda_i}:\ (a_{11} - \lambda_i)x + a_{12}y = 0\ , \quad i = 1, 2$$

risultano essere

$$V_{\lambda_1}:\ (1+\sqrt{2})x + y = 0\ , \quad V_{\lambda_2}:\ (1-\sqrt{2})x + y = 0.$$

Pertanto gli assi hanno una equazione del tipo

$$a_1: \quad (1+\sqrt{2})x + y + h_1 = 0; \quad a_2: \quad (1-\sqrt{2})x + y + h_2 = 0.$$

Infine, imponendo il passaggio per M, si ottiene: $h_1 = (10+\sqrt{2})/7$ e $h_2 = (10-\sqrt{2})/7$.

Si noti che il Teorema 9.5.6 assieme alla Proposizione 9.5.9-(i), permettono di determinare assi e centro di una conica a centro; mentre dalla Proposizione 9.5.9-(ii) si può determinare l'asse di una parabola solo se è noto il vertice. Per calcolare quest'ultimo dovremo usare la nozione di retta tangente che verrà introdotta nel Paragrafo 4.6.

9.6 Coniche nel piano affine

In questo paragrafo, studieremo una generica conica C del piano affine reale $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. La sua equazione è sempre data da (9.1.4), ma qui la ripetiamo (con sua propria numerazione) in quanto l'ambiente geometrico non è più il piano euclideo. Sia dunque

$$C: \quad a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y + a_{33} = 0 \tag{9.6.1}$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Affrontiamo lo studio delle possibili intersezioni di una retta e una conica in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (rispettivamente, in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$).

Consideriamo una retta del piano affine che, per comodità di calcolo, assumiamo non parallela all'asse y

$$r: \quad y = mx + q.$$

I punti comuni a C ed r sono quelli le cui coordinate (x, y) soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y + a_{33} = 0 \\ y = mx + q \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}x(mx+q) + a_{22}(mx+q)^2 + \\ \qquad + 2a_{13}x + 2a_{23}(mx+q) + a_{33} = 0 \\ y = mx + q \end{cases} . \tag{9.6.2}$$

La prima equazione di tale sistema è (in generale) di secondo grado nella sola variabile x, quindi ha al più due radici reali x_0, x_1 (distinte o no) che, sostituite nella seconda, forniscono le coordinate (x_0, y_0) e (x_1, y_1) (ove $y_i = mx_i + q$) dei punti di $C \cap r$.

Si osservi che, nel caso in cui la prima equazione abbia due soluzioni complesse (e coniugate in quanto i coefficienti sono reali) $x_0, \overline{x_0}$, si può procedere egualmente con la sostituzione e si determinano due punti di coordinate complesse (x_0, y_0) e $(\overline{x_0}, \overline{y_0})$, ove $y_0 = mx_0 + q$. Chiaramente, se r è parallela all'asse y, cioè di equazione $x = k$, si opera in modo del tutto analogo.

E' possibile che la prima equazione di (9.6.2) non sia di secondo grado: vedremo negli esempi seguenti che può essere di primo grado: in tal caso r e C si incontrano in un solo punto di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (e anche di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$).

Tuttavia la prima equazione di (9.6.2) può risultare anche di grado zero. Se è un'identità, e quindi $0 = 0$, significa che tutti i punti della retta soddisfano il sistema e dunque $r \subset C$; tale situazione si verifica solo se C è degenere ed r è una delle due rette che costituiscono C.

Infine si può verificare il caso in cui l'equazione (di grado zero) non ha soluzioni: questo accade se $r \cap C = \emptyset$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (e anche in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$).

Abbiamo dunque provato la seguente:

Proposizione 9.6.1. *Una conica non degenere e una retta (reali) hanno al più due punti di intersezione in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.*

Esempio 9.6.2. Sia Γ la conica di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e sia r la retta $x = 1/2$. Allora $\Gamma \cap r$ è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 1/2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y^2 = 3/4 \\ x = 1/2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = \pm\sqrt{3}/2 \\ x = 1/2 \end{cases}$$

cioè $\Gamma \cap r = \{(1/2, \sqrt{3}/2), (1/2, -\sqrt{3}/2)\}$.

Esempio 9.6.3. Siano date la conica e la retta

$$\Gamma : \ xy - 1 = 0 \quad \text{e} \quad r : \ x = 3$$

Chiaramente $\Gamma \cap r = \{P = (3, 1/3)\}$ sia in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ che in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

Esempio 9.6.4. Siano

$$\Gamma : \ x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad r : \ x = 3.$$

Allora $\Gamma \cap r$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y^2 = -8 \\ x = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = \pm 2\,i\,\sqrt{2} \\ x = 3 \end{cases}.$$

Quindi $\Gamma \cap r = \{(3, 2\,i\,\sqrt{2}), (3, -2\,i\,\sqrt{2})\}$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, mentre $\Gamma \cap r = \emptyset$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

Osservazione 9.6.5. Dalla dimostrazione della Proposizione 9.6.1 segue comunque che non si può presentare il caso che una conica Γ e una retta r reali abbiano due punti in comune in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, di cui solo uno a coordinate reali; infatti se $(x_0, y_0) \in \Gamma \cap r$, allora anche $(\overline{x_0}, \overline{y_0}) \in \Gamma \cap r$.

Dalla Proposizione 9.6.1 e dall'Osservazione 9.6.5 segue immediatamente la descrizione della posizione reciproca di una retta e una conica che si incontrano in 2 punti.

Proposizione 9.6.6. *Siano C ed r una conica e una retta reali aventi due punti in comune in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$; allora tali punti sono di uno e uno solo dei seguenti tipi:*

i) complessi e coniugati;

ii) reali e distinti;

iii) reali e coincidenti.

Definizione 9.6.7. Siano C ed r una conica e una retta reali come nella Proposizione precedente. In corrispondenza dei 3 casi, introduciamo le seguenti nozioni:

i) diciamo che r è *esterna* a C;

ii) diciamo che r è *secante* C nei due punti reali e distinti;

iii) diciamo che la retta r è *tangente* C nel punto di intersezione.

Esempio 9.6.8. La conica e la retta dell'Esempio 9.6.2 sono secanti nei punti $(1/2, \sqrt{3}/2)$ e $(1/2, -\sqrt{3}/2)$; quelle dell'Esempio 9.6.4 sono esterne. Infine, la conica $\Gamma:\ x^2 + y^2 = 1$ e la retta $r:\ x = 1$ sono tangenti nel punto $(1, 0)$. Infatti dal calcolo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

si vede che l'equazione di secondo grado in una variabile nel sistema (9.6.2) non si abbassa di grado, come nell'Esempio 9.6.3, ma ha una radice di molteplicità 2. Diciamo in tal caso che si ottiene il punto $(1, 0)$ "contato due volte" o che tale punto è intersezione *doppia* (o di *molteplicità* 2) della conica e della retta.

Definizione 9.6.9. Per denotare la *molteplicità di intersezione* di una conica non degenere C e di una retta r in un punto P_0 scriveremo

$$m_{P_0}(C, r) = 0 \iff \quad C \text{ e } r \text{ non si incontrano in } P_0$$

$$m_{P_0}(C, r) = 1 \iff \quad r \text{ è secante } C \text{ in } P_0$$

$$m_{P_0}(C, r) = 2 \iff \quad r \text{ è tangente a } C \text{ in } P_0.$$

Proposizione 9.6.10. *Sia C una conica non degenere passante per l'origine, dunque di equazione*

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y = 0.$$

Allora esiste ed è unica la retta tangente a C in $(0,0)$ ed è data da:

$$T_O(C): \quad a_{13}\,x + a_{23}\,y = 0.$$

Consideriamo una generica retta per l'origine di giacitura $\langle (m,n) \rangle$, con $(m,n) \neq (0,0)$, cioè di equazioni cartesiana e parametrica date rispettivamente da

$$r_{m,n}: \quad nx - my = 0 \quad , \quad \begin{cases} x = m\lambda \\ y = n\lambda \end{cases}.$$

Vogliamo provare che esiste un'unica (a meno di coefficiente di proporzionalità) coppia (m,n) tale che $r_{m,n}$ sia tangente a C in $(0,0)$. Chiaramente l'intersezione $r_{m,n} \cap C$ è data dall'equazione

$$(a_{11}\,m^2 + 2\,a_{12}\,mn + a_{22}\,n^2)\lambda^2 + 2\,(a_{13}\,m + a_{23}\,n)\lambda = 0$$

e $\lambda = 0$ è soluzione doppia se e solo se $a_{13}\,m + a_{23}\,n = 0$. Si osservi che non può essere $a_{13} = 0 = a_{23}$ altrimenti C avrebbe equazione $a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 = 0$ e quindi sarebbe degenere, in quanto il determinante della matrice associata risulta nullo. Dunque il polinomio $a_{13}\,x + a_{23}\,y$ non è identicamente nullo. Pertanto $r_{m,n}$ è tangente a C in $(0,0)$ se e solo se

$$a_{13}\,m + a_{23}\,n = 0 \iff (m,n) = \rho(a_{23}, -a_{13}).$$

Tali coppie (m,n), proporzionali tra loro, determinano dunque un'unica retta che è la retta tangente richiesta, avente equazione cartesiana data da $a_{13}x + a_{23}y = 0$.

Osservazione 9.6.11. Dalla proposizione precedente si ha immediatamente che, se C è una conica non degenere passante per l'origine, allora la retta $T_O(C)$ è definita dalla parte di primo grado dell'equazione di C.

Esempio 9.6.12. Sia C la conica di equazione

$$x^2 + 2xy - 7y^2 - x + 3y = 0.$$

Per la Proposizione 9.6.10, la retta tangente a C nell'origine è

$$T_O(C): \quad x - 3y = 0.$$

Il precedente risultato viene ora utilizzato per provare il caso generale.

Teorema 9.6.13. *Se C è una conica non degenere di equazione (9.6.1) e $P_0 = (x_0, y_0) \in C$, allora esiste ed è unica la retta tangente a C in P_0 ed ha equazione*

$$T_{P_0}(C): \; (a_{11}\, x_0 + a_{12}\, y_0 + a_{13})(x - x_0) + (a_{12}\, x_0 + a_{22}\, y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0$$

Ci riconduciamo al caso della Proposizione 9.6.10 operando la traslazione che manda P_0 nell'origine:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}.$$

Nel sistema di riferimento $(O'; X, Y)$ la conica ha equazione:

$$\begin{aligned} a_{11}\,(X + x_0)^2 + 2\, a_{12}\,(X + x_0)(Y + y_0) + a_{22}\,(Y + y_0)^2 + \\ + 2\, a_{13}\,(X + x_0) + 2\, a_{23}\,(Y + y_0) + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

e dunque, per la Proposizione 9.6.10, la retta tangente a C in $O' = P_0$ è

$$(a_{11}\, x_0 + a_{12}\, y_0 + a_{13})X + (a_{12}\, x_0 + a_{22}\, y_0 + a_{23})Y = 0.$$

La tesi segue tenendo conto della traslazione precedente.

Osservazione 9.6.14. Ricordando le regole di derivazione, la retta tangente $T_{P_0}(C)$ a una conica non degenere C di equazione $f(x, y) = 0$ in un suo punto $P_0 = (x_0, y_0)$ è data da:

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} (y - y_0) = 0. \tag{9.6.3}$$

Definizione 9.6.15. Si dice *vettore tangente* a C in P_0, e si denota con $t_{P_0}(C)$, il vettore (parallelo alla retta $T_{P_0}(C)$)

$$t_{P_0}(C) := \left(-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}.$$

Chiaramente $t_P(C)$ è definito a meno di un fattore di proporzionalità.

Esempio 9.6.16. Si calcoli l'equazione della retta $T_{P_0}(C)$ tangente alla conica $C : x^2 - 2xy + 3y^2 - x - 1 = 0$ nel suo punto $P_0 = (2, 1)$. Per l'Osservazione 9.6.14 la retta richiesta è individuata da

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{P_0} = (2x - 2y - 1)_{P_0} = 1, \quad \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{P_0} = (-2x + 6y)_{P_0} = 2$$

dunque $T_{P_0}(C): \; (x - 2) + 2(y - 1) = 0$, cioè $x + 2y - 4 = 0$.

Esempio 9.6.17. Determinare le rette tangenti alla conica $C : y - x^2 = 0$ passanti per punto $P_0 = (2, 3)$ (si noti che $P_0 \notin C$).

La generica retta per P_0 ha equazione $r: \; y-3 = m(x-2)$; basta imporre che r intersechi C in due punti reali e coincidenti:

$$r \cap C : \quad \begin{cases} y = m(x-2)+3 \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = m(x-2)+3 \\ x^2 - mx + 2m - 3 = 0 \end{cases}.$$

Dobbiamo richiedere che il discriminante della seconda equazione sia nullo:

$$\Delta = m^2 - 8m + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 2, \; m_2 = 6.$$

Pertando le due rette tangenti richieste sono:

$$2x - y - 1 = 0 \, , \quad 6x - y - 9 = 0.$$

Esempio 9.6.18. Si determinino le rette tangenti alla conica $C \subset \mathbb{E}^2$ (si osservi che in questo esercizio l'ambiente è il piano euclideo) di equazione $y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$ e ortogonali alla retta $r : x - 3y + 5 = 0$; si determinino inoltre i corrispondenti punti di tangenza. La generica retta ortogonale ad r ha un'equazione del tipo:

$$s_k : \quad 3x + y + k = 0 \, , \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo per quali k la retta s_k è tangente a C:

$$s_k \cap C : \begin{cases} 3x + y + k = 0 \\ y^2 - 6x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-y-k}{3} \\ y^2 + 4y + 2k - 1 = 0 \end{cases}.$$

La seconda equazione ha due radici coincidenti se e solo se

$$\Delta/4 = 4 - (2k - 1) = 0 \iff k = 5/2.$$

Dunque esiste un'unica retta tangente a C e ortogonale ad r ed è

$$s : \; 6x + 2y + 5 = 0.$$

Inoltre il suo punto di tangenza $P := s \cap C$ si calcola sostituendo $k = 5/2$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-y - 5/2}{3} \\ y^2 + 4y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2y-5}{6} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow P = (-1/6, -2).$$

Resta da studiare il caso della tangenza a una conica degenere: lo vedremo nel prossimo paragrafo.

9.7 Punti singolari di una conica

Esempio 9.7.1. Vogliamo determinare la retta tangente (se esiste) alla conica degenere C : $(x+y)(x-y)=0$ nel suo punto $(1,1)$. Proviamo a utilizzare la formula (9.6.3). Poiché

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{(1,1)}=2, \quad \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{(1,1)}=-2$$

si ottiene la retta

$$2(x-1)-2(y-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x-y=0$$

che è proprio la retta, componente di C, cui appartiene il punto in questione. Si vede che, per ogni punto $P \neq O$ appartenente alla retta $x-y=0$, la formula (9.6.3) fornisce la retta stessa; lo stesso accade per i punti della retta $x+y=0$ diversi dall'origine. Se invece si applica tale formula nel punto $O=(0,0)$ (che è il punto di intersezione delle due rette componenti di C), si vede che entrambe le derivate parziali si annullano; dunque bisogna procedere al calcolo in modo alternativo. Ad esempio, si consideri la generica retta per l'origine $(x,y)=\lambda(m,n)$ e si intersechi con C: si ottiene l'equazione

$$\lambda^2(m^2-n^2)=0.$$

Quindi quasi ogni retta per O interseca C con molteplicità due. Si noti che per $[m,n]=[1,\pm 1]$, le rette corrispondenti (cioè le componenti della conica) intersecano C con molteplicità di intersezione "infinita". Ciò accade (con un calcolo analogo) per ogni punto $P \neq O$ della conica: la molteplicità di intersezione tra C e la retta componente contenente P è "infinita".

Occorre quindi estendere la definizione di retta tangente in modo da includere le coniche degeneri.

Definizione 9.7.2. Diciamo che una retta r è tangente a una conica C in un suo punto P_0 se

$$m_{P_0}(C,r) \geq 2.$$

Si osservi che, se C è non degenere, allora in ogni suo punto esiste un'unica retta tangente (vedi Teorema 9.6.13), che abbiamo denotato con $T_{P_0}(C)$ e $m_{P_0}(C,T_{P_0}(C))=2$ (vedi Proposizione 9.6.1).

Definizione 9.7.3. Diremo che un punto $P=(x_0,y_0)$ di una conica C di equazione $f(x,y)=0$ è *singolare* per C se

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}=(0,0).$$

Altrimenti il punto $P \in C$ si dirà *semplice* o *non singolare*.

Proposizione 9.7.4. *Sia $C \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ una conica degenere.*

a) Se C è unione di due rette distinte passanti per un punto P_0, allora:

- *P_0 è il solo punto singolare di C;*
- *ogni retta per P_0 è tangente a C in tale punto;*
- *se $P \neq P_0$, la retta tangente a C in P è la retta componente di C passante per P.*

b) Se C è unione di due rette parallele e distinte allora C non ha punti singolari.

c) Se C è doppiamente degenere allora ogni punto di C è singolare e ogni retta per esso è tangente a C.

a) Possiamo assumere (a meno di rototraslazione) che P_0 sia l'origine $O = (0,0)$ e che C abbia equazione

$$f(x,y) := x(ax+by) = 0$$

con $b \neq 0$, in quanto per ipotesi C è costituita da due rette distinte. -) Sia $P = (\overline{x}, \overline{y}) \in C$; allora

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{(\overline{x},\overline{y})} = 2a\overline{x} + b\overline{y}, \quad \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{(\overline{x},\overline{y})} = b\overline{x}.$$

Il punto P è singolare se e solo se $(\overline{x}, \overline{y})$ è una una soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2ax + by = 0 \\ bx \qquad\;\; = 0 \end{cases}$$

quindi se e solo se $P = (0,0)$. -) Se $r_{m,n}: \ (x,y) = \lambda(m,n)$ è una qualunque retta per l'origine,

$$r_{m,n} \cap C: \begin{cases} x = \lambda m \\ y = \lambda n \\ x(ax+by) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 m(am+bn) = 0.$$

Quindi, per ogni $[m,n] \neq [0,1]$ e $[m,n] \neq [b,-a]$ si ha

$$m_O(C, r_{m,n}) = 2$$

e le $r_{0,1}$ e $r_{b,-a}$, che sono esattamente le due componenti di C, intersecano C in O infinite volte. Pertanto ogni retta per O è tangente a C in O. -) Per concludere, calcoliamo $T_P(C)$ dove $P \neq P_0$. Ora, invece, supponiamo che $P = (0,0)$ e che C abbia equazione:

$$f(x,y) := x(ax+by+c) = 0$$

con $c \neq 0$, in quanto P è non singolare, per ipotesi. Una retta $r: \ (x, y) = \lambda(m, n)$ è tangente a C se e solo se $\lambda = 0$ è soluzione (almeno) doppia dell'equazione:

$$\lambda m(\lambda am + \lambda bn + c) = 0 \quad \Rightarrow \quad (am^2 + bmn)\lambda^2 + mc\lambda = 0$$

e ciò accade se e solo se $mc = 0$; tenendo conto che $c \neq 0$, deve essere $m = 0$ e quindi r è la retta $x = 0$, da cui la tesi.

$b)$ Analoga all'ultima parte del caso (a).

$c)$ Sia ora C l'unione di due rette coincidenti. Possiamo supporre che C abbia equazione

$$f(x, y) := x^2 = 0.$$

Poiché

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

le due derivate parziali sono entrambe nulle in tutti i punti della retta $x = 0$ e quindi in tutti i punti di C, che risultano dunque singolari. Infine si verifica facilmente che ogni retta che incontra C è tangente a C.

Valgono anche i viceversa della prima e della terza proprietà enunciate nella precedente proposizione.

Proposizione 9.7.5. *Se C è una conica con un punto singolare allora è degenere. In particolare,*

a) se C ha un solo punto singolare P_0, allora C è semplicemente degenere e precisamente è l'unione di due rette passanti per P_0 (eventualmente complesse e coniugate);

b) se C ha due punti singolari, allora ogni suo punto è singolare e in tal caso C è doppiamente degenere.

Proviamo dapprima che, se C è una conica con (almeno) un punto singolare, allora C è degenere. Possiamo supporre (a meno di una traslazione) che C, avente equazione (9.6.1), sia singolare in $P_0 = (0, 0)$. Allora, per definizione, entrambe le derivate parziali si annullano in P_0, cioè il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2\,a_{11}\,x + 2\,a_{12}\,y + 2\,a_{13} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2\,a_{12}\,x + 2\,a_{22}\,y + 2\,a_{23} = 0 \end{cases} \tag{9.7.1}$$

ha per soluzione $(x_0, y_0) = (0,0)$; pertanto $a_{13} = a_{23} = 0$. Sostituendo tali relazioni nell'equazione (9.6.1) di C e tenendo conto del fatto che $a_{33} = 0$, in quanto la conica passa per l'origine, si ha:

$$C: \quad a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 = 0.$$

Chiaramente tale equazione rappresenta l'unione delle due rette

$$r: \quad a_{11}y = \left(-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right) x$$
$$s: \quad a_{11}y = \left(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right) x.$$

a) Se l'origine è il solo punto singolare di C, allora il sistema (9.7.1) ha come unica soluzione $(0,0)$, dunque il determinante della matrice dei coefficienti $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ è non nullo. Pertanto le rette r ed s, determinate prima, sono distinte.
b) Se C ha due punti singolari, è degenere per quanto visto sopra, ma non può essere semplicemente degenere per la Proposizione 9.7.4-$(a) - (b)$; pertanto deve essere doppiamente degenere e quindi ogni suo punto è singolare per la Proposizione 9.7.4-(c).

I risultati della Proposizione 9.7.4 e Proposizione 9.7.5 si possono riassumere immediatamente nel seguente:

Teorema 9.7.6. *Sia $C \subset \mathbb{A}^2$ una conica. Valgono i seguenti fatti:*

a) se C è non degenere allora non ha punti singolari;

b) C è unione di due rette incidenti se e solo se ha un solo punto singolare;

c) C è doppiamente degenere se e solo se ha due (o, equivalentemente, infinti) punti singolari.

Vedremo che nel piano proiettivo vale anche il viceversa dell'implicazione (a) e che il caso (b) comprenderà anche la configurazione di due rette parallele (e quindi descriverà tutte le coniche semplicemente degeneri).

Concludiamo questo paragrafo tornando nel piano euclideo per risolvere una questione posta alla fine del Paragrafo 4.5, cioè determinare asse e vertice di una parabola.

Precedentemente abbiamo osservato come è possibile determinare la direzione dell'asse di una parabola in forma generale (vedi Proposizione 9.5.9). Per determinare il vertice di una parabola è necessario tuttavia applicare la nozione di retta tangente, osservando preliminarmente che una parabola è una conica non degenere e quindi ammette un'unica retta tangente in ogni suo punto (vedi Teorema 9.7.6 e Teorema 9.6.13).

Lemma 9.7.7. *Si consideri una parabola $C \subset \mathbb{E}^2$ di vertice V. Allora V è l'unico punto di C in cui la retta tangente è ortogonale all'asse della parabola.*

Poiché si tratta di provare proprietà geometriche (euclidee), come al solito possiamo dimostrarle per una parabola in forma canonica. Sia dunque

$$C: \quad f(x,y) := x^2 - 2py = 0.$$

È chiaro che il vertice di C è $V = (0,0)$ e che $x = 0$ è l'asse. La retta tangente a C in un suo punto $P_0 = (x_0, y_0)$ è parallela al vettore

$$t_{P_0}(C) = \left(-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right)_{P_0} = (2p, 2x_0).$$

Si ha che $(2p, 2x_0)$ è ortogonale all'asse $x = 0$ se e solo se

$$\langle (2p, 2x_0), (0,1) \rangle = 0 \iff x_0 = 0 \iff P_0 = (0,0) = V.$$

Osservazione 9.7.8 (*Metodo per la determinazione dell'asse e del vertice di una parabola*)**.** Sia C una parabola e siano B ed A le matrici ad essa associate in un sistema di riferimento $(O; x, y)$. Ricordiamo che la matrice A ha un autovalore nullo e l'altro non nullo; sia questo α. Denotando i rispettivi autospazi con W_0 e W_α, essi sono ortogonali in quanto A è simmetrica reale. Abbiamo visto che l'asse di C ha per giacitura W_0 (per la Proposizione 9.5.9), dunque W_α è la giacitura della retta tangente a C nel vertice, per il Lemma 9.7.7.

Procedura

$i)$ Si determinano gli autospazi W_0 e W_α;

$ii)$ sia r_h la generica retta di giacitura W_α con

$$r_h: \; ax + by + h = 0.$$

Si impone che r_h sia tangente a C e si determina il valore h_0 per cui ciò accade.

$iii)$ Per il Lemma 9.7.7, la retta r_{h_0} è la tangente a C nel vertice. Dunque $V := C \cap r_{h_0}$ è il vertice di C.

$iv)$ L'asse di C è dunque la retta $L = V + W_0$.

Osservazione 9.7.9 (*Metodo alternativo*)**.** $i')$ Come $i)$.

$ii')$ Si calcola il vettore tangente $t_P(C)$ a C in un suo generico punto P.

$iii')$ Si impone che $t_P(C)$ sia ortogonale a W_0; in tal modo si determina il punto in cui ciò accade: tale punto è il vertice.

$iv')$ Infine si determina l'asse come prima.

Esempio 9.7.10. Vogliamo determinare l'asse e il vertice della parabola

$$C: \quad 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0.$$

Poiché le matrici associate a C sono

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha: $\det(B) = -25 \neq 0$ e $\det(A) = 0$; quindi C è proprio una parabola.

Calcoliamo l'autospazio W_0 di A, cioè lo spazio delle soluzioni del sistema $AX = 0$; poiché tale sistema ha rango 1, in quanto $\det(A) = 0$, esso risulta equivalente ad una sola delle due equazioni, ad esempio: $2x + y = 0$. Pertanto $W_0 = \langle(1, -2)\rangle$. Consideriamo la generica retta ortogonale a $(1, -2)$ (e quindi parallela alla tangente nel vertice):

$$r_h: \quad x - 2y + h = 0.$$

La retta r_h è tangente a C se e solo se i due punti che costituiscono $r_h \cap C$ coincidono se e solo se il sistema

$$r_h \cap C: \quad \begin{cases} x = 2y - h \\ 4(2y - h)^2 + 4(2y - h)y + y^2 - 2(2y - h) + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

ha due soluzioni coincidenti. Si impone tale condizione alla seconda equazione (in y):

$$25y^2 - 20hy + 4h^2 + 2h - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta/4 = 25(1 - 2h).$$

Quindi $\Delta = 0$ se e solo se $h_0 = 1/2$; otteniamo dunque la retta tangente nel vertice:

$$r_{h_0}: x = 2y - 1/2.$$

Pertanto il vertice V è dato da

$$V = r_{h_0} \cap C: \quad \begin{cases} x = 2y - 1/2 \\ 25y^2 - 10y + 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2y - 1/2 \\ (5y - 1)^2 = 0 \end{cases}$$

e quindi il vertice è il punto $V = (-1/10, 1/5)$. Infine l'asse è la retta per V parallela all'autospazio $W_0 = \langle(1, -2)\rangle$:

$$2x + y = 0.$$

Esempio 9.7.11. Vogliamo determinare l'asse e il vertice della parabola nell'esempio precedente

$$C: \quad 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

usando il secondo metodo proposto nell'Osservazione 9.7.8. Come prima, si determina $W_0 = \langle (1, -2) \rangle$. Si calcola poi il vettore tangente a C nel suo generico punto $P_0 = (x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} t_{P_0}(C) &= \left(-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right)_{P_0} = \\ &= (-4x - 2y - 4, 8x + 4y - 2)_{P_0} = \\ &= 2(-2x_0 - y_0 - 2, 4x_0 + 2y_0 - 1). \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione $t_{P_0}(C) \perp W_0$, cioè

$$\langle (-2x_0 - y_0 - 2, 4x_0 + 2y_0 - 1), (1, -2) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_0 + y_0 = 0.$$

Inoltre P_0 deve appartenere a C, quindi essere soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 = 0 \\ 4x_0^2 + 4x_0 y_0 + y_0^2 - 2x_0 + 4y_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y_0 = -2x_0 \\ -10x_0 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_0 = -1/10, \quad y_0 = 1/5.$$

L'asse si determina come nell'esempio precedente.

9.8 Classificazione delle coniche affini

Al fine di classificare le coniche del piano affine (reale o complesso), dobbiamo usare alcuni risultati analoghi a quelli visti per le coniche del piano euclideo. Qui denotiamo con $\mathbb{A}^2$ il piano affine $\mathbb{A}^2_K$, dove $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Ricordiamo brevemente il Teorema **??**, *Capitolo 1, dove viene descritta la variazione delle coordinate di un punto di $\mathbb{A}^2$ rispetto a 2 sistemi di riferimento $(O, \mathcal{B})$ e $(O', \mathcal{B}')$. Se $X = {}^t(x, y)$, $X' = {}^t(x', y')$, $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ e $C = {}^t(c_1, c_2)$ è la colonna delle coordinate di O rispetto a $(O', \mathcal{B}')$, allora si ha*

$$X' = PX + C.$$

Si osservi che, in questo caso, P non è necessariamente una matrice ortogonale (come nel caso del piano euclideo $\mathbb{E}^2$) ma semplicemente invertibile. Denotiamo i suoi elementi con $P = (p_{ij})$. Utilizzando la notazione – introdotta in (2.1.4), Capitolo 1 – si ponga

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & c_1 \\ p_{21} & p_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Come ricordato, $P \in GL(2, K)$ e quindi $\widetilde{Q} \in GL(3, K)$.

Con tali notazioni, vale l'analogo del Teorema 9.3.2, dove veniva descritto come varia l'equazione di una conica rispetto a 2 riferimenti cartesiani di $\mathbb{E}^2$. Omettiamo la dimostrazione in quanto identica a quella del teorema citato.

Teorema 9.8.1. *Siano $(O; x, y)$ e $(O'; x', y')$ due riferimenti affini di $\mathbb{A}^2$ e siano P e $\widetilde{Q}$ come sopra. Sia $C \subset \mathbb{A}^2$ una conica e siano B e A le matrici di C nel riferimento $(O; x, y)$. Poste*

$$B' := {}^t\widetilde{Q}\ B\ \widetilde{Q} \quad e \quad A' := {}^tP\ A\ P$$

allora B' e A' sono matrici associate a C nel riferimento $(O'; x', y')$. In particolare A e A' sono congruenti e B e B' sono congruenti.

Corollario 9.8.2. *Il rango della matrice completa B di una conica è un invariante affine. Se $K = \mathbb{R}$, anche il segno di $\det(A)$ è un'invariante affine.*

Dimostrazione. Immediata conseguenza della Proposizione **??**. □

Possiamo dimostrare il risultato fondamentale di questa sezione.

Teorema 9.8.3 (Classificazione delle coniche nel piano affine reale)**.** *Ogni conica del piano affine reale $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (costituita da almeno un punto) è affinemente equivalente a una delle seguenti:*

$1_{\mathbb{R}}$	$x^2 = y$	parabola
$2_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 1$	parabola degenere
$3_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 1$	ellisse
$4_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 0$	ellisse degenere
$5_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 1$	iperbole
$6_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 0$	iperbole degenere
$7_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 0$	conica doppiamente degenere

Inoltre le precedenti coniche sono, a due a due, non affinemente equivalenti.

Utilizziamo il Teorema 9.4.6 di classificazione delle coniche in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ e mostriamo che le famiglie ivi elencate sono equivalenti a una delle coniche di questo enunciato. Come al solito, denoteremo con B la matrice associata a una conica della lista del Teorema 9.4.6. Per ognuna di esse, individueremo una matrice $\widetilde{Q} \in GL(3, \mathbb{R})$ tale che ${}^t\widetilde{Q}B\widetilde{Q}$ risulti la matrice associata a una conica nella lista $1_{\mathbb{R}}, \dots, 7_{\mathbb{R}}$.

(P) Vediamo in dettaglio la prima famiglia parabolica cioè

$$x^2 = qy, \quad q \neq 0$$

la cui matrice associata è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q/2 \\ 0 & -q/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$${}^t\widetilde{Q}B\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

che è associata alla conica $x^2 = y$.

Per le prossime famiglie, citiamo solo la matrice $\widetilde{Q}$. La seconda famiglia parabolica è $x^2 = q^2$; qui occorre considerare la matrice

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con un semplice calcolo si vede che ${}^t\widetilde{Q}B\widetilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 = 1$.

(E) La prima famiglia ellittica è $x^2 + p^2y^2 = q^2$. Usando la matrice

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q/p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

si vede che ${}^t\widetilde{Q}B\widetilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 + y^2 = 1$. La seconda famiglia ellittica è $x^2 + p^2y^2 = 0$. Usando la matrice

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

si vede che ${}^t\widetilde{Q}B\widetilde{Q}$ *è associata alla conica* $x^2 + y^2 = 0$.

(I) *Le matrici* $\widetilde{Q}$ *necessarie sono le stesse del caso* (E) *e trasformano le coniche delle famiglie* $x^2 - p^2y^2 = q^2$ *e* $x^2 - p^2y^2 = 0$*, rispettivamente, nelle coniche* $5_{\mathbb{R}}$ *e* $6_{\mathbb{R}}$.

(D) *La conica doppiamente degenere è esattamente* $7_{\mathbb{R}}$.

Per provare che le coniche dell'enunciato sono a due a due non affinemente equivalenti, consideriamo la seguente tabella

		$rg(B)$	$\det(A)$
$1_{\mathbb{R}}$	$x^2 = y$	3	0
$2_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 1$	2	0
$3_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 1$	3	$+$
$4_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 0$	2	$+$
$5_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 1$	3	$-$
$6_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 0$	2	$-$
$7_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 0$	1	0

Per il Corollario 9.8.2 si ha la tesi.

Vediamo l'analogo risultato nel caso complesso.

Teorema 9.8.4 (Classificazione delle coniche nel piano affine complesso)**.** *Ogni conica del piano* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ *è affinemente equivalente a una delle seguenti:*

$I_{\mathbb{C}}$	$x^2 = y$	parabola
$II_{\mathbb{C}}$	$x^2 = 1$	parabola degenere
$III_{\mathbb{C}}$	$x^2 + y^2 = 1$	conica a centro
$IV_{\mathbb{C}}$	$x^2 + y^2 = 0$	conica a centro degenere
$V_{\mathbb{C}}$	$x^2 = 0$	conica doppiamente degenere

Inoltre le precedenti coniche sono, a due a due, non affinemente equivalenti.

Basta mostrare che le seguenti coniche sono affinemente equivalenti a una di questo enunciato:

(a) *quelle elencate nel Teorema 9.8.3:* $1_{\mathbb{R}}, \dots, 7_{\mathbb{R}}$*;*

(b) *quelle considerate nell'Osservazione 9.4.7, cioè le famiglie*

$$x^2 = \gamma, \quad \gamma < 0 \quad e \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

(a) *Chiaramente basta esaminare le coniche* $5_{\mathbb{R}}$ *e* $6_{\mathbb{R}}$*. La prima ha equazione* $x^2 - y^2 = 1$ *e sia* B *la matrice associata. Basta scegliere come matrice* $\widetilde{Q} \in GL(3, \mathbb{C})$ *la seguente*

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In tal modo, ${}^t\widetilde{Q}B\widetilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 + y^2 = 1$. Del tutto analogo il caso della conica $6_{\mathbb{R}}$.

(b) La famiglia $x^2 = \gamma, \quad \gamma < 0$ va trattata come la seconda famiglia (P) nella dimostrazione del Teorema 9.8.3: basta scegliere la matrice

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{C})$$

e si prova che è affinemente equivalente alla conica $II_{\mathbb{C}}$.

Infine l'ellisse immaginaria è affinemente equivalente alla conica $III_{\mathbb{C}}$ attraverso la matrice

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} ia & 0 & 0 \\ 0 & ib & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{C}).$$

L'ultima affermazione si prova come nel Teorema 9.8.3: qui è sufficiente esaminare il rango di B e la nullità di $\det(A)$.

Dallo studio precedente, si ha il seguente risultato che caratterizza le coniche affini degeneri e non degeneri e che è analogo a quello visto per le coniche euclidee (Teorema 9.4.2).

Corollario 9.8.5. *Sia $C \subset \mathbb{A}^2_K$ con $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Allora - C è non degenere se e solo se rg$(B) = 3$; - C è semplicemente degenere se e solo se rg$(B) = 2$; - C è doppiamente degenere se e solo se rg$(B) = 1$.*

Per il Corollario 9.8.2, il rango di B è un invariante affine. Quindi basta provare la tesi per le coniche dell'enunciato del Teorema 9.8.3 (nel caso reale) o del Teorema 9.8.4 (nel caso complesso). La tesi segue immediatamente dal calcolo dei ranghi nella parte finale delle rispettive dimostrazioni dei due teoremi citati.

In analogia a quanto visto nel Capitolo 3 sulla chiusura proiettiva di un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$, introduciamo l'analoga nozione per le coniche del piano affine.

Definizione 9.8.6. Si consideri un polinomio in due variabili a coefficienti in un campo K e di grado d:

$$f(x, y) \in K[x, y].$$

Diciamo *polinomio omogeneizzato di f rispetto a x_0*, e lo denotiamo con $F = {}^h f$, quello definito da

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right).$$

Esempio 9.8.7. Se $f(x, y) = x^2 + y - 1$ e $F = {}^h f$, allora

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2\left(\frac{x_1^2}{x_0^2} + \frac{x_2}{x_0} - 1\right) = x_1^2 + x_0x_2 - x_0^2.$$

Ricordiamo l'immersione del piano affine nel piano proiettivo (vedi Paragrafo 3.5)

$$j_0 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

definita da

$$(x, y) \mapsto [1, x, y] = [x_0, x_1, x_2], \quad \textit{dove} \quad x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0}.$$

È chiaro dunque che, se $C \subset \mathbb{A}^2$ è una conica di equazione $f(x, y) = 0$, allora

$$j_0(C) = \left\{ [x_0, x_1, x_2] \;\middle|\; {}^h f(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = 0,\ x_0 \neq 0 \right\}.$$

Se togliamo la limitazione $x_0 \neq 0$, otteniamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{P}^2$.

Definizione 9.8.8. Se $C \subset \mathbb{A}^2$ è una conica di equazione $f(x, y) = 0$, diciamo *chiusura proiettiva di C*, e la indichiamo con $\overline{C}$, il sottoinsieme di $\mathbb{P}^2$ definito da

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = 0.$$

Inoltre, diciamo *punti impropri* di C i punti del piano proiettivo dati da $\overline{C} \cap \{x_0 = 0\}$, cioè quelli le cui coordinate omogenee soddisfano il sistema

$$\begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

Come vedremo nel prossimo risultato, i punti impropri di una conica affine sono utili per classificarla facilmente. Prima di procedere, cambiamo la notazione (vedi (9.6.1)) usata fino ad ora per la generica conica affine.

Definizione 9.8.9. La *generica conica* di $\mathbb{A}^2_K$ è data da

$$f(x, y) = a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{01}\, x + 2\, a_{02}\, y + a_{00} = 0 \tag{9.8.1}$$

dove $a_{ij} \in K$, e dunque la sua *matrice completa* e la sua *matrice della forma quadratica* risultano, rispettivamente,

$$B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Teorema 9.8.10 (Classificazione delle coniche affini via i punti impropri). *Sia $C \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ una conica non degenere. Allora*

- C è una parabola $\iff$ ha 2 punti impropri reali e coincidenti;
- C è un'ellisse $\iff$ ha 2 punti impropri complessi e coniugati;
- C è una iperbole $\iff$ ha 2 punti impropri reali e distinti.

Per definizione, i punti impropri di C sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1^2 + 2\, a_{12}\, x_1 x_2 + a_{22}\, x_2^2 + 2\, a_{01}\, x_0 x_1 + 2\, a_{02}\, x_0 x_2 + a_{00} x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

o, equivalentemente, del sistema

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1^2 + 2\, a_{12}\, x_1 x_2 + a_{22}\, x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} .$$

Poichè la prima equazione ha come discriminante $-\det(A)$, si conclude con il Teorema 9.4.2.

Concludiamo con una nota nozione sulle iperboli nel piano euclideo.

Definizione 9.8.11. Sia $C \subset \mathbb{E}^2$ un'iperbole. Si dicono *asintoti* di C le due rette (reali e distinte) passanti per il centro di C e per i suoi punti impropri.

Osservazione 9.8.12. Se l'iperbole C è data in forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{cioè in coordinate omogenee} \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = x_0^2$$

i suoi punti impropri sono $P_\infty = [0, a, b]$ e $Q_\infty = [0, a, -b]$ e il centro è l'origine ovvero $[1, 0, 0]$. Pertanto gli asintoti sono

$$r_{P_\infty} : bx_1 - ax_2 = 0, \quad r_{Q_\infty} : bx_1 + ax_2 = 0.$$

Esercizio C2. *Gli asintoti sono le rette tangenti all'iperbole nei suoi punti impropri (estendendo in modo naturale la Definizione 4.6.1 di retta tangente a una conica in un suo punto al piano proiettivo...).*

9.9 Coniche proiettive

Quanto visto alla fine del precedente paragrafo induce a introdurre la seguente nozione.

Definizione 9.9.1. Si dice *conica* del piano proiettivo $\mathbb{P}^2_K$ il luogo C dei punti le cui coordinate omogenee soddisfano un'equazione di secondo grado omogenea del tipo

$$C:\ a_{11}\,x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1x_2 + a_{22}\,x_2^2 + 2\,a_{01}\,x_0x_1 + 2\,a_{02}\,x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0$$

dove $a_{ij} \in K$ o, sinteticamente,

$$C:\ \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i,j.$$

Si dice *matrice associata* a C

$$B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e quindi si dice *equazione matriciale di C* quella espressa come

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

In analogia con quanto visto per le coniche affini, si prova in modo del tutto simile il seguente risultato.

Teorema 9.9.2. *Siano $[x_0, x_1, x_2]$ e $[x'_0, x'_1, x'_2]$ due sistemi di coordinate omogenee di $\mathbb{P}^2_K$ e sia $\alpha : \mathbb{P}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$ il cambio di coordinate omogenee associato a una matrice $Q \in GL(3, K)$ dove*

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Sia $C \subset \mathbb{P}^2_K$ una conica di matrice B rispetto alle coordinate $[x_0, x_1, x_2]$ e matrice B' rispetto alle coordinate $[x'_0, x'_1, x'_2]$. Allora

$$B' = {}^tQBQ.$$

Definizione 9.9.3. Due coniche C e C' di $\mathbb{P}^2_K$ si dicono *proiettivamente equivalenti* se esiste una proiettività $\alpha : \mathbb{P}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$ tale che $\alpha(C) = C'$.

Corollario 9.9.4. *Le matrici associate a due coniche proiettivamente equivalenti sono congruenti.*

*Ricordando che matrici congruenti hanno lo stesso rango (vedi Proposizione **??**), si ottiene immediatamente il seguente fatto.*

Corollario 9.9.5. *Il rango di una matrice associata a una conica è un invariante proiettivo.*

Per questo, se C è una conica proiettiva di matrice B, denoteremo il rango di B anche con rg(C).

Definizione 9.9.6. Una conica $C \subset \mathbb{P}^2_K$ si dice *semplicemente degenere* se è unione di due rette distinte e *doppiamente degenere* se è unione di due rette coincidenti. Altrimenti, diremo che C è *non degenere*.

Il seguente risultato, che caratterizza le coniche proiettive degeneri e non degeneri, è analogo a quello visto per le coniche euclidee (Teorema 9.4.2) e a quello relativo alle coniche affini (Corollario 9.8.5).

Partiamo da un semplice fatto.

Osservazione 9.9.7. La matrice completa B di una conica $C \subset \mathbb{A}^2_K$, con la notazione introdotta in (9.8.1), è esattamente la stessa della sua chiusura proiettiva $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2_K$.

Teorema 9.9.8. *Sia $C \subset \mathbb{P}^2_K$ una conica di matrice associata B. Allora:*

1. *rg$(B) = 3 \iff C$ è non degenere;*
2. *rg$(B) = 2 \iff C$ è semplicemente degenere;*
3. *rg$(B) = 1 \iff C$ è doppiamente degenere.*

Ci sono due possibilità: o C è la chiusura proiettiva di una conica affine o C è degenere e una sua componente è la retta impropria. Nel primo caso, per l'Osservazione precedente, si conclude con il Corollario 9.8.5 che stabilisce l'analogo risultato per le coniche affini. Nel secondo caso, la conica $C \subset \mathbb{P}^2_K$ deve essere di uno dei seguenti tipi:

$$x_0(ax_0 + bx_1 + cx_2) = 0 \quad o \quad x_0^2 = 0.$$

Con un calcolo immediato, si vede che nel primo caso rg$(B) = 2$ e nel secondo rg$(B) = 1$.

Ricordiamo il seguente importante risultato di Algebra lineare.

Teorema 9.9.9 (*Teorema di Sylvester*)**.** *Sia K il campo complesso o quello reale e si consideri una forma bilineare simmetrica*

$$\beta : K^n \times K^n \longrightarrow K.$$

Allora esiste una base $\mathcal{C}$ di K^n tale che la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\beta)$ è diagonale. Equivalentemente, ogni matrice simmetrica è congruente a una diagonale.

Vediamo le conseguenze nei casi complesso e reale, rispettivamente.

Teorema 9.9.10 (*Trasformazione ad assi principali su $\mathbb{C}$*)**.** *Si consideri una forma bilineare simmetrica*

$$\beta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^n$ tale che la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\beta)$ è

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(dove gli zeri rappresentano matrici nulle di ordini opportuni). Equivalentemente, per ogni matrice simmetrica $B \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ esiste una matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tale che

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per il Teorema 9.9.9, sia $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $\mathbb{C}^n$ tale che $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\beta)$ è diagonale. A meno di riordinare i vettori di $\mathcal{C}$, possiamo supporre

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_i \neq 0$ per $i = 1, \dots, r$. Si considerino ora gli scalari (che esistono in $\mathbb{C}$)

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r \quad \textit{tali che} \quad \alpha_i^2 = \lambda_i, \quad \forall\, i = 1, \dots, r$$

e i vettori

$$w_1 := \frac{v_1}{\alpha_1},\ \dots,\ w_r := \frac{v_r}{\alpha_r},\ w_{r+1} := v_{r+1},\ \dots,\ w_n := v_n.$$

E' immediato calcolare, per $i = 1, \dots, r$:

$$\beta(w_i, w_i) = \beta\left(\frac{v_i}{\alpha_i}, \frac{v_i}{\alpha_i}\right) = \frac{\beta(v_i, v_i)}{\alpha_i^2} = 1.$$

Mentre, per $i = r+1, \dots, n$ si ha

$$\beta(w_i, w_i) = \beta(v_i, v_i) = 0.$$

Dunque, posta $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$, si ha che $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\beta)$ è come richiesta nell'enunciato.

Teorema 9.9.11 (*Trasformazione ad assi principali su* $\mathbb{R}$)**.** *Si consideri una forma bilineare simmetrica*

$$\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\beta)$ è

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(dove gli zeri rappresentano matrici nulle di ordini opportuni). Equivalentemente, per ogni matrice simmetrica $B \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ esiste una matrice $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analoga alla precedente, ma in questo caso si riordinano gli elementi della diagonale $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+q}, 0,$ in modo che

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, \ldots, p; \quad \lambda_i < 0, \quad i = p+1, \ldots, p+q.$$

Infine, si scelgono gli α_i in modo che $\alpha_i^2 = \lambda_i$, per $i = 1, \ldots, p$, e $\alpha_i^2 = -\lambda_i$, per $i = p+1, \ldots, p+q$.

Definizione 9.9.12. Se $B \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica congruente alla matrice

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diciamo che la coppia di interi (p, q) è la *segnatura* di B.

Definizione 9.9.13. Diciamo *segnatura di una conica $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$* la segnatura (p, q) di una sua matrice associata B, supponendo $p \geq q$ (non è restrittivo, in quanto anche $-B$ è associata alla stessa conica).

Osservazione 9.9.14. Per il Teorema 9.9.11, la segnatura (p, q) di una conica $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è un invariante proiettivo (con $p \geq q$). Inoltre $p + q = \mathrm{rg}(C)$.

Osservazione 9.9.15. Si noti che un cambio di nome delle coordinate omogenee nell'equazione di una conica C corrisponde ad applicare un cambio Q di riferimento proiettivo, e quindi non si influenza né il rango né la segnatura di C. Ad esempio, lo scambio $x_0 \leftrightarrow x_2$ corrisponde alla matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}).$$

Osservazione 9.9.16. Il Corollario 9.9.5 e i Teoremi 9.9.10 (nel caso complesso) e 9.9.11 (nel caso reale) di *Trasformazione ad assi principali* forniscono immediatamente la lista delle possibili equazioni delle coniche del piano proiettivo e quindi la classificazione delle coniche proiettive.

Tuttavia, nelle dimostrazioni dei prossimi teoremi, si costruiscono esplicitamente i cambi di coordinate proiettive che "unificano" alcuni tipi di coniche affini. Le dimostrazioni risultano in tal modo costruttive (anche se ridondanti). Inoltre si verifica, nel caso reale, che due coniche sono proiettivamente equivalenti *se e solo se* hanno la stessa segnatura.

Teorema 9.9.17 (*Classificazione delle coniche proiettive reali*)**.** *Ogni conica di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:*

$$\begin{array}{ll} (I)_{\mathbb{R}} & x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ (II)_{\mathbb{R}} & x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ (III)_{\mathbb{R}} & x_0^2 + x_1^2 = 0 \\ (IV)_{\mathbb{R}} & x_0^2 - x_1^2 = 0 \\ (V)_{\mathbb{R}} & x_0^2 = 0. \end{array}$$

Utilizziamo la tabella compilata alla fine della dimostrazione del Teorema 9.8.3 sulla classificazione delle coniche di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$*, riscrivendo (i polinomi che definiscono) le coniche in coordinate omogenee e aggiungendo due coniche degeneri (che denotiamo con S e D, semplicemente e doppiamente) aventi la retta impropria come componente. Inoltre aggiungiamo l'ellisse immaginaria (che denotiamo con E) che si era omessa nella classificazione affine in quanto priva di punti reali. Invece della colonna che riportava il determinante di A, consideriamo la colonna della segnatura (p, q), avendo osservato* *che* $p+q = rg(C)$ *e* $p \geq q$.

		$rg(C)$	(p,q)
$1_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_0x_2$	3	$(2,1)$
$2_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_0^2$	2	$(1,1)$
$3_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2$	3	$(2,1)$
$4_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 + x_2^2$	2	$(2,0)$
$5_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_2^2 - x_0^2$	3	$(2,1)$
$6_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_2^2$	2	$(1,1)$
$7_{\mathbb{R}}$	x_1^2	1	(1)
E	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2$	3	$(3,0)$
D	x_0^2	1	(1)
S	x_0x_1	2	$(1,1)$

Proviamo ora che le seguenti coniche sono proiettivamente equivalenti:

-) $1_{\mathbb{R}} \sim 3_{\mathbb{R}} \sim 5_{\mathbb{R}} \sim (II)_{\mathbb{R}}$ *Cambiando segno e nome alle variabili* ($x_0 \leftrightarrow x_1$), $5_{\mathbb{R}}$ *diventa* $3_{\mathbb{R}}$. *A sua volta, quest'ultima è congruente a* $(II)_{\mathbb{R}}$, *cambiando nome alle variabili. Infine, il cambio di coordinate* Q *applicato alla conica* $1_{\mathbb{R}}$, *dove*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene la matrice

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

associata alla conica $(II)_{\mathbb{R}}$.

-) $2_{\mathbb{R}} \sim 6_{\mathbb{R}} \sim S \sim (IV)_{\mathbb{R}}$: *analogo.*

-) $7_{\mathbb{R}} \sim D \sim (V)_{\mathbb{R}}$: *immediato.*

-) Infine si osservi che E *è la conica* $(I)_{\mathbb{R}}$ *e che* $4_{\mathbb{R}} \sim (III)_{\mathbb{R}}$ *con un semplice cambio di variabili.*

Teorema 9.9.18 (*Classificazione delle coniche proiettive complesse*)**.** *Ogni conica di* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:*

$$(ND)_{\mathbb{C}} \qquad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$$(SD)_{\mathbb{C}} \qquad x_0^2 + x_1^2 = 0$$

$$(DD)_{\mathbb{C}} \qquad x_0^2 = 0$$

dove le precedenti sigle significano, rispettivamente, non degenere, semplicemente degenere, doppiamente degenere*.*

Per il Teorema 9.9.17, è sufficiente mostrare che:
-) $(I)_{\mathbb{R}} \sim (II)_{\mathbb{R}}$ *attraverso una matrice* $Q \in GL(3, \mathbb{C})$*;*
-) $(III)_{\mathbb{R}} \sim (IV)_{\mathbb{R}}$ *attraverso una matrice* $Q' \in GL(3, \mathbb{C})$*. Immediatamente si verifica che*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad e \quad Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soddisfano i precedenti requisiti.

Concludiamo questo paragrafo sulle coniche nel piano proiettivo studiando le intersezioni di una conica e una retta in $\mathbb{P}^2_K$*, quando* $K = \mathbb{R}$ *o* $K = \mathbb{C}$*, completando e generalizzando i risultati riguardo alle coniche affini (vedi Proposizione 9.6.1, Proposizione 9.6.6 e Definizione 9.6.7).*

Proposizione 9.9.19. *Una conica non degenere e una retta hanno esattamente due punti di intersezione in* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$*, eventualmente coincidenti.*

Siano C *la generica conica e* r *la generica retta di* $\mathbb{P}^2$ *di equazioni*

$$C: \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_i x_j = 0, \quad r: \ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0.$$

Non è restrittivo supporre $b_0 \neq 0$*; posti* $c_1 := -b_1/b_0$ *e* $c_2 := -b_2/b_0$*, si ha* $r: \ x_0 = c_1x_1 + c_2x_2$*. Quindi*

$$C \cap r: \begin{cases} \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j & = & 0 \\ x_0 & = & c_1x_1 + c_2x_2 \end{cases}$$

e sostituendo si ottiene, con opportuno cambio di nomi dei coefficienti,

$$C \cap r: \begin{cases} \alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 & = & 0 \\ x_0 & = & c_1x_1 + c_2x_2 \end{cases}$$

Se la prima equazione è di secondo grado, avendo i coefficienti complessi ed essendo omogenea, ammette 2 radici in $\mathbb{C}^2$ *(e tutte quelle proporzionali), che denotiamo con* (y_1, y_2) *e* (z_1, z_2)*. Tali soluzioni possono essere coincidenti. Sostituendole, rispettivamente, nella seconda equazione, otteniamo i due punti di intersezione di* C *e* r*:*

$$[c_1y_1 + c_2y_2, y_1, y_2], \quad [c_1z_1 + c_2z_2, z_1, z_2].$$

Altrimenti l'equazione suddetta diventa l'identità $0 = 0$ *e quindi sono soluzioni del sistema tutti i punti tali che* $x_0 = c_1x_1 + c_2x_2$*. In altre parole,* $C \cap r = r$*, quindi* C *sarebbe degenere, contro l'ipotesi.*

Definizione 9.9.20. In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ siano C una conica non degenere, r una retta e $C \cap r = \{P, Q\}$. Se $P \neq Q$, diciamo che C e r sono *secanti in P e Q* e che la *molteplicità di intersezione* di C e r in P (rispettivamente, in Q) è 1; scriveremo $m_P(C, r) = 1$ (rispettivamente, $m_Q(C, r) = 1$). Invece, se $P = Q$, diciamo che C e r sono *tangenti in P* e scriveremo $m_P(C, r) = 2$ o anche $C \cap r = \{P^2\}$.

Osservazione 9.9.21. Si può provare che, se $P \in C$ sono una conica non degenere e un suo punto del piano affine $\mathbb{A}^2$ e $t = T_P(C)$ è la retta tangente a C in P, allora (attraverso l'immersione $j_0 : \ \mathbb{A}^2 \to \mathbb{P}^2$) la chiusura proiettiva $\overline{t}$ è la retta tangente a $\overline{C}$ in P, nel senso della definizione precedente.

Esempio 9.9.22. Nel piano euclideo complesso una parabola e il suo asse si incontrano in un solo punto (il vertice). Nel piano proiettivo, hanno invece due punti in comune, secondo quanto visto nella precedente Proposizione. Vediamo un caso numerico. Siano $C : \ y = x^2$ e $r : \ x = 0$. La loro intersezione in $\mathbb{P}^2$ è data da

$$C \cap r : \begin{cases} x_1^2 - x_0 x_2 &= 0 \\ \quad x_1 &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_0 x_2 &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} [0,0,1] = r_\infty \\ [1,0,0] = V \end{array}.$$

Il primo dei due è un punto improprio (non rilevabile in $\mathbb{E}^2$), e precisamente è il punto improprio dell'asse r.

9.10 Dualità e sistemi lineari

Nel Capitolo 3 abbiamo introdotto l'equazione cartesiana di un iperpiano $H : \ a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n = 0$ nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_K$. Chiaramente questa non è unica: più precisamente, i suoi coefficienti sono determinati a meno di una costante moltiplicativa non nulla. Dunque un iperpiano non individua una $(n+1)$-upla di K^{n+1} bensì infinite $(n+1)$-uple proporzionali, cioè un punto *di $\mathbb{P}^n_K$.*

Ad esempio, se r è una retta di $\mathbb{P}^2$ di equazione cartesiana

$$r : \ a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,$$

essa individua univocamente *il punto di $\mathbb{P}^2$ dato da $[a_0, a_1, a_2]$.*

È chiaro, inoltre, che le coordinate omogenee del punto $[a_0, a_1, a_2]$ dipendono dall'equazione di r e dunque dal riferimento proiettivo che si è fissato nel piano contenente r.

Per evitare confusione, useremo una notazione e una denominazione diversa per lo spazio proiettivo di dimensione 2 a cui appartiene $[a_0, a_1, a_2]$.

Definizione 9.10.1. Il piano proiettivo i cui punti rappresentano, come sopra, tutte le rette di $\mathbb{P}^2_K$ si dice *piano proiettivo duale* e si denota con $(\mathbb{P}^2_K)^*$ (equivalentemente, si può definire come $\mathbb{P}((K^3)^*)$).

Esplicitamente: se $\mathbb{P}^2_K$ è dotato di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, a una retta r di $\mathbb{P}^2_K$ corrisponde il punto r^* di $(\mathbb{P}^2_K)^*$ secondo la seguente corrispondenza biunivoca

$$\delta : \quad \{\textit{rette di } \mathbb{P}^2_K\} \quad \longleftrightarrow \quad (\mathbb{P}^2_K)^*$$

definita da

$$r : \ a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad r^* = [a_0, a_1, a_2].$$

Scambiando i ruoli di $\mathbb{P}^2_K$ e $(\mathbb{P}^2_K)^*$ (o, equivalentemente, di punti e rette), è naturale definire un'altra corrispondenza, anch'essa biunivoca,

$$\delta^* : \quad \mathbb{P}^2_K \quad \longleftrightarrow \quad \{\textit{rette di } (\mathbb{P}^2_K)^*\}$$

definita da (rispetto alle coordinate omogenee $[z_0, z_1, z_2]$ di $(\mathbb{P}^2_K)^*$)

$$P = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \quad \longleftrightarrow \quad P^* : \ \alpha_0z_0 + \alpha_1z_1 + \alpha_2z_2 = 0$$

Definizione 9.10.2. Le due corrispondenze δ e δ^* sopra definite costituiscono la *relazione di dualità* fra $\mathbb{P}^2_K$ e $(\mathbb{P}^2_K)^*$.

Esempio 9.10.3. Il punto che rappresenta la retta $r : 2x_0 - x_1 + 5x_2 = 0$ è $r^* = [2, -1, 5] \in (\mathbb{P}^2)^*$. La retta che rappresenta il punto $P = [3, 0, 1]$ è la retta di $(\mathbb{P}^2)^*$ di equazione $P^* : \ 3z_0 + z_2 = 0$.

Nella relazione di dualità si mantengono la relazione di appartenenza e quella di inclusione, ma i "soggetti" vengono scambiati. Lasciamo per esercizio la dimostrazione delle semplici proprietà elencate qui di seguito.

Proposizione 9.10.4. *Se P è un punto e r una retta di $\mathbb{P}^2_K$ allora*

$$P \in r \iff r^* \in P^*.$$

Se A e B sono due punti distinti e r è una retta di $\mathbb{P}^2_K$ allora

$$A, B \in r \iff r^* = A^* \cap B^*.$$

Se P è un punto e r e s sono due rette distinte di $\mathbb{P}^2_K$ allora

$$P = r \cap s \iff r^*, s^* \in P^*.$$

Dalla prima proprietà segue immediatamente che le rette di un fascio di rette di centro P sono rappresentate da tutti e soli i punti della retta P^* di $(\mathbb{P}^2)^*$.

Osservazione 9.10.5. Dalla terza proprietà segue che le rette del fascio $\mathcal{F}_P$, generato da r e s, corrispondono ai punti della retta P^* di $(\mathbb{P}^2)^*$ passante per i punti r^* e s^*. Esplicitamente: si consideri il fascio di rette di centro P in $\mathbb{P}^2$

$$\mathcal{F}_P: \ \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) = 0.$$

Allora tutte e sole le rette di $\mathcal{F}_P$ sono rappresentate dai punti di $(\mathbb{P}^2)^*$ appartenenti alla retta P^* passante per i punti $[a_0, a_1, a_2]$ e $[b_0, b_1, b_2]$. Più precisamente, se $r_{\lambda,\mu} \in \mathcal{F}_P$ il punto corrispondente nel piano duale è $\lambda[a_0, a_1, a_2] + \mu[b_0, b_1, b_2]$.

Esempio 9.10.6. Vogliamo rappresentare in $(\mathbb{P}^2)^*$ le rette del fascio di centro $P = [1, 2, 3]$, sia in forma cartesiana che in forma parametrica. Come visto, l'insieme richiesto è una retta del piano duale. Per ottenere la sua equazione cartesiana basta osservare che tale retta è

$$P^*: \ z_0 + 2z_1 + 3z_2 = 0.$$

D'altro canto, due rette passanti per P sono, ad esempio $x_1 - 2x_0 = 0$ e $x_2 - 3x_0 = 0$. Prendendo tali rette come generatori del fascio, abbiamo

$$\mathcal{F}_P: \ \lambda(x_1 - 2x_0) + \mu(x_2 - 3x_0) = 0.$$

Quindi P^* è la retta passante per $[-2, 1, 0]$ e $[-3, 0, 1]$, cioè

$$P^*: \ [z_0, z_1, z_2] = \lambda[-2, 1, 0] + \mu[-3, 0, 1]$$

e questa è l'equazione parametrica richiesta.

Infine osserviamo che le rette di $\mathcal{F}_P$ si ottengono da tutte le rette di $\mathbb{P}^2$ imponendo la condizione lineare *di passaggio per P. Nell'esempio precedente $P = [1, 2, 3]$ e si impone alla generica retta del piano*

$$r: \ z_0x_0 + z_1x_1 + z_2x_2 = 0$$

la condizione lineare

$$z_0 + 2z_1 + 3z_2 = 0,$$

che, come visto, è l'equazione cartesiana di P^*. Quindi i parametri omogenei $[z_0, z_1, z_2]$ devono soddisfare un'equazione lineare omogenea. Risolvendo tale equazione, ad esempio ricavando $z_0 = -2z_1 - 3z_2$, si ottiene la generica retta del fascio di centro P (avendo posto $\lambda := z_1$ e $\mu := z_2$):

$$r_{\lambda,\mu}: \ (-2\lambda - 3\mu)x_0 + \lambda x_1 + \mu x_2 = 0.$$

In modo del tutto analogo, si definisce lo spazio proiettivo duale *di* $\mathbb{P}^n_K$ *e si denota con* $(\mathbb{P}^n_K)^*$. *Come prima, si pone la* relazione di dualità *fra* $\mathbb{P}^n_K$ *e* $(\mathbb{P}^n_K)^*$ *stabilita da* δ *e* δ^**, dove*

$$\delta : \quad \{\textit{iperpiani di } \mathbb{P}^n_K\} \quad \longleftrightarrow \quad (\mathbb{P}^n_K)^*$$

è definita da

$$H : \ a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0 \quad \longleftrightarrow \quad H^* = [a_0, \ldots, a_n].$$

e

$$\delta^* : \quad \mathbb{P}^n_K \quad \longleftrightarrow \quad \{\textit{iperpiani di } (\mathbb{P}^n_K)^*\}$$

è definita da (rispetto alle coordinate omogenee $[z_0, \ldots, z_n]$ *di* $(\mathbb{P}^n_K)^*$*)*

$$P = [\alpha_0, \ldots, \alpha_n] \quad \longleftrightarrow \quad P^* : \ \alpha_0z_0 + \cdots + \alpha_nz_n = 0$$

Anche in questo caso, vale la proprietà analoga a quella vista prima: se P *è un punto e* H *un iperpiano di* $\mathbb{P}^n_K$ *allora*

$$P \in H \iff H^* \in P^*.$$

Pertanto l'insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}^n_K$ *passanti per un fissato punto* P *è parametrizzato dai punti dell'iperpiano* P^* *di* $(\mathbb{P}^n_K)^*$. *Come nel caso precedente, il passaggio per un punto è un esempio di* condizione lineare.

Definizione 9.10.7. Si dice *sistema lineare di iperpiani di dimensione* r una famiglia di iperpiani di $\mathbb{P}^n_K$ i cui coefficienti sono parametrizzati da un sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}^n_K)^*$ di dimensione r.

Esempio 9.10.8. Consideriamo il sistema lineare dei piani di $\mathbb{P}^3$:

$$\mathcal{S} : \ a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

e imponiamo la condizione lineare di passaggio per il punto $P = [-1, 2, 3, 4]$. Quest'ultima è

$$-a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 0.$$

Pertanto $a_0 = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3$ e il sistema lineare dei piani passanti per P risulta dunque

$$\mathcal{S}_P : \ (2a_1 + 3a_2 + 4a_3)x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

ed è di dimensione 2: infatti è parametrizzato dal piano di $(\mathbb{P}^3)^*$ di equazione $-z_0 + 2z_1 + 3z_2 + 4z_3 = 0$. Richiedendo anche il passaggio per $Q = [0, 2, 1, 1]$, si ha l'ulteriore condizione lineare

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

quindi, complessivamente, si ottiene un sistema lineare omogeneo di rango 2:

$$\begin{cases} -a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 &= 0 \\ \qquad\quad 2a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_0 &= -6a_1 - a_2 \\ a_3 &= -2a_1 - a_2 \end{cases}.$$

Il sistema lineare dei piani passanti per P e Q risulta dunque

$$\mathcal{S}_{P,Q}:\ (-6a_1 - a_2)x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + (-2a_1 - a_2)x_3 = 0$$

e chiaramente ha dimensione 1: è un fascio di piani. Infine, imponendo il passaggio per un terzo punto $R = [1, 0, 0, 0]$ si ottiene un sistema lineare omogeneo di rango 3 e, di conseguenza, un sistema lineare di piani di dimensione 0, cioè un unico piano. Determinarlo per esercizio.

Definizione 9.10.9. Diciamo che ρ condizioni lineari omogenee sui coefficienti degli iperpiani di $\mathbb{P}^n$, con $1 \leq \rho \leq n$, sono *indipendenti* se il rango del sistema lineare omogeneo costituito da tali equazioni è uguale a ρ.

Osservazione 9.10.10. Il sistema lineare degli iperpiani di $\mathbb{P}^n$ che soddisfano ρ condizioni lineari indipendenti ha dimensione $n - \rho$. Infatti è parametrizzato dal sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}^n)^*$ che è intersezione dei ρ iperpiani indipendenti corrispondenti ciascuno a una delle condizioni lineari.

Abbiamo visto prima che un esempio di condizione lineare è il passaggio per un punto fissato. Dall'Osservazione precedente segue dunque immediatamente il seguente risultato.

Proposizione 9.10.11. *Sia $1 \leq \rho \leq n$ e siano $P_1, \dots, P_\rho$ punti proiettivamente indipendenti di $\mathbb{P}^n$. Allora il passaggio per tali punti impone agli iperpiani di $\mathbb{P}^n$ esattamente ρ condizioni lineari indipendenti. Dunque il sistema lineare degli iperpiani passanti per $P_1, \dots, P_\rho$ ha dimensione $n - \rho$.*

Si considerino le coordinate omogenee dei punti

$$P_i = [\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}], \quad i = 1, \dots, \rho.$$

Per ipotesi, tali punti sono indipendenti e quindi (vedi il Corollario 7.3.9 e la Definizione 7.3.10) la matrice $A \in K^{\rho,n+1}$, avente per righe le loro coordinate, ha rango ρ. D'altra parte, il passaggio per $P_1, \dots, P_\rho$ impone ai coefficienti z_i del generico iperpiano $z_0x_0 + \dots + z_nx_n = 0$ di $\mathbb{P}^n$ di soddisfare il sistema lineare omogeneo

$$AZ = 0, \quad \text{dove} \quad Z := {}^t(z_0, \dots, z_n).$$

Pertanto $AZ = 0$ è costituito da ρ equazioni indipendenti e il suo spazio delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di K^{n+1} di dimensione $n + 1 - \rho$. Il suo proiettivizzato è quindi un sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}^n)^*$ di dimensione $n - \rho$, come volevamo.

9.11 Fasci di coniche

Introduciamo ora una costruzione come quella precedente, ma nell'ambito delle coniche del piano proiettivo. A una conica di $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2_K$ (con $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) di equazione

$$C: \; a_{00}x_0^2 + 2\,a_{01}\,x_0x_1 + 2\,a_{02}\,x_0x_2 + a_{11}\,x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1x_2 + a_{22}\,x_2^2 = 0 \tag{9.11.1}$$

si può associare l'insieme dei suoi possibili coefficienti

$$\{k\,(a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}) \mid k \in K^*\}$$

che è un punto dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^5$. In tal modo, si individua una corrispondenza biunivoca:

$$\psi: \quad \{\textit{coniche di } \mathbb{P}^2\} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{P}^5$$

definita da

$$C \quad \mapsto \quad [a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}].$$

Tale applicazione è ben definita. Nel seguito denoteremo quindi, i coefficienti $[a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}]$ della generica conica anche con le coordinate omogenee $[z_0, \ldots, z_5]$ di $\mathbb{P}^5$.

Esempio 9.11.1. Il punto di $\mathbb{P}^5$ associato alla conica $y = 3x^2$, secondo la corrispondenza ψ sopra definita, è $[0, 0, -1/2, 3, 0, 0]$.

Diciamo dunque che le coniche del piano sono parametrizzate da $\mathbb{P}^5$.

Definizione 9.11.2. Si dice *sistema lineare di coniche di dimensione r* una famiglia di coniche di $\mathbb{P}^2$ i cui coefficienti sono parametrizzati da un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^5$ di dimensione r, con $0 \leq r \leq 5$.

In particolare, le coniche del piano costituiscono un sistema lineare di dimensione 5, che è l'intero $\mathbb{P}^5$. E una sola conica è un sistema lineare di dimensione 0.

In analogia con quanto visto nel paragrafo precedente, introduciamo la seguente nozione.

Definizione 9.11.3. Si dice *condizione lineare* sulle coniche di $\mathbb{P}^2$ un'equazione lineare omogenea nei coefficienti della generica conica. In altri termini, è l'equazione di un iperpiano di $\mathbb{P}^5$, dove quest'ultimo parametrizza (tramite ψ) le coniche di $\mathbb{P}^2$, dunque è della forma

$$m_0z_0 + \cdots + m_5z_5 = 0,$$

dove $m_i \in K$ per ogni i.

Esempio 9.11.4. Sono condizioni lineari sulle coniche di $\mathbb{P}^2$ le equazioni $a_{11} + a_{22} = 0$ (o, equivalentemente, $z_3 + z_5 = 0$), $2a_{12} - 3a_{02} = 0$ (o, equivalentemente, $2z_4 - 3z_2 = 0$), ecc.

Definizione 9.11.5. Diciamo che s condizioni lineari sulle coniche sono *indipendenti* se il sistema lineare omogeneo costituito da tali equazioni ha rango s, i.e. è del tipo

$$MZ = 0, \quad \text{dove} \quad M \in K^{s,6}, \quad \text{rg}(M) = s$$

avendo posto

$$Z = {}^t[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5] = {}^t[a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}].$$

In altri termini, se il sistema lineare omogeneo $MZ = 0$ è l'equazione cartesiana di un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^5$ avente codimensione s.

Da questa definizione segue che il numero s di condizioni indipendenti deve verificare $1 \leq s \leq 5$. Si ha immediatamente il seguente fatto.

Proposizione 9.11.6. *Le coniche di $\mathbb{P}^2$ che soddisfano s condizioni lineari indipendenti costituiscono un sistema lineare di coniche di dimensione $5 - s$.*

L'esempio più semplice di condizione lineare è il passaggio per un punto.

Esempio 9.11.7. Determinare la condizione lineare che esprime il passaggio per $P = [1, 0, 0]$ e l'equazione del sistema lineare $\mathcal{S}_P$ (di dimensione 4) di tutte le coniche per P.

Imponiamo il passaggio per P alla generica conica di equazione (9.11.1), ottenendo $a_{00} = 0$. Pertanto

$$\mathcal{S}_P : \ 2\, a_{01}\, x_0 x_1 + 2\, a_{02}\, x_0 x_2 + a_{11}\, x_1^2 + 2\, a_{12}\, x_1 x_2 + a_{22}\, x_2^2 = 0.$$

Si noti che ha dimensione 4 in quanto parametrizzato dall'iperpiano di $\mathbb{P}^5$ di equazione $z_0 = 0$. Infatti, nell'equazione di $\mathcal{S}_P$ compaiono 5 parametri omogenei indipendenti.

Vogliamo trovare un risultato analogo a quello della Proposizione 9.10.11, cioè determinare il numero e la posizione reciproca di punti che impongano condizioni indipendenti al sistema lineare delle coniche.

Ricordiamo che, in $\mathbb{P}^2$ il numero massimo di punti proiettivamente indipendenti è 3 (vedi Definizione 7.3.10), quindi dovremo utilizzare la nozione più ampia di punti in posizione generale.

Lemma 9.11.8. *Si consideri un sistema di s condizioni lineari indipendenti sui coefficienti (con $1 \leq s \leq 4$)*

$$MZ = 0, \quad M = (m_{ij}) \in K^{s,6} \tag{9.11.2}$$

e si consideri una ulteriore condizione lineare

$$h_0 z_0 + \cdots + h_5 z_5 = 0. \tag{9.11.3}$$

Allora le $s+1$ condizioni

$$\Sigma : \begin{cases} MZ & = & 0 \\ h_0 z_0 + \cdots + h_5 z_5 & = & 0 \end{cases}$$

sono indipendenti se e solo se esiste almeno una conica che soddisfa (9.11.2) ma non soddisfa (9.11.3).

Per ipotesi rg$(M) = s$ o, equivalentemente, per la Proposizione 9.11.6, $\dim \mathcal{S}_M = 5 - s$, dove $\mathcal{S}_M$ è il sistema lineare delle coniche che soddisfano la (9.11.2) .

Inoltre, per lo stesso motivo, le $s+1$ condizioni in Σ sono indipendenti se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} & & M & & & \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \end{pmatrix} = s+1$$

e questo equivale a $\dim \mathcal{S}_\Sigma = 5 - (s+1)$. Poiché si hanno le inclusioni di sottospazi proiettivi

$$\mathcal{S}_\Sigma \subseteq \mathcal{S}_M \subset \mathbb{P}^5$$

è chiaro che $\dim \mathcal{S}_\Sigma = 5 - (s+1)$ se e solo se la precedente inclusione è stretta se e solo se se esiste almeno una conica che soddisfa (9.11.2) ma non soddisfa (9.11.3).

Teorema 9.11.9. *Si consideri il sistema lineare di equazione (9.11.1) costituito da tutte le coniche di $\mathbb{P}^2$ e si imponga ad esso il passaggio per i punti $P_1, \dots, P_s$, dove $1 \leq s \leq 5$. Se tali punti sono in posizione generale, allora le s condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti.*

Proviamo l'affermazione nei vari casi.

(a) *Se $s = 1$, l'affermazione è immediata.*

(b) *Se $s = 2$ e P_1, P_2 sono distinti, allora le 2 condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti. Infatti, per il Lemma 9.11.8, basta trovare una conica che contiene P_1 ma non P_2. Poiché i punti sono distinti, esiste una retta r per P_1 e non per P_2; basta considerare la conica doppiamente degenere r^2.*

(c) *Se $s = 3$ e P_1, P_2, P_3 non sono allineati (e in particolare sono distinti), allora le 3 condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti. Infatti, per il punto (b) le 2 condizioni di passaggio per P_1 e P_2 sono indipendenti. Dunque, per il Lemma 9.11.8, basta trovare una conica che contiene P_1 e P_2 ma non P_3. Poiché i 3 punti non sono allineati, se r è la retta per P_1 e P_2, allora $P_3 \notin r$. Dunque r^2 è una conica che prova la tesi.*

(d) *Se $s = 4$ e P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale (e in particolare sono distinti), allora le 4 condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti. Infatti, per il punto (c) le 3 condizioni di passaggio per P_1, P_2, P_3 sono indipendenti. Dunque, per il Lemma 9.11.8, basta trovare una conica che contiene P_1, P_2, P_3 ma non P_4. Sia r è la retta per P_1 e P_2 e s è la retta per P_2 e P_3, dall'ipotesi si ha che $P_4 \notin (r \cup s)$ e quindi $r \cup s$ è una conica che prova la tesi.*

(e) *Analogo: concludere per esercizio.*

Tale risultato, con la Proposizione 9.11.6, ha due immediate conseguenze.

Corollario 9.11.10. *Per 5 punti in posizione generale passa una ed una sola conica.*

Esercizio C3. *Si provi che per 5 punti, dei quali al massimo 3 sono allineati, passa una ed una sola conica.*

Corollario 9.11.11. *Le coniche del piano passanti per 4 punti in posizione generale costituiscono un sistema lineare di dimensione 1.*

Tali sistemi lineari saranno l'oggetto di studio di quest'ultima parte del corso: vedremo come descriverli e come classificarli.

Definizione 9.11.12. Un sistema lineare di coniche di dimensione 1 si dice *fascio di coniche*.

Un fascio è parametrizzato da una retta di $\mathbb{P}^5$ del tipo

$$[z_0, \ldots, z_5] = \lambda[\alpha_0, \ldots, \alpha_5] + \mu[\beta_0, \ldots, \beta_5].$$

Mediante la corrispondenza biunivoca ψ, al punto $[z_0, \ldots, z_5]$ corrisponde la conica $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = 0$, mentre ai punti $[\alpha_0, \ldots, \alpha_5]$ e $[\beta_0, \ldots, \beta_5]$ corrispondono, rispettivamente, due specifiche coniche C e D di equazioni

$$C: \ f(x_0, x_1, x_2) = 0 \quad e \quad D: \ g(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Pertanto ogni conica del fascio è descritta da un polinomio omogeneo di secondo grado del tipo

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = \lambda f(x_0, x_1, x_2) + \mu g(x_0, x_1, x_2).$$

Definizione 9.11.13. L'equazione

$$\mathcal{F}: \ \lambda f(x_0, x_1, x_2) + \mu g(x_0, x_1, x_2) = 0, \tag{9.11.4}$$

con $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$, si dice *equazione cartesiana del fascio* $\mathcal{F}$. Inoltre le coniche $C: \ f(x_0, x_1, x_2) = 0$ e $D: \ g(x_0, x_1, x_2) = 0$ si dicono *generatori* di $\mathcal{F}$.

Anche in questo contesto (come accadeva per i fasci di rette nel piano o i fasci di piani nello spazio), i generatori di un fascio di coniche non sono univocamente individuati. Anzi, una qualunque coppia di coniche distinte del fascio può generare il fascio stesso. Inoltre, dall'equazione (9.11.4) è chiaro che un punto è comune a tutte le coniche di un fascio se e solo se appartiene a entrambi i generatori.

Definizione 9.11.14. Un punto P del piano si dice *punto base* di un fascio $\mathcal{F}$ se appartiene a tutte le coniche di $\mathcal{F}$.

Esempio 9.11.15. Calcoliamo i punti base del fascio

$$\mathcal{F}: \ \lambda(x^2+y^2-1)+\mu xy = 0.$$

Come osservato, sono i punti comuni ai due generatori e quindi corrispondono alle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-1 & = & 0 \\ \quad xy & = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (0,\pm 1), (\pm 1, 0).$$

Nel prossimo paragrafo classificheremo i vari tipi di fasci a seconda dei loro punti base. Iniziamo qui con una prima suddivisione relativa alle coniche degeneri e non degeneri.

Proposizione 9.11.16. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio di coniche in $\mathbb{P}^2$. Allora si presenta uno e uno solo dei due casi:*

$i)$ *$\mathcal{F}$ contiene esattamente 3 coniche degeneri, eventualmente coincidenti;*

$ii)$ *$\mathcal{F}$ è costituito solo da coniche degeneri.*

Sia $C_{\lambda,\mu}$ la generica conica di $\mathcal{F}$ della forma

$$C_{\lambda,\mu}: \ \lambda f(x_0,x_1,x_2)+\mu g(x_0,x_1,x_2) = 0$$

dove

$$f(x_0,x_1,x_2) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j, \quad g(x_0,x_1,x_2) = \sum_{i,j} b_{ij}x_ix_j$$

sono due polinomi omogenei di secondo grado che definiscono i due generatori di $\mathcal{F}$, rispettivamente. La matrice associata alla conica $C_{\lambda,\mu}$ è

$$B_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \lambda a_{00}+\mu b_{00} & \lambda a_{01}+\mu b_{01} & \lambda a_{02}+\mu b_{02} \\ \lambda a_{01}+\mu b_{01} & \lambda a_{11}+\mu b_{11} & \lambda a_{12}+\mu b_{12} \\ \lambda a_{02}+\mu b_{02} & \lambda a_{12}+\mu b_{12} & \lambda a_{22}+\mu b_{22} \end{pmatrix}.$$

Per il Teorema 9.9.8, la conica $C_{\lambda,\mu}$ è degenere se e solo se $\det(B_{\lambda,\mu}) = 0$. Chiaramente, $\det(B_{\lambda,\mu})$ è un polinomio omogeneo in λ e μ. Se è non nullo, tale polinomio ha grado 3 e quindi ha 3 radici (e tutte quelle proporzionali), non necessariamente distinte, che denotiamo con

$$[\lambda_1,\mu_1], \quad [\lambda_2,\mu_2], \quad [\lambda_3,\mu_3].$$

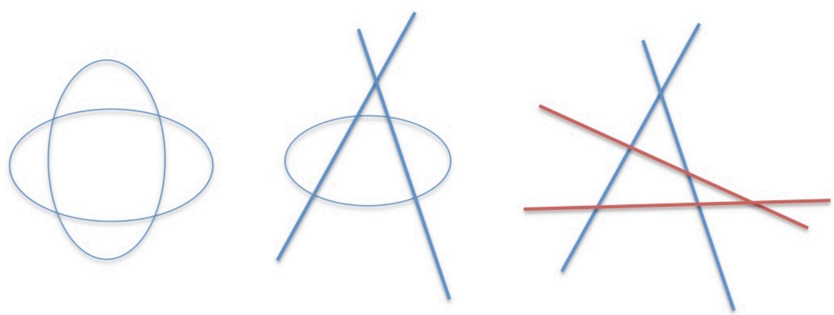
Dunque C_{λ_i,μ_i}, per $i=1,2,3$, sono tutte e sole le coniche degeneri di $\mathcal{F}$. Se invece $\det(B_{\lambda,\mu})$ è il polinomio nullo allora ogni conica $C_{\lambda,\mu}$ è degenere.

Definizione 9.11.17. Un fascio di coniche si dice *degenere* se tutte le sue coniche sono degeneri. Si dice *non degenere* altrimenti.

Nella ricerca dei punti base di un fascio si può procedere determinando i punti comuni a due generatori del fascio stesso. È naturale dunque chiedersi in quanti punti si incontrano due coniche.

Teorema 9.11.18. *Due coniche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ senza componenti comuni si intersecano esattamente in 4 punti, eventualmente coincidenti.*

Siano C e D due coniche di $\mathbb{P}^2$. Ci sono 3 possibilità: I) entrambe sono degeneri; in tal caso, poiché non hanno componenti in comune, la tesi segue banalmente. II) Una è degenere e l'altra no. In tal caso, sia C non degenere e $D = r \cup s$ (con r e s coincidenti o meno). Allora $C \cap D = C \cap (r \cup s) = (C \cap r) \cup (C \cap s)$ e si conclude con la Proposizione 9.9.19. III) Entrambe sono non degeneri. I punti di intersezione di C e D sono i punti base del fascio (non degenere) $\mathcal{F}$ generato da C e D. Ma, per la Proposizione 9.11.16, $\mathcal{F}$ contiene almeno una conica degenere D'; si ha $C \cap D = C \cap D'$ e si conclude con quanto visto nella parte (II).



Definizione 9.11.19. Siano C e D due coniche di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ senza componenti comuni. Definiamo la *molteplicità di intersezione* di C e D in un punto comune P, e la denotiamo con $m_P(C, D)$, come segue:

i) Se $C \cap D = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ allora $m_{P_i}(C, D) = 1$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4$;

ii) Se $C \cap D = \{P_1, P_2, P_3\}$ e $T_{P_1}(C) = T_{P_1}(D)$ allora $m_{P_1}(C, D) = 2$ (e $m_{P_2}(C, D) = 1 = m_{P_3}(C, D)$). Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^2, P_2, P_3\}$. In tal caso, diremo che C e D sono *tangenti* in P_1.

iii) Se $C \cap D = \{P_1, P_2\}$ e $T_{P_i}(C) = T_{P_i}(D)$, per $i = 1, 2$, allora $m_{P_i}(C, D) = 2$, per $i = 1, 2$. Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^2, P_2^2\}$. In tal caso, diremo che C e D sono tangenti sia in P_1 che in P_2.

iv) Se $C \cap D = \{P_1, P_2\}$ e $T_{P_1}(C) = T_{P_1}(D)$, ma $T_{P_2}(C) \neq T_{P_2}(D)$ allora $m_{P_1}(C, D) = 3$. Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^3, P_2\}$. In tal caso, diremo che C e D sono *osculanti* in P_1.

v) Se $C \cap D = \{P_1\}$ allora $m_{P_1}(C, D) = 4$. Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^4\}$. In tal caso, diremo che C e D sono *iperosculanti* in P_1.

Corollario 9.11.20. *Un fascio non degenere di coniche ha esattamente* 4 *punti base in* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$*, eventualmente coincidenti.*

Per definizione, in un un fascio non degenere $\mathcal{F}$ c'è (almeno) una conica non degenere C. Se D è un'ulteriore conica di $\mathcal{F}$, possiamo considerarle come generatori del fascio. Pertanto i punti base di $\mathcal{F}$, come osservato in precedenza, sono esattamente i punti di $C \cap D$. Essendo C non degenere, non ha componenti in comune con D e quindi, per il Teorema 9.11.18, $C \cap D$ è costituita da 4 punti, eventualmente coincidenti.

Tale risultato e il Corollario 9.11.11 suggeriscono che la "configurazione" dei punti base di un fascio di coniche ne determina la struttura.

Quanto visto finora per i fasci di coniche proiettive, può essere espresso in modo analogo nel piano affine o euclideo, come mostra il seguente esempio.

Esempio 9.11.21. Determinare il fascio $\mathcal{F}$ generato dalla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e dall'unione degli assi cartesiani di $\mathbb{E}^2$. Il fascio richiesto ha equazione, in $\mathbb{E}^2$,

$$\mathcal{F}: \ \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu xy = 0.$$

Lo stesso fascio è descritto in $\mathbb{P}^2$ dall'equazione

$$\mathcal{F}: \ \lambda(x_1^2 + x_2^2 - x_0^2) + \mu x_1 x_2 = 0.$$

9.12 Classificazione dei fasci di coniche

Abbiamo visto nel Paragrafo 11 che l'esempio più semplice di condizione lineare sulle coniche è il passaggio per un punto. Ma non è l'unico. Infatti, anche se la tangenza a una retta data impone una condizione quadratica *sui coefficienti della generica conica, la tangenza a una retta in un suo punto equivale a due condizioni lineari, come mostra il seguente risultato.*

Lemma 9.12.1. *In* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *la tangenza a una retta t in un suo punto P impone al sistema lineare delle coniche due condizioni lineari indipendenti.*

Si verifica (per esercizio) che non è restrittivo supporre che $t:\ x_2 = 0$ e $P = [1,0,0]$. Come al solito, consideriamo l'equazione (9.11.1)

$$C:\ a_{00}x_0^2 + 2\,a_{01}\,x_0x_1 + 2\,a_{02}\,x_0x_2 + a_{11}\,x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1x_2 + a_{22}\,x_2^2 = 0.$$

Imponiamo il passaggio per P, ottenendo $a_{00} = 0$. Intersecando C e t si ha

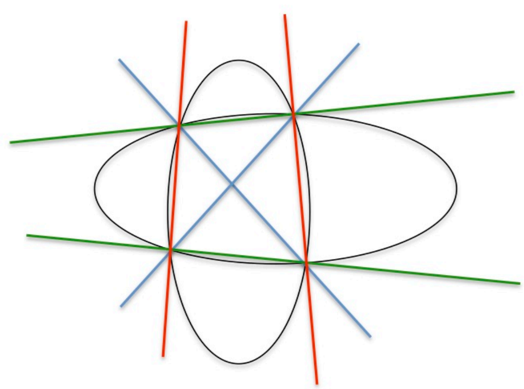
$$\begin{cases} 2\,a_{01}\,x_0x_1 + a_{11}\,x_1^2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(2\,a_{01}\,x_0 + a_{11}\,x_1) &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{cases}$$

e quest'ultimo sistema ha per soluzione P^2 se e solo se $a_{01} = 0$. Si osservi, infine, che le condizioni $a_{00} = 0$ e $a_{01} = 0$ sono indipendenti.

Nel seguito, siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e r_{ij} la retta per P_i e P_j, per $i, j = 1, 2, 3, 4$. Si prova (usando il Teorema fondamentale delle proiettività) che non è restrittivo fissare i punti e le rette in gioco e operare nel piano euclideo.

Proposizione 9.12.2. *Siano P_1, P_2, P_3, P_4 punti distinti e in posizione generale e sia $\mathcal{F}$ la famiglia delle coniche avente tali punti come punti base. Allora $\mathcal{F}$ è un fascio non degenere e le sue 3 coniche degeneri sono $C_1 := r_{12} \cup r_{34}$, $C_2 := r_{23} \cup r_{14}$, $C_3 := r_{24} \cup r_{13}$.*

La famiglia $\mathcal{F}$ è un fascio per il Corollario 9.11.11. Inoltre $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{F}$ e sono le uniche degeneri contenenti i 4 punti.



Proposizione 9.12.3. *Siano P_1, P_2, P_3 punti distinti e in posizione generale (cioè non allineati) e sia t una retta contenente P_3 ma non P_1 e P_2. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia delle coniche passanti per i 3 punti e tangenti a t in P_3. Allora $\mathcal{F}$ è un fascio non degenere, le sue 3 coniche degeneri sono $r_{13} \cup r_{23}$ (contata due volte) e $t \cup r_{12}$ e i suoi punti base sono P_1, P_2, P_3^2.*

Possiamo scegliere $P_1 = (1,0)$*,* $P_2 = (0,1)$*,* $P_3 = (0,0)$ *e* $t: \ x+y=0$*. La generica conica tangente a* t *in* P_3 *ha equazione*

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 - \delta(x+y) = 0.$$

Imponendo il passaggio per P_1 *e* P_2 *si ottengono, rispettivamente, le condizioni* $\delta = \alpha$ *e* $\gamma = \alpha$*. La famiglia richiesta è dunque*

$$\mathcal{F}: \ \alpha(x^2+y^2-x-y) + \beta xy = 0$$

che risulta un fascio di coniche. La generica conica di $\mathcal{F}$ *è*

$$C_{\alpha,\beta}: \ 2\alpha(x^2+y^2-x-y) + 2\beta xy = 0$$

e la sua matrice associata è

$$B_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & \beta \\ -\alpha & \beta & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

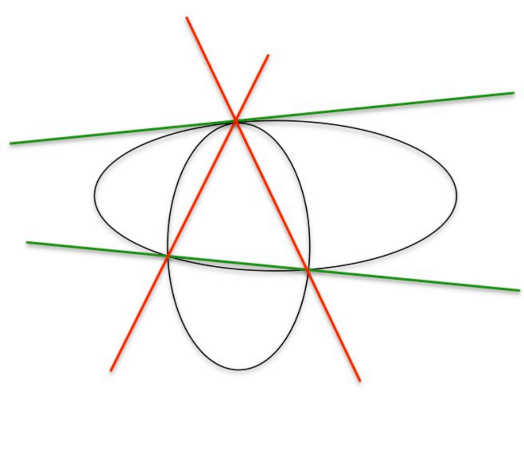
Essendo $\det(B_{\alpha,\beta}) = -2\alpha^2(2\alpha-\beta)$*, si deduce che* $\mathcal{F}$ *contiene esattamente 3 coniche degeneri (dunque è un fascio non degenere) ottenute per* $\alpha^2 = 0$ *e per* $\beta = 2\alpha$*. Esse sono* $xy = 0$ *(contata 2 volte), cioè* $r_{13} \cup r_{23}$*, e la conica*

$$x^2+y^2-x-y+2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+y)(x+y-1) = 0$$

che risulta essere $t \cup r_{12}$*. Infine, i punti base di* $\mathcal{F}$ *si ottengono intersecando, ad esempio, le due coniche degeneri:*

$$\begin{cases} xy &= 0 \\ (x+y)(x+y-1) &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 0 = y(y-1) \\ y = 0 = x(x-1) \end{array}$$

ottenendo $(0,0)^2, (0,1), (1,0)$.



Proposizione 9.12.4. *Siano P_1 e P_2 due punti distinti e s e t due rette distinte tali che $P_1 \in s$, $P_1 \notin t$, $P_2 \in t$, $P_2 \notin s$. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia delle coniche tangenti a s in P_1 e a t in P_2. Allora $\mathcal{F}$ è un fascio non degenere, le sue 3 coniche degeneri sono r_{12}^2 (contata due volte) e $s \cup t$ e i suoi punti base sono P_1^2, P_2^2.*

Come prima, si possono scegliere (nel piano euclideo) i punti $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$ e le rette $s: \ x = 0$, $t: \ x - 1 = 0$. La generica conica tangente a s in P_1 ha equazione

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 - \delta x = 0.$$

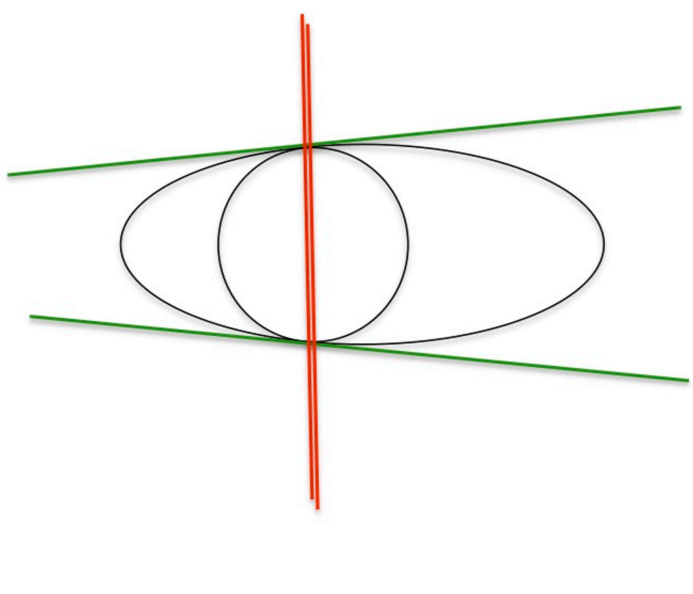
Imponendo la tangenza a t in P_2 si ottengono le ulteriori condizioni $\delta = \alpha$ e $\beta = 0$. La famiglia richiesta è dunque

$$\mathcal{F}: \ \alpha(x^2 - x) + \gamma y^2 = 0.$$

che è chiaramente un fascio di coniche. I generatori sono coniche degeneri e precisamente $x(x-1) = 0$ è l'equazione di $s \cup t$, mentre $y^2 = 0$ è la conica doppiamente degenere r_{12}^2. Per verificare che quest'ultima è contata due volte, basta calcolare il determinante della matrice della generica conica $C_{\alpha,\gamma}$ del fascio $\mathcal{F}$, come nella Proposizione precedente. Analogamente, per il calcolo dei punti base si possono intersecare le due coniche degeneri ottenendo

$$\begin{cases} x(x-1) &= 0 \\ y^2 &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (0,0)^2, \ (1,0)^2$$

come volevamo.



Proposizione 9.12.5. *Siano C una conica non degenere, P_1 e P_2 due punti distinti di C e $t := T_{P_1}(C)$ la retta tangente a C in P_1. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di coniche Γ tangenti a t in P_1, passanti per P_2 e tali che $m_{P_1}(\Gamma, C) = 3$. Allora:*

i) $\mathcal{F}$ è un fascio non degenere;

ii) l'unica conica degenere di $\mathcal{F}$ è $r_{12} \cup t$ (contata 3 volte);

iii) i punti base di $\mathcal{F}$ sono P_1^3 e P_2;

iv) comunque scelte due coniche $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{F}$, si ha $m_{P_1}(\Gamma_1, \Gamma_2) = 3$.

$i) - ii)$ Si possono scegliere, come al solito, $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$ e $t: \quad x = 0$. Si osservi anzitutto che le 3 condizioni (tangenza a t in P_1 e passaggio per P_2) determinano un sistema lineare di coniche di dimensione 2. Si vede facilmente che il suo elemento generale è del tipo

$$\Gamma: \quad \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 - \alpha x = 0.$$

Una di esse è la conica C, la cui equazione si ottiene scegliendo opportuni valori dei parametri:

$$C: \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 - ax = 0.$$

Si verifica facilmente che C è non degenere se e solo se $ac \neq 0$. Ora imponiamo che Γ sia osculante C in P_1: posti $C \cap \Gamma = \{P_1^2, P_2, Q\}$, imponiamo cioè che Q coincida con P_1. Ponendo a sistema le equazioni di C e Γ, questo è equivalente al sistema tra l'equazione di C e

$$\gamma(ax^2 + 2bxy + cy^2 - ax) - c(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 - \alpha x) = 0$$

da cui

$$x[(\gamma a - \alpha c)x + 2(\gamma b - \beta c)y - (\gamma a - \alpha c)] = 0.$$

Si ottengono dunque due sistemi: dal primo si ha $C \cap \{x = 0\}$ e quindi P_1^2. Il secondo fornisce le due intersezioni fra C e la retta

$$r: \ (\gamma a - \alpha c)x + 2(\gamma b - \beta c)y - (\gamma a - \alpha c) = 0$$

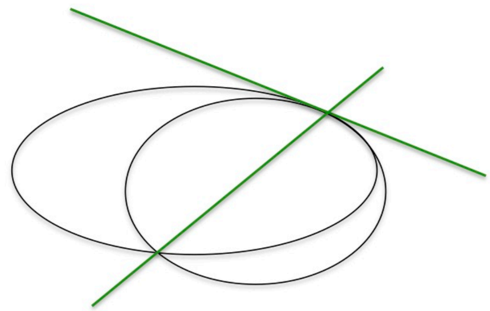
cioè il punto $P_2 = (1,0)$ e l'ulteriore punto Q. È evidente che $Q = P_1$ se e solo se $P_1 \in r$ se e solo se $\gamma a - \alpha c = 0$. Imponendo tale condizione a Γ si ottiene dunque un'equazione per la famiglia $\mathcal{F}$ che risulta essere

$$\mathcal{F}: \quad \alpha x^2 + 2\beta xy + \alpha(c/a)y^2 - \alpha x = 0$$

o anche, denotando con h il coefficiente numerico c/a,

$$\mathcal{F}: \quad \alpha(x^2 + hy^2 - x) + 2\beta xy = 0.$$

Quindi $\mathcal{F}$ è un fascio. Considerando la matrice della generica conica di $\mathcal{F}$, il suo determinante risulta $-h\alpha^3/2$, che risulta nullo se e solo se $\alpha = 0$. Infatti $h = c/a \neq 0$ in quanto C è non degenere per ipotesi. Pertanto l'unica conica degenere di $\mathcal{F}$ è $xy = 0$ contata 3 volte. Le affermazioni successive sono lasciate per esercizio.



Proposizione 9.12.6. *Siano C una conica non degenere, $P_1 \in C$ e $t := T_{P_1}(C)$ la retta tangente a C in P_1. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di coniche Γ tangenti a t in P_1 e tali che $m_{P_1}(\Gamma, C) = 4$. Allora:*

i) $\mathcal{F}$ è un fascio non degenere;

ii) l'unica conica degenere di $\mathcal{F}$ è t^2 (contata 3 volte);

iii) $\mathcal{F}$ ha P_1^4 come unico punto base;

iv) comunque scelte due coniche $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{F}$, si ha

$$m_{P_1}(\Gamma_1, \Gamma_2) = 4.$$

$i) - ii)$ *Per il Teorema 9.9.18 (*Classificazione delle coniche proiettive complesse*), la conica C è proiettivamente equivalente a $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$, che può essere ricondotta, nel piano affine, alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Con una opportuna rototraslazione possiamo dunque supporre che*

$$C: \; x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad P_1 = (0, 0).$$

Dunque $t: \; x = 0$. Imponendo le due condizioni lineari di tangenza a t in P_1 alle coniche del piano si ottiene la famiglia

$$\Gamma: \quad \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x = 0.$$

Consideriamo $\Gamma \cap C$:

$$\begin{cases} \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x &= 0 \\ y^2 &= -x^2 + 2x \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y^2 & = & -x^2+2x \\ (\alpha-\gamma)x^2+2\beta xy+(\delta+2\gamma)x & = & 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$(I): \quad \begin{cases} y^2 & = & -x^2+2x \\ x & = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (0,0)^2$$

$$(II): \quad \begin{cases} y^2 & = & -x^2+2x \\ (\alpha-\gamma)x+2\beta y+\delta+2\gamma & = & 0 \end{cases}$$

Affinché $(x,y)=(0,0)$ *sia soluzione, deve essere* $\delta+2\gamma=0$*. Supponiamo* $\beta\neq 0$*; allora il sistema è equivalente a*

$$\begin{cases} y^2 & = & -x^2+2x \\ y & = & (\gamma-\alpha)x/2\beta \end{cases}$$

da cui

$$(\gamma-\alpha)^2x^2=-4\beta^2x^2+8\beta^2x.$$

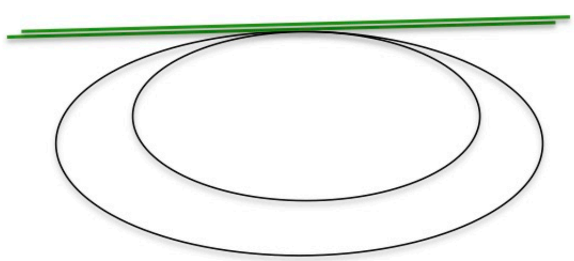
Tale equazione ha $x=0$ *come radice doppia se* $\beta=0$*. Dunque, sostituendo nel sistema* (II)*, si ha*

$$(II): \quad \begin{cases} y^2 & = & -x^2+2x \\ (\alpha-\gamma)x & = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (0,0)^2.$$

Sostituendo le condizioni trovate ($\delta+2\gamma=0$ *e* $\beta=0$*) nell'equazione di* Γ*, si determina infine la famiglia richiesta*

$$\mathcal{F}: \quad \alpha x^2+\gamma y^2-2\gamma x=0$$

che risulta chiaramente un fascio. Considerando la matrice della generica conica di $\mathcal{F}$*, il suo determinante risulta* γ^3*, che è nullo se e solo se* $\gamma=0$*. Pertanto l'unica conica degenere di* $\mathcal{F}$ *è* $x^2=0$ *(contata 3 volte). Le affermazioni successive sono lasciate per esercizio.*



Teorema 9.12.7 (Classificazione dei fasci non degeneri di coniche). *Sia $\mathcal{F}$ un fascio non degenere di coniche di punti base P_1, P_2, P_3, P_4.*
Allora $\mathcal{F}$ è di uno dei seguenti tipi:

i) fascio generale di coniche *se P_1, P_2, P_3, P_4 sono distinti e in posizione generale;*

ii) fascio tangente di coniche *se $P_1 = P_2, P_3, P_4$ sono distinti e non allineati; in tal caso le coniche di $\mathcal{F}$ hanno la stessa tangente in P_1;*

iii) fascio bitangente di coniche *se $P_1 = P_2$ e $P_3 = P_4$ sono distinti; in tal caso le coniche di $\mathcal{F}$ hanno le stesse rette tangenti in P_1 e in P_3;*

iv) fascio osculante di coniche *se $P_1 = P_2 = P_3$ e P_4 sono distinti; in tal caso due coniche di $\mathcal{F}$ hanno molteplicità di intersezione 3 in P_1;*

v) fascio iperosculante di coniche *se $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$; in tal caso due coniche di $\mathcal{F}$ hanno molteplicità di intersezione 4 in P_1.*

Dalle Proposizioni 9.12.2, 9.12.3, 9.12.4, 9.12.5, 9.12.6 segue la descrizione dei tipi di fasci $(i), \ldots, (v)$. Resta da provare che ogni fascio non degenere $\mathcal{F}$ è di uno di questi tipi. Per la Proposizione 9.11.16, $\mathcal{F}$ contiene necessariamente una conica non degenere e una degenere, che indichiamo, rispettivamente, con C e D. Esaminiamo tutte le possibilità.

1. *$D = r \cup s$, con $r \neq s$. Posto $Q := r \cap s$,*

   1.1. *$Q \notin C$. La posizione reciproca di C e delle componenti di D può essere:*
   - r e s sono secanti C; - r è secante e s è tangente a C. - r e s sono tangenti a C;
   Tali possibilità sono illustrate dalle Figure 1, 2, 3 e implicano, rispettivamente, che $\mathcal{F}$ è un fascio generale, tangente o bitangente.

   1.2. *$Q \in C$. La posizione reciproca di C e delle componenti di D può essere:*
   - r e s sono secanti C; - r è secante e s è tangente a C.
   Tali possibilità sono illustrate dalle Figure 4 e 5 e implicano, rispettivamente, che $\mathcal{F}$ è un fascio tangente o osculante.

2. *$D = r^2$. La posizione reciproca di C e di r può essere:*

   - r è secante C; - r è tangente a C.

   Tali possibilità sono illustrate dalle Figure 6 e 7 e implicano, rispettivamente, che $\mathcal{F}$ è un fascio bitangente o iperosculante.

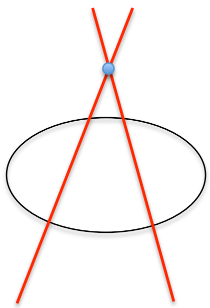


Figura 1

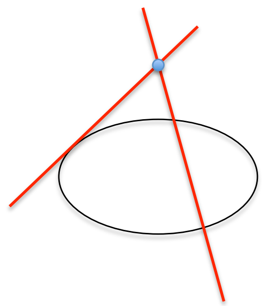


Figura 2

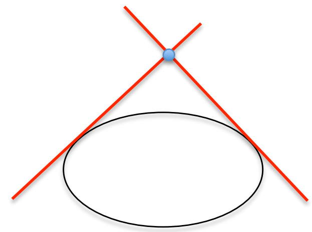


Figura 3

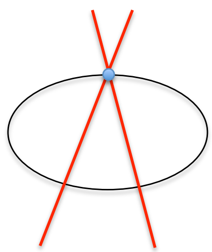


Figura 4

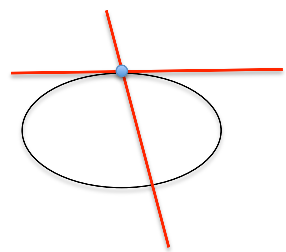


Figura 5

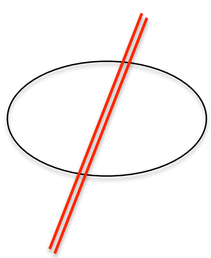


Figura 6

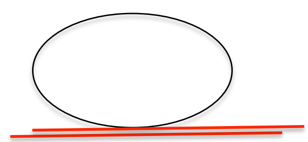


Figura 7

Esempio 9.12.8. Determinare l'equazione della famiglia $\mathcal{F}$ delle coniche di $\mathbb{A}^2$ per P_1, P_2, P_3, P_4, specificando se $\mathcal{F}$ è un fascio e, in tal caso, di che tipo, dove

$$P_1 = (1,0), \quad P_2 = (0,0), \quad P_3 = (0,1), \quad P_4 = (2,2).$$

Per vedere se i 4 punti sono in posizione generale, occorre considerare le loro coordinate omogenee attraverso l'immersione $j_0 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ e quindi

$$P_1 = [1,1,0], \quad P_2 = [1,0,0], \quad P_3 = [1,0,1], \quad P_4 = [1,2,2].$$

Tali punti sono in posizione generale se e solo se tutti i minori 3×3 della matrice M sono non degeneri, dove

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Questo accade, come si verifica facilmente. Dunque $\mathcal{F}$ è un fascio generale di coniche. In particolare, è un fascio non degenere e contiene esattamente 3 coniche degeneri distinte. Possiamo sceglierne 2 come generatori; ad esempio

$$C := r_{12} \cup r_{34}, \quad D := r_{13} \cup r_{24}.$$

Si calcolano immediatamente:

$$C : \ y(x - 2y + 2) = 0, \quad D : \ (x + y - 1)(x - y) = 0$$

dunque

$$\mathcal{F} : \quad \lambda y(x - 2y + 2) + \mu(x + y - 1)(x - y) = 0.$$

Esempio 9.12.9. Determinare l'equazione in $\mathbb{A}^2$ della famiglia $\mathcal{F}$ delle coniche osculanti C in P_1 e passanti per P_2, specificando se $\mathcal{F}$ è un fascio e, in tal caso, di che tipo, dove $P_1 = (0,2)$, $P_2 = (-1,0)$ e

$$C : \ 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0.$$

Poiché $P_2 \in C$ (e C è osculante se stessa in ogni punto), allora $C \in \mathcal{F}$. Questo risulta quindi un fascio osculante di coniche generato, ad esempio, da C e dalla conica degenere $D := r_{12} \cup t$, dove $t = T_{P_1}(C)$.

Posto $f(x,y)$ il polinomio che definisce C, si calcola

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_1} = 8x+8\Big|_{P_1} = 8, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_1} = 2y-4\Big|_{P_1} = 0,$$

quindi $t:\ x=0$. D'altra parte $r_{12}:\ 2x-y+2=0$ e dunque $D:\ x(2x-y+2)=0$, da cui

$$\mathcal{F}: \quad \lambda(4x^2+y^2+8x-4y+4)+\mu x(2x-y+2)=0.$$

Per descrivere i fasci degeneri di coniche, iniziamo con due semplici fatti.

Osservazione 9.12.10. Se un fascio $\mathcal{F}$ ha, tra i suoi punti base, 3 punti distinti allineati, allora è un fascio degenere. Infatti, supponiamo che $C \in \mathcal{F}$ sia una conica non degenere e sia r la retta contenente 3 punti base distinti P_1, P_2, P_3. Allora $(C \cap r) \supseteq \{P_1, P_2, P_3\}$, ma questo è impossibile per la Proposizione 9.9.19. Dunque non esiste una conica non degenere in $\mathcal{F}$.

Osservazione 9.12.11. Non è sufficiente che i generatori di $\mathcal{F}$ siano due coniche degeneri affinchè $\mathcal{F}$ sia un fascio degenere. Ad esempio, un fascio generale di coniche ha 3 coniche degeneri distinte, dunque si possono scegliere 2 di queste per generarlo. Tuttavia è una condizione necessaria. Vedremo che due coniche degeneri generano un fascio degenere o non degenere a seconda della posizione dei loro punti doppi.

Nel successivo Teorema, denotiamo con $\mathcal{G}_P$ il fascio di rette di sostegno P.

Teorema 9.12.12. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio degenere di coniche generato da due coniche semplicemente degeneri*

$$C_1 := r_1 \cup s_1, \quad C_2 := r_2 \cup s_2$$

e siano

$$P_1 := r_1 \cap s_1, \quad P_2 := r_2 \cap s_2$$

i rispettivi punti doppi. Allora si ha uno e uno solo dei seguenti casi:

i) *C_1 e C_2 hanno una componente in comune, per esempio $r_1 = r_2$. In tal caso, $\Gamma \in \mathcal{F}$ se e solo se $\Gamma = r_1 \cup t$ dove $t \in \mathcal{G}_Q$ e $Q := s_1 \cap s_2$. Inoltre i punti base di $\mathcal{F}$ sono tutti e soli i punti di r_1 e il punto Q.*

ii) *C_1 e C_2 non hanno componenti in comune e $P_1 = P_2$. In tal caso, se $\Gamma \in \mathcal{F}$ allora Γ è unione di due rette appartenenti a $\mathcal{G}_{P_1}$. Inoltre $\mathcal{F}$ ha come unico punto base P_1, contato 4 volte.*

Si presentano i seguenti casi:

(a) $P_1 \notin C_2$ *e* $P_2 \notin C_1$. *In questo caso* C_1 *e* C_2 *si intersecano in 4 punti in posizione generale, pertanto* $\mathcal{F}$ *è un fascio generale di coniche; in particolare è non degenere, contro l'ipotesi.*

(b) $P_1 \notin C_2$ *e* $P_2 \in C_1$. *In questo caso* P_2 *appartiene a una sola delle componenti di* C_1*, ad esempio* $P_2 \in r_1$. *In questo caso* C_1 *e* C_2 *si intersecano in 3 punti non allineati dei quali* P_2 *è contato due volte, pertanto* $\mathcal{F}$ *è un fascio tangente di coniche, tutte aventi comune tangente* r_1 *nel punto* P_2 *(vedi Proposizione 9.12.3). In particolare* $\mathcal{F}$ *è non degenere, contro l'ipotesi.*

(c) $P_1 \in C_2$ *e* $P_2 \in C_1$*, ma* $P_1 \neq P_2$. *In questo caso la retta per* P_1 *e* P_2 *è una componente comune di* C_1 *e* C_2 *(retta base). Pertanto* $C_1 = r \cup s_1$ *e* $C_2 = r \cup s_2$. *In un opportuno sistema di riferimento si ha dunque*

$$C_1 : \ x(a_1x + b_1y + c_1) = 0, \quad C_2 : \ x(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

e quindi

$$\mathcal{F} : \quad \lambda x(a_1x + b_1y + c_1) + \mu x(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

Dunque la generica conica di $\mathcal{F}$ *ha equazione*

$$x\left[\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2)\right] = 0$$

e quindi è l'unione della retta base $x = 0$ *e di una retta che varia nel fascio di rette generato da* s_1 *e* s_2*, ovvero in* $\mathcal{G}_Q$.

(d) $P_1 = P_2$. *Consideriamo un sistema di riferimento in cui* $P_1 = O = (0,0)$*,* $r_1 : \ x = 0$ *e* $r_2 : \ y = 0$. *Allora* $\mathcal{F}$ *ha equazione*

$$\mathcal{F} : \quad \lambda x(a_1x + b_1y) + \mu y(a_2x + b_2y) = 0.$$

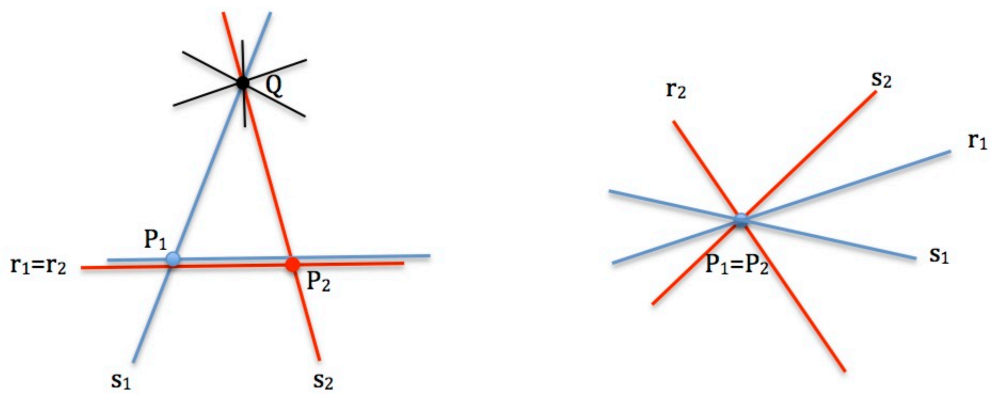
La sua generica conica è

$$C_{\lambda,\mu} : \ \lambda a_1x^2 + \lambda b_1xy + \mu a_2xy + \mu b_2y^2 = 0$$

la cui matrice associata è

$$B_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda a_1 & (\lambda b_1 + \mu a_2)/2 \\ 0 & (\lambda b_1 + \mu a_2)/2 & \mu b_2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $C_{\lambda,\mu}$ *è degenere per ogni* $[\lambda, \mu]$. *Con un semplice calcolo, si verifica che* $O = (0,0)$ *è punto doppio per ogni conica* $C_{\lambda,\mu}$*, dunque le sue componenti variano nel fascio di rette di centro* O*, come volevamo.*



Esempio 9.12.13. Determinare l'equazione della famiglia $\mathcal{F}$ delle coniche di $\mathbb{A}^2$ per P_1, P_2, P_3, P_4, specificando se $\mathcal{F}$ è un fascio e, in tal caso, di che tipo, dove

$$P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (0, 0), \quad P_3 = (0, 1), \quad P_4 = (-2, 0).$$

Si procede come nell'Esempio 9.12.8, considerando la matrice le cui righe sono le coordinate omogenee dei 4 punti e osservando che tali punti sono in posizione generale se e solo se tutti i minori 3×3 della matrice M sono non degeneri, dove

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso, invece, il minore costituito dalle righe diverse dalla terza è degenere. Questo significa che i punti P_1, P_2, P_4 sono allineati: infatti appartengono tutti alla retta $r : \ y = 0$. Pertanto ogni conica C contenente tali punti deve contenere la retta r. Quindi $C = r \cup s$, dove s è una qualunque retta per P_3. Le coniche richieste costituiscono dunque un fascio degenere avente r come retta base e P_3 come punto base.

A questo punto si scrive l'equazione del fascio di rette di sostegno P_3:

$$\mathcal{F}_{P_3} : \quad \lambda x + \mu(y - 1) = 0$$

da cui il fascio di coniche richiesto ha equazione

$$y(\lambda x + \mu(y - 1)) = 0.$$

Teorema 9.12.14. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio degenere di coniche generato da due coniche degeneri C e D delle quali almeno $D = t^2$ è doppiamente degenere. Allora si ha uno e uno solo dei seguenti casi:*

i) *$C = r \cup s$ è semplicemente degenere e $P := r \cap s$. Allora $P \in D$. Inoltre - se C e D non hanno componenti comuni allora ogni conica $\Gamma \in \mathcal{F}$ è unione di due rette appartenenti a $\mathcal{G}_P$ e $\mathcal{F}$ ha come unico punto base P, contato 4 volte. - se C e D hanno una componente comune, ad esempio $C = r \cup t$, allora ogni conica $\Gamma \in \mathcal{F}$ è unione t e di una retta appartenente a $\mathcal{G}_P$. In particolare, $\mathcal{F}$ ha t come retta base.*

ii) *Anche $C = r^2$ è doppiamente degenere. Allora, posto $Q := t \cap r$, se $\Gamma \in \mathcal{F}$ allora Γ è unione di due rette appartenenti a $\mathcal{G}_Q$ e $\mathcal{F}$ ha come unico punto base Q, contato 4 volte.*

Per esercizio (analogo al precedente teorema).