

Note del Corso di GEOMETRIA 2
A.A. 2025/2026

Prof. Valentina Beorchia

Gennaio 2026

Indice

1	Spazi affini	4
1.1	Sottospazi affini e loro equazioni	7
1.1.1	Passaggio da equazioni parametriche a cartesiane	10
1.1.2	Passaggio da equazione cartesiane a parametriche	10
1.2	Intersezioni tra sottospazi affini	11
1.3	Sottospazi affini generati da punti	12
1.4	Parallelismo, incidenza e sghembità	14
1.5	Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo e incidenza tra piani	15
1.6	Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo, incidenza e sghembità tra rette nello spazio	17
1.7	Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo e incidenza tra una retta e un piano nello spazio	19
1.8	Fasci di iperpiani	20
2	Applicazioni affini e affinità	24
2.0.1	Isomorfismi affini	26
2.0.2	Gruppi di trasformazioni affini	28
2.1	Rappresentazioni numeriche di affinità	31
2.1.1	Affinità di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$	31
2.1.2	Affinità di uno spazio affine arbitrario	32
2.2	Proprietà affini	33
2.3	Sottospazi fissi e sottospazi invarianti per affinità	36
2.4	Proiezioni su sottospazi affini	37
3	Spazi affini reali	39
4	Il prodotto vettoriale	42

5	Geometria euclidea	45
5.1	Spazi vettoriali euclidei e unitari	45
5.2	Spazi affini euclidei	50
5.3	Angolo tra sottospazi euclidei	53
5.4	Distanze negli spazi affini euclidei	53
6	Isometrie	60
6.1	Isometrie e Matrici Ortogonali	60
6.2	Caratterizzazione delle matrici di $O(2, \mathbb{R})$	62
6.3	Forma normale per isometrie lineari	67
6.4	Isometrie lineari di \mathbb{R}^3	69
6.5	Isometrie degli spazi affini euclidei	70
6.6	Classificazione delle isometrie del piano	72
7	Geometria proiettiva	79
7.1	Motivazioni e considerazioni preliminari	79
7.2	Spazi proiettivi	82
7.3	Sottospazi proiettivi	84
7.4	Equazioni cartesiane per sottospazi proiettivi	88
7.5	Equazioni parametriche per sottospazi proiettivi	90
7.6	Fasci di iperpiani	92
7.7	Fasci proiettivizzati	95
7.8	Immersione dello spazio affine nello spazio proiettivo e chiusura proiettiva	96
	7.8.1 Chiusura proiettiva	100
8	Proiettività	105
	8.0.1 Rappresentazioni matriciali di proiettività	108
9	Coniche	113
9.1	Coniche nel piano euclideo	113
	9.1.1 Coniche come luoghi geometrici	113
	9.1.2 Equazione di una conica generale e sua forma matriciale	118
9.2	Forma canonica: traslazioni	120
9.3	Forma canonica: rotazioni	126
9.4	Classificazione delle coniche in \mathbb{E}^2	131
9.5	Studio di una conica in forma generale	138
9.6	Coniche nel piano affine	143
9.7	Punti singolari di una conica	149

9.8	Classificazione delle coniche affini	155
9.9	Coniche proiettive	161
9.10	Dualità e sistemi lineari	169
9.11	Fasci di coniche	174
9.12	Classificazione dei fasci di coniche	180

Capitolo 1

Spazi affini

Definizione 1.0.1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} . Uno spazio affine su V è un insieme non vuoto \mathbb{A} , i cui elementi si dicono i punti di \mathbb{A} , ed una funzione

$$\sigma : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V, \quad \sigma(P, R) = \overrightarrow{PR},$$

tale che valgano i seguenti assiomi:

(SA1) per ogni $P \in \mathbb{A}$ e per ogni $v \in V$, $\exists! R \in \mathbb{A}$ tale che $v = \overrightarrow{PR}$;

(SA2) per ogni terna di punti (non necessariamente distinti) $P, Q, R \in \mathbb{A}$ si ha $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Proposizione 1.0.2. *Dai due assiomi di spazio affine si hanno le seguenti proprietà:*

1. per ogni $P \in \mathbb{A}$ si ha $\overrightarrow{PP} = 0 \in V$;
2. per ogni $P, R \in \mathbb{A}$, si ha $\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR}$;
3. per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, la funzione $f_P : \mathbb{A} \rightarrow V$, $f_P(Q) = \overrightarrow{PQ}$ è una biiezione.

Dimostrazione. (1) Dall'assioma (SA2), ponendo $P = Q = R$, si ha

$$\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP},$$

e sommando ad entrambi i membri il vettore \overrightarrow{PP} si ha la tesi.

(2) Dall'assioma (SA2), ponendo $R = P$, si ha

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$$

per il primo punto, quindi \overrightarrow{QP} è il vettore opposto di \overrightarrow{PQ} .

(3) La tesi segue direttamente dall'assioma (SA1). □

Definizione 1.0.3. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Allora definiamo la dimensione di \mathbb{A} come

$$\dim \mathbb{A} := \dim V.$$

Se $\dim \mathbb{A} = 1$, allora \mathbb{A} si dice *retta affine*; se $\dim \mathbb{A} = 2$, allora \mathbb{A} si dice *piano affine*.

Proposizione 1.0.4. Se \mathbb{A} è uno spazio affine su V , l'applicazione

$$t : \mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A} \quad \text{definita da} \quad (P, v) \mapsto Q : \overrightarrow{PQ} = v$$

verifica: $\forall P \in \mathbb{A}, \forall v, w \in V$ vale $t(t(P, v), w) = t(P, (v + w))$

Dimostrazione. Per SA1, fissati P e v , esiste un unico punto Q tale che $v = \overrightarrow{PQ}$. D'altra parte, per la stessa ragione, esiste un unico punto R tale che $w = \overrightarrow{QR}$. Pertanto

$$v + w = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

dove la seconda uguaglianza segue da (SA2). In conclusione si ha

$$t(t(P, v), w) = t(t(P, \overrightarrow{PQ}), w) = t(Q, w) = t(Q, \overrightarrow{QR}) = Rt(P, \overrightarrow{PR}) = t(P, \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = t(P, v + w).$$

come volevamo. □

Fissando il vettore v nel secondo fattore del dominio di t si ottiene una biiezione di \mathbb{A} come segue.

Definizione 1.0.5. Se \mathbb{A} è uno spazio affine su V e $v \in V$ è un vettore fissato, l'applicazione

$$t_v : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \quad \text{definita da} \quad P \mapsto t_v(P) := Q, \quad v = \overrightarrow{PQ}$$

si dice *traslazione di \mathbb{A} lungo v* .

Osservazione 1.0.6. Dato V spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{K} , possiamo definire una *struttura di spazio affine in V su se stesso*, ponendo:

$$\overrightarrow{vw} := w - v.$$

Si verifica facilmente che gli assiomi sono verificati.

Definizione 1.0.7. In particolare, se $V = \mathbb{K}^n$, una struttura di spazio affine su \mathbb{K}^n è data da:

$$\sigma : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \sigma((p_1, p_2, \dots, p_n), (q_1, q_2, \dots, q_n)) := \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ}.$$

Lo spazio affine così definito verrà indicato con il simbolo $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, e si dice *spazio affine standard*.

Vediamo ora come associare delle coordinate a un punto di uno spazio affine arbitrario. Useremo la nozione di coordinate di un vettore in una base, e per fare ciò dobbiamo fissare un punto, che chiameremo origine.

Definizione 1.0.8. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su uno spazio vettoriale V . Un *riferimento affine* per \mathbb{A} è il dato di:

- un punto $O \in \mathbb{A}$;
- una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di V .

Il punto O si dice *origine del riferimento*.

Dato un punto $P \in \mathbb{A}$ qualsiasi, possiamo definire le *coordinate di P* come le coordinate del vettore \overrightarrow{OP} nella base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, cioè se

$$\overrightarrow{OP} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n,$$

definiamo l' n -upla (a_1, a_2, \dots, a_n) come le coordinate di P .

Convenzione 1.0.9. Per distinguere le coordinate di vettori dalle coordinate di punti di spazi affini, useremo la seguente notazione:

- le coordinate di un vettore verranno indicate in colonna: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$;
- le coordinate di un punto verranno indicate in riga: (b_1, b_2, \dots, b_n) .

Esempio 1.0.10. Se \mathbb{A} è una retta affine, un riferimento affine è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ e da un vettore non nullo $v \in V$.

Se \mathbb{A} è un piano affine, un riferimento affine è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ e da due vettori non nulli e non proporzionali $v_1, v_2 \in V$.

Definizione 1.0.11. In $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ possiamo scegliere il seguente riferimento:

- il punto $O \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ di componenti nulle $O = (0, \dots, 0)$;
- la base canonica di \mathbb{K}^n :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo riferimento si dice *riferimento affine canonico* di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

1.1 Sottospazi affini e loro equazioni

Definizione 1.1.1. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su V . Fissati

- un punto $Q \in \mathbb{A}$, e
- un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$,

il *sottospazio affine passante per Q e parallelo a W* è il sottoinsieme di \mathbb{A} definito da

$$S = \{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} \in W\}.$$

Il sottospazio $W \subseteq V$ si chiama *giacitura di S* .

Dalla definizione seguono subito le seguenti proprietà:

Proposizione 1.1.2. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su V . Si ha:

1. se S è un sottospazio affine passante per Q e di giacitura W , allora $Q \in S$.
2. Per ogni coppia di punti $P_1, P_2 \in S$, si ha $\overrightarrow{P_1P_2} \in W$.
3. S ha una struttura di spazio affine su W .

Definizione 1.1.3. Sia $S \subseteq A$ un sottospazio affine di giacitura W . Definiamo

$$\dim S := \dim W.$$

Se $\dim S = \dim A - 1$, allora S si dice *iperpiano* di A .

Vediamo ora che riscrivendo la definizione di sottospazio affine in coordinate, possiamo descrivere i sottospazi affini tramite equazioni parametriche.

Osservazione 1.1.4. Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ sottospazio affine passante per un punto $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ e di giacitura $W \subseteq \mathbb{K}^n$. Sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base del sottospazio vettoriale W . Fissiamo le componenti dei vettori w_i (come elementi di \mathbb{K}^n)

$$w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad w_m = \begin{pmatrix} w_{1m} \\ w_{2m} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{pmatrix}.$$

Allora abbiamo

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S \iff \overrightarrow{QP} \in W \iff \exists t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{K} : \overrightarrow{QP} = t_1 w_1 + t_2 w_2 + \dots + t_m w_m.$$

Definizione 1.1.5. Usando le stesse notazioni di cui sopra, le equazioni

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_m w_{1m} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \dots + t_m w_{2m} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_m w_{nm} \end{cases}$$

si dicono *equazioni parametriche* di S .

Osservazione 1.1.6. Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ può essere descritto da diversi sistemi di equazioni parametriche. Più precisamente, abbiamo che un sottospazio affine è univocamente determinate dalla sua giacitura e da uno qualsiasi dei suoi punti (esercizio).

Le equazioni parametriche non sono l'unico modo di codificare un sottospazio affine. Infatti, può essere anche assegnato mediante equazioni cartesiane nel modo seguente.

Teorema 1.1.7. Sia $A \cdot x = b$ un sistema di equazioni lineari di ordine n a coefficienti nel campo \mathbb{K} . Se $A \cdot x = b$ è compatibile, allora l'insieme delle sue soluzioni

$$S = \{s \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot s = b\}$$

è un sottospazio affine di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ la cui giacitura è il sottospazio vettoriale W di \mathbb{K}^n formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato:

$$W = \{s \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot s = 0\}.$$

In tal caso $\dim(S) = n - \text{rk}(A)$, e per ogni $s \in S$, il sottoinsieme S coincide con il sottospazio affine di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ passante per s e parallelo a W .

Dimostrazione. Poiché il sistema lineare è compatibile, S non è vuoto. Sia dunque \tilde{s} una sua soluzione. Per il teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, ogni altra soluzione s si può scrivere nella forma

$$s = \tilde{s} + w, \quad w \in W.$$

Quindi si ha

$$s \in S \iff s - \tilde{s} \in W.$$

Per definizione, S risulta il sottospazio affine di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ passante per \tilde{s} di giacitura W . Infine, per il Teorema di Dimensione, $\dim W = n - \text{rk}(A) = \dim S$. \square

Definizione 1.1.8. Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un sottospazio affine. Un sistema di equazioni cartesiane per S è un qualunque sistema di equazioni lineari $Ax = b$, tale che

$$S = \{s \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid A \cdot s = b\}.$$

Osservazione 1.1.9. (1) Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ può essere descritto da diversi sistemi di equazioni cartesiane.

Infatti, se $S = \{s \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid A \cdot s = b\}$, allora per ogni sistema di equazioni lineari $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ equivalente ad $A \cdot x = b$, le equazioni di $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ sono delle equazioni cartesiane per S .

(2) Sia $A \cdot x = b$ un sistema di equazioni cartesiane per il sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Allora il punto $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ appartiene a S se e solo se $b = 0$, cioè se e solo se il sistema di equazioni lineari è omogeneo.

1.1.1 Passaggio da equazioni parametriche a cartesiane

Vediamo ora che in realtà tutti i sottospazi affini ammettono delle equazioni cartesiane, e che esse possono essere ottenute dalle equazioni parametriche.

Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un sottospazio affine dato dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \cdots + t_m w_{1m} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \cdots + t_m w_{2m} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \cdots + t_m w_{nm} \end{cases}$$

Ricordiamo che un punto $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ appartiene a S se e solo se il vettore

$$\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \in \text{Span} \left(\begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} w_{1m} \\ w_{2m} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{pmatrix} \right),$$

e ciò succede se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1m} & x_1 - q_1 \\ w_{21} & \cdots & w_{2m} & x_2 - q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nm} & x_n - q_n \end{pmatrix}$$

ha rango m . Mettendo la matrice a scala, la condizione si traduce nell'annullamento delle ultime $n - m$ entrate dell'ultima colonna.

1.1.2 Passaggio da equazione cartesiane a parametriche

Vediamo ora come passare da equazioni cartesiane ad equazioni parametriche.

Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un sottospazio affine dato dalle equazioni cartesiane $A \cdot x = b$.

Per trovare delle equazioni parametriche per S , si risolve il sistema di equazioni lineari $A \cdot x = b$, esprimendo le sue soluzioni in funzione di opportune variabili libere t_1, \dots, t_m , che equivale a trovare una soluzione particolare Q di $Ax = b$, ed una base w_1, \dots, w_m dello spazio W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $A \cdot x = 0$, in modo che

$$S = Q + W = Q + t_1 w_1 + \cdots + t_m w_m,$$

al variare di $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K}$.

1.2 Intersezioni tra sottospazi affini

In questa sezione vedremo che data una famiglia arbitraria di sottospazi affini di un dato spazio affine \mathbb{A} , se la loro intersezione è non vuota, allora essa risulta un sottospazio affine, con giacitura data dalle intersezioni delle giaciture della famiglia.

La situazione è, quindi, analoga all'intersezione di una famiglia di sottospazi vettoriali, con la differenza che sottospazi vettoriali si intersecano sempre almeno nel vettore nullo.

Proposizione 1.2.1. *Sia $\{S_i\}_{i \in I}$ una famiglia arbitraria di sottospazi affini di \mathbb{A} , dove I è un insieme arbitrario di indici, e siano $\{W_i\}_{i \in I}$ le relative giaciture.*

Allora per $\bigcap_{i \in I} S_i$ si hanno due casi:

1. $\bigcap_{i \in I} S_i = \emptyset$, oppure
2. $\bigcap_{i \in I} S_i = S \neq \emptyset$, con $S \subset \mathbb{A}$ sottospazio affine di giacitura $W = \bigcap_{i \in I} W_i$.

Dimostrazione. Se $\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$, sia $Q \in \bigcap_{i \in I} S_i$; allora il sottospazio affine S passante per Q e con giacitura $W = \bigcap_{i \in I} W_i$ verifica per costruzione

$$S \subseteq \bigcap_{i \in I} S_i.$$

Per l'inclusione opposta, sia $P \in \bigcap_{i \in I} S_i$, $P \neq Q$; allora il vettore $\overrightarrow{QP} \in W_i$ per ogni $i \in I$, quindi $\overrightarrow{QP} \in W$ e $\bigcap_{i \in I} S_i \subseteq S$. □

Come conseguenza abbiamo la cosiddetta Formula di Grassmann affine:

Corollario 1.2.2 (Formula di Grassmann per sottospazi affini). *Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{A}$ due sottospazi affini di uno spazio affine \mathbb{A} di dimensione finita $\dim \mathbb{A} = n$.*

Se $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, allora

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - n, \quad (1.2.1)$$

dove $L(S_1, S_2)$ indica il più piccolo sottospazio affine contenente $S_1 \cup S_2$.

Vediamo ora un criterio che ci permette di dire quando due sottospazi affini si intersecano.

Proposizione 1.2.3. *Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{A}$ due sottospazi affini con giaciture $W_1, W_2 \subset V$. Allora si ha*

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \iff \forall Q_1 \in S_1, \forall Q_2 \in S_2, \text{ si ha } \overrightarrow{Q_1 Q_2} \in W_1 + W_2.$$

Dimostrazione. Supponiamo $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, e sia $P \in S_1 \cap S_2$. Scelti $Q_1 \in S_1$ e $Q_2 \in S_2$ arbitrari, si ha

$$\overrightarrow{Q_1 Q_2} = \overrightarrow{Q_1 P} + \overrightarrow{P Q_2} = w_1 + w_2,$$

con $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$.

Viceversa, se per ogni coppia di punti $Q_1 \in S_1$ e $Q_2 \in S_2$ si ha $\overrightarrow{Q_1 Q_2} \in W_1 + W_2$, allora esistono due vettori $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ tali che

$$\overrightarrow{Q_1 Q_2} = w_1 + w_2.$$

Per il primo assioma SA1 di spazio affine, esiste un unico $P \in \mathbb{A}$ tale che

$$\overrightarrow{Q_1 P} = w_1;$$

siccome $w_1 \in W_1$, che è la giacitura di S_1 , si ha $P \in S_1$. Inoltre, possiamo scrivere

$$w_1 + w_2 = \overrightarrow{Q_1 Q_2} = \overrightarrow{Q_1 P} + \overrightarrow{P Q_2} = w_1 + \overrightarrow{P Q_2},$$

da cui troviamo che $w_2 = \overrightarrow{P Q_2}$ e quindi si ha anche $P \in S_2$. □

1.3 Sottospazi affini generati da punti

Sia \mathbb{A} uno spazio affine su uno spazio vettoriale V . e siano $T_0, \dots, T_m \in \mathbb{A}$ dei punti distinti.

Definizione 1.3.1. Indichiamo con

$$L(T_0, \dots, T_m) \subseteq \mathbb{A}$$

il più piccolo sottospazio affine contenente i punti T_0, \dots, T_m , e viene detto *sottospazio affine generato da T_0, \dots, T_m* .

Il sottospazio $L(T_0, \dots, T_m)$ si può ottenere come intersezione di tutti i sottospazi affini contenenti $\{T_0, \dots, T_m\}$.

Proposizione 1.3.2. Dati $T_0, \dots, T_m \in \mathbb{A}$, il sottospazio affine $L(T_0, \dots, T_m)$ è determinato da T_0 e dalla giacitura

$$W = \text{Span}(\overrightarrow{T_0 T_1}, \overrightarrow{T_0 T_2}, \dots, \overrightarrow{T_0 T_m}).$$

In particolare si ha

$$\dim L(T_0, \dots, T_m) = \dim W \leq m.$$

Dimostrazione. Per definizione di sottospazio affine, i vettori $\overrightarrow{T_0T_i}$ devono appartenere alla giacitura di $L(T_0, \dots, T_m)$, quindi la giacitura di ogni sottospazio affine che lo contiene contiene W . \square

Osservazione 1.3.3. Per determinare $L(T_0, \dots, T_m)$ possiamo fissare un punto qualsiasi T_i invece di T_0 , e allora la giacitura sarà data da

$$W = \text{Span}(\overrightarrow{T_iT_1}, \overrightarrow{T_iT_2}, \dots, \overrightarrow{T_iT_m}).$$

Definizione 1.3.4. Se $\dim L(T_0, \dots, T_m) = 1$, allora i punti T_0, \dots, T_m si dicono *allineati*.

Definizione 1.3.5. Quando $\dim L(T_0, \dots, T_m) = m$, cioè la massima possibile, allora i punti si dicono *affinemente indipendenti*.

Osservazione 1.3.6. Se T_0, T_1 sono due punti distinti, allora $\dim L(T_0, T_1) = 1$, cioè per due punti in uno spazio \mathbb{A} qualsiasi passa sempre una retta. Abbiamo ritrovato così il primo postulato della Geometria Euclidea.

Possiamo anche affermare che tale retta è unica, in quanto abbiamo visto nelle sezioni precedenti che due rette distinte si intersecano al più in un punto.

Osservazione 1.3.7. Per tre punti non allineati T_0, T_1, T_2 passa un unico piano affine.

Infatti, in questo caso i vettori $\overrightarrow{T_0T_1}$ e $\overrightarrow{T_0T_2}$ risultano non proporzionali, quindi linearmente indipendenti, e $\dim L(T_0, T_1, T_2) = 2$.

Terminiamo con il seguente.

Proposizione 1.3.8. *Dati un sottospazio affine $S \subset \mathbb{A}$ e un punto $P \in \mathbb{A}$, esiste un unico sottospazio affine $S' \subset \mathbb{A}$ tale che*

$$P \in S', \quad \dim S = \dim S', \quad S' \parallel S.$$

Dimostrazione. L'enunciato segue dal fatto che S' è determinato da P e dal fatto di avere la stessa giacitura W_S di S . \square

Osservazione 1.3.9. Se $\dim S = 1$, l'enunciato appena visto si traduce nel quinto postulato di Euclide, sull'esistenza di un'unica retta parallela a una retta data e passante per un punto assegnato.

1.4 Parallelismo, incidenza e sghembità

Definizione 1.4.1. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su uno spazio vettoriale V , e siano $S_1 \subseteq \mathbb{A}$, $S_2 \subseteq \mathbb{A}$ due sottospazi affini di giaciture W_1 e W_2 rispettivamente.

- S_1 e S_2 si dicono *paralleli*, in simboli

$$S_1 \parallel S_2,$$

se

$$W_1 \subseteq W_2 \text{ oppure } W_2 \subseteq W_1;$$

- S_1 e S_2 si dicono *incidenti* se

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset;$$

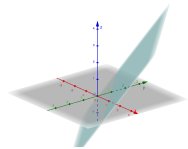
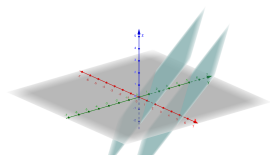
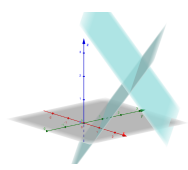
- S_1 e S_2 si dicono *sghembi* se non sono nè paralleli nè incidenti.

1.5 Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo e incidenza tra piani

Consideriamo due piani π, π' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni cartesiane:

$$\pi : ax + by + cz = d, \quad \pi' : a'x + b'y + c'z = d'.$$

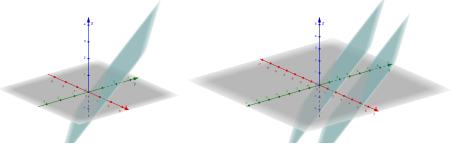
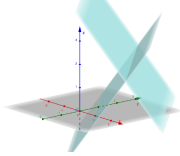
Allora si ha:

$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$	$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$	posizione	
1	1	$\pi \parallel \pi', \pi = \pi'$	
1	2	$\pi \parallel \pi', \pi \cap \pi' = \emptyset$	
2	2	$\pi \not\parallel \pi', \dim \pi \cap \pi' = 1$	

Consideriamo due piani π, π' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni parametriche:

$$\pi : \begin{cases} x = Q_1 + l_1 t_1 + l_2 t_2 \\ y = Q_2 + m_1 t_1 + m_2 t_2 \\ z = Q_3 + n_1 t_1 + n_2 t_2 \end{cases} \quad \pi' : \begin{cases} x = T_1 + o_1 s_1 + o_2 s_2 \\ y = T_2 + u_1 s_1 + u_2 s_2 \\ z = T_3 + w_1 s_1 + w_2 s_2 \end{cases}$$

Allora si ha:

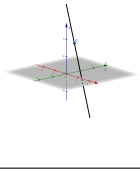
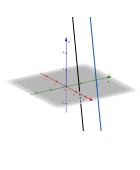
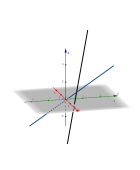
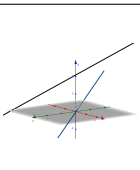
rk $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & o_1 & o_2 \\ m_1 & m_2 & u_1 & u_2 \\ n_1 & n_2 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$	posizione	
2	$\pi \parallel \pi', \pi = \pi'$ oppure $\pi \cap \pi' = \emptyset$	
3	$\pi \not\parallel \pi', \dim \pi \cap \pi' = 1$	

1.6 Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo, incidenza e sghembità tra rette nello spazio

Consideriamo due rette r, r' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} ex + fy + gz = h \\ e'x + f'y + g'z = h' \end{cases}.$$

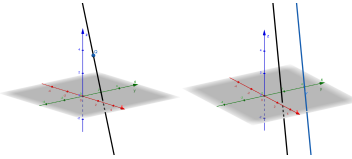
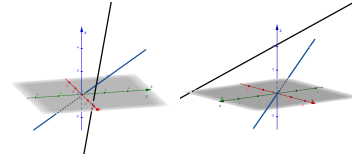
Allora si ha:

$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix}$	$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix}$	posizione	
2	2	$r \parallel s, r = s$	
2	3	$r \parallel s, r \cap s = \emptyset$	
3	3	$r \nparallel s, r \cap s = \{R\}$	
3	4	$r \nparallel s, r \cap s = \emptyset$	

Consideriamo due rette r, r' nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = Q_1 + lt \\ y = Q_2 + mt \\ z = Q_3 + nt \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = T_1 + os \\ y = T_2 + us \\ z = T_3 + ws \end{cases}$$

Allora si ha:

rk $\begin{pmatrix} l & o \\ m & u \\ n & w \end{pmatrix}$	posizione	
1	$r \parallel r', r = r'$ oppure $r \cap r' = \emptyset$	
2	$r \not\parallel r', r \cap r' = \{R\}$ un punto oppure $r \cap r' = \emptyset$	

1.7 Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo e incidenza tra una retta e un piano nello spazio

Consideriamo una retta r e un piano π nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}, \quad \pi : ex + fy + gz = h.$$

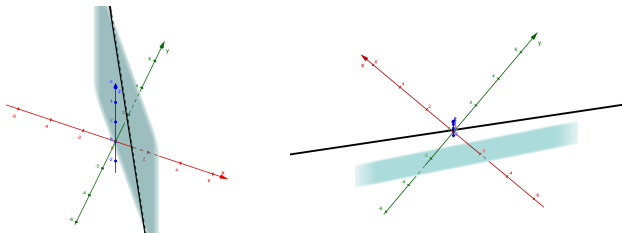
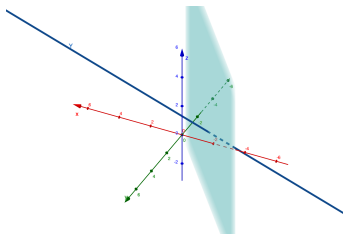
Allora si ha:

$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \end{pmatrix}$	$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$	posizione	
2	2	$r \parallel \pi, r \subseteq \pi$	
2	3	$r \parallel \pi, r \cap \pi = \emptyset$	
3	3	$r \not\parallel \pi, r \cap \pi = \{R\}$	

Consideriamo una retta r e un piano π nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = Q_1 + lt \\ y = Q_2 + mt \\ z = Q_3 + nt \end{cases} \quad \pi : \begin{cases} x = T_1 + o_1s_1 + o_2s_2 \\ y = T_2 + u_1s_1 + u_2s_2 \\ z = T_3 + w_1s_1 + w_2s_2 \end{cases}$$

Allora si ha:

rk $\begin{pmatrix} l & o_1 & o_2 \\ m & u_1 & u_2 \\ n & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$	posizione	
2	$r \parallel \pi, r \subseteq \pi$ oppure $r \cap \pi = \emptyset$	
3	$r \not\parallel \pi, r \cap \pi = \{R\}$ un punto	

1.8 Fasci di iperpiani

Sia \mathbb{A} uno spazio affine su un \mathbb{K} -spazio vettoriale V , di dimensione finita n .

Ricordiamo che un iperpiano affine H in \mathbb{A} è, per definizione, un sottospazio affine di dimensione $\dim H = \dim \mathbb{A} - 1$.

Definizione 1.8.1. Siano $H, H' \subset \mathbb{A}$ due iperpiani affini, distinti, di equazioni cartesiane

$$H : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \quad H' : c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d = 0.$$

Si dice *fascio di iperpiani generato da H e H'* la famiglia Λ di iperpiani di \mathbb{A} il cui generico iperiano ha equazione cartesiana

$$\Lambda : \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + \mu(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0,$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sono due parametri liberi.

Osservazione 1.8.2. Siccome un'equazione cartesiana di un iperpiano è definita a meno di un fattore di proporzionalità, possiamo considerare due sottofamiglie di Λ , dipendenti da un unico parametro $t \in \mathbb{K}$, così definite:

- se $\lambda \neq 0$, il generico piano ha anche equazione

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + \frac{\lambda}{\mu}(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0.$$

Ponendo $t := \frac{\lambda}{\mu}$, il generico piano ha equazione $(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + t(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0$. Osserviamo che in questa famiglia manca un unico piano di Λ , quello relativo a $\lambda = 0$, che corrisponde al piano H' .

- se $\mu \neq 0$, il generico piano ha anche equazione

$$\frac{\mu}{\lambda}(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + (c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0.$$

Ponendo $t := \frac{\mu}{\lambda}$, il generico piano ha equazione $t(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + (c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0$. Osserviamo che in questa famiglia manca un unico piano di Λ , quello relativo a $\mu = 0$, che corrisponde al piano H .

Vediamo ora come si intersecano gli iperpiani appartenenti a un fascio.

Proposizione 1.8.3. *Siano $H, H' \subset \mathbb{A}$ due iperpiani distinti. Allora si hanno due casi:*

1. $H \parallel H'$; in questo caso $H \cap H' = \emptyset$;
2. $\dim H \cap H' = \dim \mathbb{A} - 2 = n - 2$.

Dimostrazione. Se $H \parallel H'$ sappiamo dalla teoria generale che i due iperpiani non si intersecano.

Supponiamo quindi $H \not\parallel H'$ e siano

$$H : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \quad H' : c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d = 0.$$

delle loro equazioni cartesiane. Per la condizione di non parallelismo, le loro giaciture sono diverse, quindi il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0 \end{cases}$$

ha la matrice dei coefficienti A di rango 2. Ciò implica che anche la matrice completa associata al sistema lineare

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d = 0 \end{cases}$$

ha rango 2, e per il Teorema di Rouché - Capelli, l'insieme delle soluzioni corrisponde a un sottospazio affine di dimensione $n - \text{rg}A = n - 2$. \square

Proposizione 1.8.4. *Siano $H, H' \subset \mathbb{A}$ due iperpiani distinti, sia $\dim \mathbb{A} = n$, e sia Λ il fascio di iperpiani generato da H e H' . Allora si ha:*

1. se $H \parallel H'$, ogni iperpiano $M \in \Lambda$ soddisfa

$$M \parallel H.$$

Un tale fascio si chiama fascio improprio.

Inoltre, se un iperpiano $L \parallel H$, allora $L \in \Lambda$.

2. Se $S = H \cap H'$ con $\dim S = n - 2$, allora per ogni $M \in \Lambda$ si ha

$$M \supset S.$$

Un tale fascio si chiama fascio proprio.

Inoltre, ogni iperpiano $L \supset S$ verifica $L \in \Lambda$.

Dimostrazione. 1. Se $\parallel H'$, possiamo scrivere le equazioni cartesiane dei due iperpiani nella forma

$$H : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \quad H' : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + d = 0, \quad b \neq d.$$

Il generico iperpiano di Λ ha dunque equazione

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b) + \mu(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + d) = 0,$$

quindi

$$(\lambda + \mu)(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) + \lambda b + \mu d = 0,$$

e vediamo che la parte omogenea dell'equazione è proporzionale alla parte omogenea dell'equazione di H , pertanto hanno la stessa giacitura.

Infine, se L è un iperpiano parallelo ad H , possiamo scrivere una sua equazione cartesiana nella forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + k = 0,$$

per un opportuno $k \in \mathbb{K}$. Se poniamo (λ, μ) la coppia che soddisfa

$$\lambda + \mu = 1, \lambda b + \mu d = k,$$

vediamo che L appartiene a Λ .

2. È chiaro che tutti i punti le cui coordinate sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d = 0 \end{cases}$$

annullano anche l'equazione del generico iperpiano del fascio.

Infine, se $L \supset S$ è un iperpiano arbitrario contenente S , fissiamo un punto $Q \in L \setminus S$, e fissiamo $n - 1$ punti affinementemente indipendenti di S :

$$Q_1, \cdots, Q_{n-1}.$$

Osserviamo che per costruzione

$$Q, Q_1, \cdots, Q_{n-1}$$

sono ora n punti affinementemente indipendenti.

Consideriamo il generico iperpiano di Λ e imponiamo il passaggio per $Q(q_1, \cdots, q_n)$; otteniamo la relazione

$$\lambda(a_1q_1 + a_2q_2 + \cdots + a_nq_n + b) + \mu(c_1q_1 + c_2q_2 + \cdots + c_nq_n + d) = 0.$$

Siccome $Q \notin H \cap H'$, le sue coordinate non annullano entrambe le loro equazioni; l'iperpiano del fascio passante per Q è ottenuto quindi in corrispondenza della coppia

$$(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = (-(c_1q_1 + c_2q_2 + \cdots + c_nq_n + d), (a_1q_1 + a_2q_2 + \cdots + a_nq_n + b)),$$

o di una qualunque coppia proporzionale a questa. Tale iperpiano contiene gli n punti affinementemente indipendenti Q, Q_1, \cdots, Q_{n-1} , è quindi univocamente determinato e coincide con L .

□

Capitolo 2

Applicazioni affini e affinità

Avendo introdotto la struttura geometrica di spazio affine, consideriamo ora le applicazioni tra spazi affini che conservano la struttura, ovvero che mandano sottospazi affini in sottospazi affini (non necessariamente della stessa dimensione). Queste mappe verranno chiamate applicazioni (o trasformazioni) affini.

Definizione 2.0.1. Siano V e V' due \mathbb{K} -spazi vettoriali e siano \mathbb{A} e \mathbb{A}' due spazi affini, rispettivamente su V e V' .

Diciamo che una applicazione

$$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$$

è una *applicazione affine* se esiste un'applicazione \mathbb{K} -lineare

$$\varphi : V \rightarrow V',$$

detta *parte lineare* di f , tale che, per ogni $P, Q \in \mathbb{A}$, vale

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}).$$

In particolare, se f è biettiva, anche φ è biettiva, quindi è un isomorfismo di spazi vettoriali, e diremo che f è un' *affinità* o un *isomorfismo affine*. In tal caso, \mathbb{A} e \mathbb{A}' si dicono *isomorfi* e scriveremo

$$\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'.$$

Osservazione 2.0.2. Dalle definizione è chiaro che data una trasformazione affine f , la parte lineare φ è univocamente determinata.

Osservazione 2.0.3. Lo spazio affine standard $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ si può immergere come sottospazio affine in $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^m$ per ogni $m > n$, ad esempio mediante l'applicazione affine iniettiva

$$j : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$$

definita da

$$j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Nel caso particolare $n = 1$ e $m = 2$, si ottiene l'inclusione della retta affine \mathbb{A}^1 nel piano $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ mediante $x \mapsto (x, 0) \forall x \in \mathbb{A}^1$, cioè si ottiene la retta rappresentata dall'asse x .

Osservazione 2.0.4. Un sistema di equazioni parametriche per un sottospazio affine $S \subset \mathbb{A}^n$ di dimensione k determina un'applicazione affine iniettiva (*immersione affine*)

$$f : \mathbb{A}^k \rightarrow \mathbb{A}^n,$$

con $f(\mathbb{A}^k) = S$.

Infatti, se S ha equazioni

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_k w_{1k} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \dots + t_k w_{2k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

l'applicazione

$$f(t_1, \dots, t_k) = (q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_k w_{1k}, \dots, q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_k w_{nk})$$

ha come parte lineare l'applicazione data dalla moltiplicazione per la matrice

$$A = (w_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k}.$$

Notazione 2.0.5. Indicheremo con $\mathcal{L}(V, V')$, oppure con $\text{Hom}(V, V')$, lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari tra due spazi vettoriali V e V' .

Lemma 2.0.6. Fissati due punti arbitrari $O \in \mathbb{A}$ e $O' \in \mathbb{A}'$, per ogni $\varphi \in \mathcal{L}(V, V')$ esiste un'unica trasformazione affine

$$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$$

tale che $f(O) = O'$ e con parte lineare φ .

Dimostrazione. Per ogni $P \in \mathbb{A}$, consideriamo il vettore $\varphi(\overrightarrow{OP}) \in V'$, e poniamo $f(P) \in \mathbb{A}'$ uguale all'unico punto tale che

$$\varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O'f(P)}.$$

In particolare, abbiamo che

$$\varphi(\overrightarrow{OO}) = \varphi(0) = 0 = \overrightarrow{O'f(O)},$$

quindi $f(O) = O'$.

L'applicazione f risulta una trasformazione affine per costruzione, ed è unica. Infatti, se $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ è un'altra trasformazione affine tale che

$$g(O) = O',$$

con parte lineare φ , si ha per ogni $P \in \mathbb{A}$

$$\overrightarrow{O'g(P)} = \overrightarrow{g(O)g(P)} = \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O'f(P)},$$

e per l'assioma (SA1) si ha

$$g(P) = f(P).$$

□

2.0.1 Isomorfismi affini

Analizziamo ora nel dettaglio l'insieme degli isomorfismi affini.

Proposizione 2.0.7. *Se $\mathbb{A}, \mathbb{A}', \mathbb{A}''$ sono spazi affini, allora valgono:*

- i) *l'applicazione identica $id_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ (la cui parte lineare è $\varphi = id_V$) è un isomorfismo affine;*
- ii) *se $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ è un isomorfismo allora anche $f^{-1} : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}$ è un isomorfismo;*
- iii) *se $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ e $g : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}''$ sono applicazioni affini, allora anche l'applicazione $g \circ f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}''$ è affine, la cui parte lineare è composizione delle due parti lineari.*

In particolare, la composizione di isomorfismi affini è anch'essa un isomorfismo.

Dimostrazione. Il punto i) è immediato.

ii) Sia $\varphi : V \rightarrow V'$ la parte lineare di f . Affermiamo che φ^{-1} è la parte lineare di f^{-1} , cioè che per ogni coppia $P', Q' \in \mathbb{A}'$, vale

$$\overrightarrow{f^{-1}(P')f^{-1}(Q')} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{P'Q'}).$$

Consideriamo i punti $f^{-1}(Q'), f^{-1}(P') \in \mathbb{A}$. Essendo f una applicazione affine si ha

$$\overrightarrow{\varphi(f^{-1}(P')f^{-1}(Q'))} = \overrightarrow{f(f^{-1}(P')) f(f^{-1}(Q'))} = \overrightarrow{P'Q'}$$

Applicando φ^{-1} ad ambo i membri, si ottiene la tesi.

iii): Bisogna provare che, comunque scelte applicazioni affini f, g , poste φ e ψ le rispettive parti lineari, allora la parte lineare di $f \circ g$ è $\varphi \circ \psi$.

Per la Definizione, questo equivale a provare che, per ogni $P, Q \in \mathbb{A}$ si verifica

$$\overrightarrow{(f \circ g)(P) (f \circ g)(Q)} = (\varphi \circ \psi)(\overrightarrow{PQ}).$$

Poiché f ha come parte lineare φ e g ha come parte lineare ψ , si ottengono le uguaglianze

$$\overrightarrow{f(g(P)) f(g(Q))} = \varphi(\overrightarrow{g(P) g(Q)}) = \varphi(\psi(\overrightarrow{PQ})),$$

come si voleva. □

Esempio 2.0.8. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su V e sia $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_n)$ una base di V . Scelto $O \in \mathbb{A}$, si consideri il riferimento affine $\Sigma = (O; v_1, \dots, v_n)$.

Consideriamo l'applicazione

$$f_{\mathcal{B}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_K^n \quad \text{data da} \quad P(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n),$$

che ad ogni punto associa la n -upla delle coordinate rispetto a Σ , è un isomorfismo affine con parte lineare

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Infatti, dati P di coordinate (x_1, \dots, x_n) e Q di coordinate (y_1, \dots, y_n) in \mathbb{A} , per definizione si ha che

$$\overrightarrow{OP} = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OQ} = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n.$$

Inoltre vale

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (y_1 - x_1)v_1 + \dots + (y_n - x_n)v_n.$$

Pertanto, $\varphi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PQ}) = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) \in \mathbb{K}^n$.

D'altro canto, $f(P) = (x_1, \dots, x_n)$ e $f(Q) = (y_1, \dots, y_n)$, e

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{Of(Q)} - \overrightarrow{Of(P)} = (y_1, \dots, y_n) - (x_1, \dots, x_n) = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) = \varphi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PQ})$$

e questo significa che $f_{\mathcal{B}}$ è una applicazione affine e $\varphi_{\mathcal{B}}$ è la sua parte lineare.

Infine, si verifica facilmente che $\varphi_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo.

Osservazione 2.0.9. Dall'esempio precedente segue che ogni spazio affine di dimensione n su \mathbb{K} è isomorfo (non canonicamente, l'isomorfismo dipende dalla scelta di una base) ad $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

Definizione 2.0.10. Un isomorfismo affine di uno spazio affine \mathbb{A} in sé si dice *affinità* di \mathbb{A} . In questo caso la parte lineare di f è un automorfismo φ di V , cioè $\varphi \in GL(V)$.

2.0.2 Gruppi di trasformazioni affini

Dalla Proposizione 2.0.7 segue facilmente il seguente fatto.

Proposizione 2.0.11. Sia \mathbb{A} uno spazio affine. Allora l'insieme

$$\text{Aff}(\mathbb{A}) := \{\text{affinità di } \mathbb{A}\}$$

è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.

Osservazione 2.0.12. È facile verificare che $\text{Aff}(\mathbb{A})$ non è un gruppo abeliano. Questo segue, ad esempio, dalla non abelità del gruppo $GL(V)$

Definizione 2.0.13. I sottogruppi di $\text{Aff}(\mathbb{A})$ si dicono *gruppi di trasformazioni affini*.

Vediamo ora alcuni gruppi di trasformazioni affini e come un'affinità qualunque si può fattorizzare come composizione di due affinità più semplici.

Cominciamo con il caratterizzare le traslazioni.

Teorema 2.0.14. Se \mathbb{A} è uno spazio affine su V allora le traslazioni di \mathbb{A} sono tutte e sole le affinità aventi come parte lineare id_V .

Dimostrazione. Si consideri la traslazione t_v lungo v , dove $v \in V$:

$$t_v : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \quad P \mapsto t_v(P) = Q : \overrightarrow{PQ} = v.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \overrightarrow{t_v(P)t_v(P')} &= \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = \\ &= -v + \overrightarrow{PP'} + v = \overrightarrow{PP'}. \end{aligned}$$

Pertanto t_v è una applicazione affine di parte lineare $\varphi = id_V$. Abbiamo visto in precedenza che t_v è biunivoca e quindi, essendo φ un isomorfismo di spazi vettoriali, è un isomorfismo affine. Quindi t_v è un'affinità.

Viceversa, se $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ è un'affinità e la sua parte lineare è id_V , allora per definizione, comunque scelti $P, Q \in \mathbb{A}$:

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{PQ}.$$

Pertanto, posto

$$v := \overrightarrow{Pf(P)}$$

si ha per ogni $Q \in \mathbb{A}$

$$\overrightarrow{Qf(Q)} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{Pf(P)} + \overrightarrow{f(P)f(Q)} = -\overrightarrow{PQ} + v + \overrightarrow{PQ} = v.$$

□

Osservazione 2.0.15. Abbiamo visto che l'insieme di tutte le traslazioni di uno spazio affine \mathbb{A} è un gruppo rispetto alla composizione; risulta quindi anche un sottogruppo di $\text{Aff}(\mathbb{A})$ e dunque un gruppo di trasformazioni affini, detto *sottogruppo delle traslazioni* e denotato con $T(\mathbb{A})$.

Osservazione 2.0.16. Se si fissa un punto $O \in \mathbb{A}$, si verifica facilmente che l'insieme delle affinità che lo fissano

$$\text{Aff}_O(\mathbb{A}) := \{f \in \text{Aff}(\mathbb{A}) \mid f(O) = O\}$$

è un sottogruppo di $\text{Aff}(\mathbb{A})$ e dunque è un altro gruppo di trasformazioni affini.

Dalla Proposizione 2.0.7 possiamo dedurre il seguente risultato.

Lemma 2.0.17. *L'applicazione*

$$\Phi_O : \text{Aff}_O(\mathbb{A}) \rightarrow GL(V) \tag{2.0.1}$$

che associa ad ogni affinità la sua parte lineare è un isomorfismo di gruppi, in cui le operazioni sono la composizione di applicazioni.

Più in generale, possiamo definire l'analoga applicazione riguardo ad una qualunque affinità; in altri termini, estendiamo Φ_O a tutto $\text{Aff}(\mathbb{A})$.

Teorema 2.0.18. *Sia \mathbb{A} uno spazio affine sullo spazio vettoriale V . Allora l'applicazione*

$$\Phi : \text{Aff}(\mathbb{A}) \rightarrow GL(V)$$

che associa ad ogni affinità la sua parte lineare è un omomorfismo di gruppi.

Inoltre $\ker(\Phi) = T(\mathbb{A})$, che è dunque un sottogruppo normale di $\text{Aff}(\mathbb{A})$.

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato segue direttamente dalla Proposizione 2.0.7.

Inoltre $\ker(\Phi)$ è costituito da tutte e sole le affinità con parte lineare identica e tale insieme è esattamente $T(\mathbb{A})$ per il Teorema 2.0.14. \square

Un'altra classe importante di affinità sono le *similitudini*, che risultano associate a applicazione lineari date da *omotetie* e che richiamiamo brevemente.

Definizione 2.0.19. Se V è un \mathbb{K} -spazio vettoriale e $c \in \mathbb{K}$, si dice *omotetia di rapporto c* l'applicazione lineare

$$\omega_c : V \rightarrow V \quad \omega_c(v) = cv, \quad \forall v \in V.$$

L'applicazione ω_c è un isomorfismo di \mathbb{K} -spazi vettoriali se e solo se $c \neq 0$, altrimenti è l'omomorfismo nullo, e la sua matrice associata in una base qualunque \mathcal{B} è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\omega_c) = c\mathbb{I}_n,$$

dove $n = \dim(V)$.

La nozione di omotetia può essere riletta nell'ambito della Geometria Affine attraverso l'isomorfismo Φ_O di (2.0.1) come segue.

Definizione 2.0.20. Con le notazioni precedenti, se $c \in \mathbb{K}^*$ e $O \in \mathbb{A}$, diciamo *omotetia di rapporto c e centro O* l'affinità

$$\omega_{c,O} := \Phi_O^{-1}(\omega_c)$$

cioè

$$\omega_{c,O} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} \quad \text{dove} \quad \overrightarrow{O \omega_{c,O}(P)} = c \overrightarrow{OP}.$$

In particolare, se $c = -1$, l'affinità $\omega_{-1,O}$ si dice *simmetria di centro O* e si denota anche con σ_O .

Vediamo ora un risultato fondamentale sulle affinità, che ci permette di fattorizzare ogni affinità come composizione di una traslazione e di una affinità con un punto fisso. Più precisamente:

Teorema 2.0.21 (Fattorizzazione di un'affinità). *Sia \mathbb{A} uno spazio affine sullo spazio vettoriale V e sia $O \in \mathbb{A}$ un punto fissato. Allora per ogni $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$*

i) esistono e sono unici $v \in V$ e $g \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$ tali che $f = g \circ t_v$;

ii) esistono e sono unici $w \in V$ e $h \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$ tali che $f = t_w \circ h$.

Dimostrazione. i) Definiamo il vettore

$$v := \overrightarrow{f^{-1}(O)O}$$

e consideriamo la corrispondente traslazione t_v . Questa è biunivoca e ha per inversa $t_v^{-1} = t_{-v}$. Poiché $\text{Aff}(\mathbb{A})$ è un gruppo, la composizione di affinità è ancora un'affinità; pertanto definiamo l'affinità

$$g := f \circ t_v^{-1}.$$

Resta solo da provare che $g \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$, cioè che $g(O) = O$. Dalla definizione

$$g(O) = f(t_v^{-1}(O)) = f(t_{-v}(O)) = f(f^{-1}(O)) = O.$$

Segue che $f = g \circ t_v$.

ii) Definiamo il vettore $w := \overrightarrow{Of(O)}$ e consideriamo la corrispondente traslazione t_w . Come prima, possiamo definire l'affinità

$$h := t_w^{-1} \circ f.$$

Resta solo da provare che $h \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$, cioè che $h(O) = O$. Dalla definizione

$$h(O) = t_w^{-1}(f(O)) = t_w^{-1}(t_w(O)) = O,$$

come volevamo. □

2.1 Rappresentazioni numeriche di affinità

Vogliamo ora determinare una rappresentazione di un'affinità in termini delle coordinate di un generico punto.

2.1.1 Affinità di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$

Per semplicità incominciamo con lo spazio affine standard $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

Sia $f : \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un'affinità con parte lineare φ . Sia

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

la matrice associata a φ nella base canonica \mathcal{E} , sia $O = (0, \dots, 0)$ e poniamo

$$C := f(O).$$

Dato $P \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ arbitrario, per definizione di affinità si ha

$$\overrightarrow{Cf(P)} = \overrightarrow{f(O)f(P)} = f(P) - f(O) = \varphi(P - O) = A \cdot (P - O) = A \cdot {}^tP.$$

Possiamo quindi scrivere

$${}^t f(P) = {}^t C + A \cdot {}^t P. \quad (2.1.1)$$

Viceversa, per ogni $A \in GL_n(\mathbb{K})$ e per ogni $C \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, l'applicazione

$$f_{A,C} : \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n, \quad f_{A,C}(P) = {}^t C + A \cdot {}^t P$$

è un'affinità.

Infatti, si ha

$$\overrightarrow{f_{A,C}(P)f_{A,C}(Q)} = f_{A,C}(Q) - f_{A,C}(P) = {}^t C + A \cdot {}^t Q - ({}^t C + A \cdot {}^t P) = A \cdot {}^t(Q - P),$$

quindi $f_{A,C}$ è un'affinità con parte lineare data dalla moltiplicazione per la matrice A .

Come conseguenza abbiamo il seguente risultato.

Proposizione 2.1.1. *Il gruppo delle affinità di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ ha per elementi:*

$$Aff_n(\mathbb{K}) = \{f_{A,C} : A \in GL_n(\mathbb{K}), C \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n\}.$$

Osservazione 2.1.2. In particolare le traslazioni in $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ si rappresentano come

$${}^t C(P) = {}^t C + {}^t P$$

2.1.2 Affinità di uno spazio affine arbitrario

Il caso generale è perfettamente analogo al caso $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$; fissiamo un riferimento affine

$$(O, v_1, \cdot, v_n).$$

Teorema 2.1.3. *Sia \mathbb{A} uno spazio affine su V e sia (O, v_1, \cdot, v_n) un riferimento affine. Allora ogni affinità f con automorfismo associato φ si esprime nella forma*

$$f(P(x_1, \dots, x_n)) = Q(y_1, \dots, y_n),$$

con

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^t C + A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

e $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Viceversa, ogni applicazione del tipo (2.1.2) è un'affinità di \mathbb{A} .

Corollario 2.1.4. Fissato un riferimento affine (O, v_1, \dots, v_n) di \mathbb{A} , l'applicazione

$$\text{Aff}(\mathbb{A}) \rightarrow \text{Aff}_n(\mathbb{K}), \quad f \mapsto f_{A,C} \text{ data da (2.1.2)}$$

è un isomorfismo di gruppi.

Osservazione 2.1.5. Si può dare una forma ancora più compatta dell'equazione (2.1.2) di un'affinità.

Osserviamo che i dati della matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ e del vettore $C \in \mathbb{K}^n$ possono essere inseriti in una matrice $(n+1) \times (n+1)$ nei seguenti due modi.

I) Siano $\bar{X} := {}^t(1, x_1, \dots, x_n)$ e $\bar{Y} := {}^t(1, y_1, \dots, y_n)$ e sia

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ c_n & & & \end{pmatrix}.$$

Allora l'equazione (2.1.2) è equivalente a

$$\bar{Y} = Q \bar{X}. \tag{2.1.3}$$

II) Siano $\tilde{X} := {}^t(x_1, \dots, x_n, 1)$ e $\tilde{Y} := {}^t(y_1, \dots, y_n, 1)$ e sia

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} & & & c_1 \\ & A & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora l'equazione (2.1.2) è equivalente a

$$\tilde{Y} = \tilde{Q} \tilde{X}. \tag{2.1.4}$$

2.2 Proprietà affini

Intendiamo con *proprietà affini* quelle proprietà (nozioni, relazioni, ecc.) che vengono mantenute attraverso un'affinità. In sintesi, in questo paragrafo vedremo che si conservano per affinità:

- essere un sottospazio affine;

- la dimensione di un sottospazio affine;
- essere un insieme di punti allineati;
- essere sottospazi paralleli.

In questa sezione \mathbb{A} denota uno spazio affine su un \mathbb{K} -spazio vettoriale V con $n = \dim(\mathbb{A}) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

Proposizione 2.2.1. *Sia $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ di parte lineare $\varphi \in GL(V)$. Se S è un sottospazio affine di giacitura W e passante per il punto P , allora $f(S)$ è il sottospazio affine di giacitura $\varphi(W)$ e passante per il punto $f(P)$.*

Dimostrazione. “ \subseteq ” Sia $Q \in S$ cioè $\overrightarrow{PQ} = w$ per un opportuno $w \in W$. Dalla definizione di applicazione affine si ha

$$\varphi(w) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} \in \varphi(W).$$

“ \supseteq ” Sia R tale che $\overrightarrow{f(P)R} \in \varphi(W)$, quindi esiste $w \in W$ tale che

$$\overrightarrow{f(P)R} = \varphi(w).$$

Per l’assioma (SA1) esiste un unico punto $Q \in \mathbb{A}$ tale che $w = \overrightarrow{PQ}$. Quindi $\varphi(w) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$. In conclusione

$$\varphi(w) = \overrightarrow{f(P)R} = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

quindi $R \in f(S)$. □

Corollario 2.2.2. *Se $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $S \subseteq \mathbb{A}$ è un sottospazio affine allora*

$$\dim f(S) = \dim S.$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione precedente si ha che la giacitura di S e quella di $f(S)$ sono sottospazi di V che risultano isomorfi tramite la parte lineare di f . □

Corollario 2.2.3. *Se $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $\{P_1, \dots, P_m\}$ è un un insieme di punti distinti allineati, allora anche*

$$\{f(P_1), \dots, f(P_m)\}$$

è un un insieme di punti distinti allineati.

Diremo, sinteticamente, che ogni affinità è una collineazione.

Dimostrazione. Sia L la retta contenente P_1, \dots, P_m . Poiché un'applicazione mantiene le inclusioni, si ha che $f(L)$ contiene $f(P_1), \dots, f(P_m)$. Dalla Proposizione proaff si ha che $f(L)$ è un sottospazio affine e, dal Corollario proaff2, segue in particolare che $\dim(f(L)) = 1$. \square

Corollario 2.2.4. *Se $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $S, S' \subseteq \mathbb{A}$ sono due sottospazi affini paralleli allora $f(S)$ e $f(S')$ sono sottospazi affini paralleli.*

Dimostrazione. Se S e S' hanno giaciture, rispettivamente, W e W' , per ipotesi si ha $W \subseteq W'$ (o $W \supseteq W'$). Quindi $\varphi(W) \subseteq \varphi(W')$ (o $\varphi(W) \supseteq \varphi(W')$). D'altro canto, dalla Proposizione 2.2.1, segue che la giacitura di $f(S)$ è $\varphi(W)$ e quella di $f(S')$ è $\varphi(W')$ e questo conclude la dimostrazione. \square

Definizione 2.2.5. Due sottoinsiemi X e X' di \mathbb{A} si dicono *affinamente equivalenti* se esiste un'affinità f di \mathbb{A} tale che $f(X) = X'$.

Abbiamo visto nel Corollario 2.2.2 che due sottospazi affinamente equivalenti hanno la stessa dimensione. Ora vediamo che vale anche il viceversa.

Proposizione 2.2.6. *Siano S e S' sottospazi affini di \mathbb{A} con $\dim(S) = \dim(S')$. Allora esiste $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ tale che $f(S) = S'$.*

Dimostrazione. Siano W e W' le giaciture di S e S' . Siccome per ipotesi si ha $\dim W = \dim W'$, esiste un isomorfismo lineare $\varphi : V \rightarrow V$ tale che $\varphi(W) = W'$; infatti, sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ è una base di W , consideriamo un suo completamento arbitrario a una base $\{w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ di V . Fissiamo analogamente una base $\{w'_1, \dots, w'_k\}$ di W' , e sia $\{w'_1, \dots, w'_k, v'_{k+1}, \dots, v'_n\}$ un completamento arbitrario a una base di V . Allora per il Teorema di determinazione di una applicazione lineare, esiste una unica $\varphi : V \rightarrow V$ tale che $\varphi(w_i) = w'_i$ e $\varphi(v_i) = v'_i$. Siccome φ manda una base in una base, essa risulta un isomorfismo.

Se ora fissiamo due punti $Q \in S$ e $Q' \in S'$, allora l'affinità $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ determinata da $f(Q) = Q'$ e con parte lineare φ soddisfa la richiesta dell'enunciato. \square

Vediamo ora un Teorema di determinazione di affinità tramite immagine di punti, che si basa sull'analogo teorema di determinazione per applicazioni lineari.

Teorema 2.2.7 (Determinazione di un'affinità mediante punti). *Siano $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ e $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ due $(n + 1)$ -uple di punti di \mathbb{A}^n affinamente indipendenti. Allora esiste un'unica affinità f tale che*

$$f(P_i) = Q_i, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

In altre parole, tali due $(n + 1)$ -uple sono affinamente equivalenti e in modo unico (a meno di permutazioni).

Dimostrazione. Per ipotesi gli n vettori $P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0$ di \mathbb{K}^n sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di \mathbb{K}^n . Analogamente lo sono $Q_1 - Q_0, \dots, Q_n - Q_0$. Pertanto esiste un unico isomorfismo φ di \mathbb{K}^n in sé tale che $\varphi(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Per il Teorema detaff esiste un'unica $f \in \text{Aff}(\mathbb{A}^n)$ avente φ come parte lineare e tale che $f(P_0) = Q_0$. Precisamente (vedi dimostrazione del teorema citato) tale affinità è definita su ogni $P \in \mathbb{A}^n$ come

$$f(P) = Q_0 + \varphi(P - P_0).$$

Dobbiamo verificare che tale affinità verifica le condizioni richieste. Ma, per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha

$$f(P_i) - f(P_0) = \varphi(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$$

da cui segue $f(P_i) = Q_i - Q_0 + f(P_0) = Q_i$, come volevamo.

Infine, tale affinità è unica; infatti, se $g \in \text{Aff}(\mathbb{A}^n)$ e $g(P_i) = Q_i$, per ogni $i = 0, \dots, n$, allora $g = f$. □

2.3 Sottospazi fissi e sottospazi invarianti per affinità

Definizione 2.3.1. Siano \mathbb{A} uno spazio affine e $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ una affinità. Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}$ si dice

- *fisso* per f se $f(P) = P$ per ogni punto $P \in S$;
- *invariante* per f se $f(S) = S$.

Osserviamo che fisso implica invariante, ma non viceversa.

Proposizione 2.3.2. Siano V un \mathbb{K} -spazio vettoriale e \mathbb{A} uno spazio affine su V . Sia inoltre $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ di parte lineare $\varphi \in GL(V)$. Infine sia $P_0 \in \mathbb{A}$ un punto fisso per f . Si hanno i seguenti fatti:

- i) se $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di φ e V_λ denota il relativo autospazio, allora il sottospazio affine S passante per P_0 e di giacitura V_λ è invariante per f ;
- ii) in particolare, se $\lambda = 1$, allora S passante per P_0 e di giacitura V_1 è fisso per f .

Dimostrazione. i) Vogliamo provare che, per ogni $Q \in S$ si ha $f(Q) \in S$. Osserviamo che $\overrightarrow{P_0Q} \in V_\lambda$, pertanto $\varphi(\overrightarrow{P_0Q}) = \lambda(\overrightarrow{P_0Q})$ e quindi

$$\overrightarrow{f(P_0)f(Q)} = \lambda(\overrightarrow{P_0Q}).$$

Ma $f(P_0) = P_0$, dunque $\overrightarrow{P_0 f(Q)} = \lambda(\overrightarrow{P_0 Q})$, quindi $f(Q) \in S$. *ii*) Con lo stesso ragionamento visto sopra, per ogni $Q \in S$ si ottiene che $\overrightarrow{P_0 f(Q)} = \overrightarrow{P_0 Q}$, quindi $Q = f(Q)$ come volevamo. \square

Esempio 2.3.3. L'affinità f di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ definita come $f(x) = 1 - x$ ha $x = \frac{1}{2}$ come unico punto fisso. L'affinità $g \in \text{Aff}(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2)$, $g(x, y) = (x + 1, -y)$ ha la retta $y = 0$ come sottospazio invariante, ma non ha punti fissi.

2.4 Proiezioni su sottospazi affini

Vogliamo ora definire le proiezioni di uno spazio affine su un sottospazio affine. Ricordiamo prima alcune nozioni di Algebra Lineare.

In uno spazio vettoriale V , due sottospazi U e W si dicono *complementari* se $V = U \oplus W$. Equivalentemente, se ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in modo unico come $v = u + w$, per opportuni $u \in U$ e $w \in W$.

Inoltre sono definite due applicazioni lineari, dette *proiezioni*,

$$\pi_U : V \rightarrow U, \quad \text{data da } v = u + w \mapsto u$$

e

$$\pi_W : V \rightarrow W, \quad \text{data da } v = u + w \mapsto w.$$

Vediamo come adattare queste nozioni nella Geometria affine.

Definizione 2.4.1. Sia \mathbb{A} uno spazio affine sullo spazio vettoriale $V = U \oplus W$ e sia S un sottospazio affine di giacitura W . Diciamo *proiezione su S parallela a U* l'applicazione

$$p_W : \mathbb{A} \rightarrow S, \quad p_W(p) = T_P(U) \cap S,$$

dove $T_P(U)$ è il sottospazio affine passante per P e con giacitura U .

In modo del tutto analogo, dato un sottospazio affine di giacitura U , si definisce la *proiezione p_U su S' parallela a W* .

Lemma 2.4.2. Nelle ipotesi della Definizione 2.4.1 si ha per ogni $P \in \mathbb{A}$:

$$\dim T_P(U) \cap S = 0,$$

quindi consiste di un punto.

Dimostrazione. Siccome $W \oplus U = V$, per ogni coppia di punti $Q \in S$ e $R \in T_P(U)$ si ha certamente $\overrightarrow{QR} \in W \oplus U$ quindi $T_P(U) \cap S \neq \emptyset$ per la Proposizione 1.2.3.

Inoltre, dalla Formula di Grassmann affine (1.2.1) abbiamo

$$\dim T_P(U) \cap S = \dim T_P(U) + \dim S - \dim L(T_P(U), S) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 0.$$

□

Esempio 2.4.3. In $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, spazio affine su $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$, dove $U = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $W = \text{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, posto S l'asse y di equazione $x = 0$, la proiezione su S parallela a U è

$$p_U(x, y) = y.$$

Se invece poniamo S' l'asse x , la proiezione su S' parallela a W è

$$p_W(x, y) = x.$$

Proposizione 2.4.4. Con le notazioni precedenti, l'applicazione p_W è un'applicazione affine avente π_W come parte lineare.

Dimostrazione. Sia $Q \in S$. Osserviamo che per ogni $P \in \mathbb{A}$, se consideriamo il punto $P' = p_W(P)$, abbiamo

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP'} + \overrightarrow{P'P} = w + u,$$

dove $w \in W$ perché $Q, P' \in S$, e $u \in U$ perché $P', P \in T_P(U)$.

Quindi, dati $P, R \in \mathbb{A}$ arbitrari, se consideriamo il vettore $\overrightarrow{p_W(P)p_W(R)} = \overrightarrow{P'R'}$, possiamo scrivere

$$\overrightarrow{P'R'} = \overrightarrow{P'Q} + \overrightarrow{QR'} = w_P - w_R,$$

dove

$$\overrightarrow{QP} = w_P + u_P, \quad \overrightarrow{QR} = w_R + u_R, \quad w_P, w_R \in W, u_P, u_R \in U.$$

L'applicazione φ che a \overrightarrow{PR} associa $\overrightarrow{P'R'}$ opera nel seguente modo:

$$\varphi(\overrightarrow{PR}) = \varphi(w_P - w_R + u_P - u_R) = w_P - w_R,$$

quindi è proprio la proiezione lineare sul sottospazio W .

□

Capitolo 3

Spazi affini reali

Se il campo K relativo a uno spazio affine è il campo \mathbb{R} dei numeri reali, oltre a tutto quanto visto in precedenza, si danno nozioni e risultati ulteriori, possibili in quanto \mathbb{R} è dotato di una relazione d'ordine che lo rende un *campo ordinato*.

Definizione 3.0.1. Se \mathbb{A} è uno spazio affine su un \mathbb{R} -spazio vettoriale V , diremo che \mathbb{A} è uno *spazio affine reale*. In particolare, se $n = \dim(\mathbb{A})$, si può supporre che $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$.

Un primo fatto peculiare di tali spazi è il seguente. Abbiamo menzionato nel paragrafo precedente la nozione di collineazione (cioè di applicazione biunivoca $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ tale che, per ogni retta $L \subset \mathbb{A}$ anche $f(L)$ è una retta) e abbiamo provato che ogni affinità è una collineazione (vedi Corollario hill). Nel caso degli spazi affini reali di dimensione almeno 2 vale anche il viceversa (non proveremo questo risultato).

Introduciamo ora alcune nozioni specifiche degli spazi affini reali e vediamo quali di queste si mantengono per affinità.

D'ora in poi, in questo paragrafo, con \mathbb{A} denoteremo uno spazio affine reale su un \mathbb{R} -spazio vettoriale V .

Definizione 3.0.2. La *semiretta di origine* $Q \in \mathbb{A}$ e *direzione* $v \in V \setminus \{0_V\}$ è l'insieme

$$\{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} = tv, t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}.$$

Chiaramente tale semiretta è contenuta nella retta passante per Q con giacitura $\text{Span}(v)$. Si prova facilmente che l'immagine per affinità di una semiretta è ancora una semiretta.

Definizione 3.0.3. Diciamo *segmento di estremi* $Q, R \in \mathbb{A}$ l'insieme

$$\overline{QR} := \{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} = t(\overrightarrow{QR}), t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Proposizione 3.0.4. Sia $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $Q, R \in \mathbb{A}$ siano due punti qualunque. Allora

$$f(\overline{QR}) = \overline{f(Q)f(R)}.$$

In altre parole, l'immagine per affinità di un segmento è ancora un segmento, avente per estremi le immagini degli estremi del segmento di partenza.

Dimostrazione. “ \subseteq ” Se $P \in \overline{QR}$ allora $\overrightarrow{QP} = \bar{t}\overrightarrow{QR}$ per un opportuno $\bar{t} \in \mathbb{R}, 0 \leq \bar{t} \leq 1$. Se φ è la parte lineare di f , si ha

$$\overrightarrow{f(Q)f(P)} = \varphi(\overrightarrow{QP}) = \varphi(\bar{t}\overrightarrow{QR}) = \bar{t}\varphi(\overrightarrow{QR}),$$

quindi $f(P) \in \overline{f(Q)f(R)}$.

“ \supseteq ” Basta applicare l'inclusione appena dimostrata all'affinità f^{-1} e al segmento di estremi $f(R)$ e $f(Q)$, ottenendo che

$$f^{-1}(\overline{f(Q)f(R)}) \subseteq \overline{f^{-1}(f(Q))f^{-1}(f(R))} = \overline{QR}.$$

Applicando infine f ad ambo i membri si ottiene la tesi. □

Definizione 3.0.5. Si può definire il *punto medio* di un segmento \overline{QR} (anche se il termine non ha alcuna valenza metrica, che assumerà invece negli spazi euclidei!) quel punto M definito da

$$\overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$$

La naturale generalizzazione della nozione di segmento a una “dimensione” maggiore è la seguente.

Definizione 3.0.6. Se $A, B, C \in \mathbb{A}$ sono tre punti non allineati, diciamo *triangolo di vertici* A, B, C l'insieme

$$\overline{ABC} := \{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}, t, s \in \mathbb{R}_+, t + s \leq 1\}$$

dove \mathbb{R}_+ denota l'insieme dei numeri reali non negativi.

In modo analogo a quanto visto nella Proposizione 3.0.4, si prova il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 3.0.7. Se $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $A, B, C \in \mathbb{A}$ sono tre punti non allineati, allora

$$f(\overline{ABC}) = \overline{f(A)f(B)f(C)}.$$

In altre parole, l'immagine per affinità di un triangolo è ancora un triangolo, avente per vertici le immagini dei vertici del triangolo di partenza.

Si possono generalizzare le nozioni di segmento (con 2 estremi) e di triangolo (con 3 vertici) a un oggetto determinato da un insieme (sufficientemente generale) di punti.

Definizione 3.0.8. Dati $A_0, \dots, A_k \in \mathbb{A}$ punti affinementemente indipendenti (dunque necessariamente $k \leq n$), il k -simplesso di vertici A_0, \dots, A_k è l'insieme

$$\Delta_k := \left\{ P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^k t_i \overrightarrow{A_0A_i}, t_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^k t_i \leq 1 \right\}.$$

Un'altra nozione tipica degli spazi affini reali è quella di convessità.

Definizione 3.0.9. Un insieme $X \subseteq \mathbb{A}$ si dice *convesso* se, comunque scelti $A, B \in X$, il segmento di estremi A e B è contenuto in X .

La convessità è una proprietà affine, come vediamo nel seguente risultato.

Teorema 3.0.10. Sia $X \subseteq \mathbb{A}$ un insieme convesso e sia $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$. Allora $f(X)$ è convesso.

Dimostrazione. Siano $f(A), f(B) \in f(X)$ due punti qualunque. Vogliamo provare che

$$\overline{f(A)f(B)} \subseteq f(X).$$

Poiché $A, B \in X$ e X è convesso per ipotesi, allora $\overline{AB} \subseteq X$. Pertanto $f(\overline{AB}) \subseteq f(X)$. Ma, per la Proposizione 3.0.4, si ha

$$f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$$

e dunque la tesi. □

Capitolo 4

Il prodotto vettoriale

In questa sezione consideriamo \mathbb{R}^3 con il prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione 4.0.1. Siano

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

due vettori di \mathbb{R}^3 . Il prodotto vettoriale di v e w è il vettore $v \wedge w \in \mathbb{R}^3$ definito come segue:

$$v \wedge w := \begin{pmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ -a_1 c_2 + a_2 c_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Un'altra notazione usata frequentemente per il prodotto vettoriale di v e w è $v \times w$.

Osservazione 4.0.2. Osserviamo che le coordinate di $v \wedge w$ rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ sono i determinanti dei minori 2×2 della matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & a_2 \end{pmatrix}, \tag{4.0.1}$$

e precisamente,

$$v \wedge w = e_1 \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} - e_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} + e_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Si noti che il lato destro di (4.0.1) coincide con lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna del “determinante della matrice”

$$\begin{pmatrix} e_1 & a_1 & a_2 \\ e_2 & b_1 & b_2 \\ e_3 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Dalla osservazione appena vista, deduciamo la seguente.

Proposizione 4.0.3. *Siano $u, v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ e sia $c \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti affermazioni.*

1. $(v_1 + v_2) \wedge w = v_1 \wedge w + v_2 \wedge w$; $(cv) \wedge w = c(v \wedge w)$.
2. $v \wedge (w_1 + w_2) = v \wedge w_1 + v \wedge w_2$; $v \wedge (cw) = c(v \wedge w)$.
3. $v \wedge w = -w \wedge v$.
4. $\langle u, v \wedge w \rangle = \det \begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$, dove $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$.
5. $v \wedge w \perp v, w$.
6. $v \wedge w = 0 \iff v, w$ sono linearmente dipendenti.
7. $\|v \wedge w\| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin \theta$, dove θ è l'angolo convesso tra v e w . Inoltre $\|v \wedge w\|$ coincide con l'area del parallelogramma di vertici $0, v, w$ e $v + w$.

Dimostrazione. I punti 1, 2 e 3 seguono direttamente dalle proprietà del determinante.

4. Dall'equazione (4.0.1) abbiamo:

$$\langle v, v \wedge w \rangle = a \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} - b \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

che coincide con lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna del determinante di

$$\begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

5. Dalla proprietà 4. segue che $\langle v, v \wedge w \rangle = \det(v, v, w) = 0$, poiché la matrice (v, v, w) ha due colonne uguali. Quindi $v \perp v \wedge w$. Analogamente si dimostra che $w \perp v \wedge w$.

6. Si ha

$$v \wedge w = 0 \iff \text{rk} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} < 2, \text{rk} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} < 2, \text{rk} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} < 2.$$

Equivalentemente, $v \wedge w = 0 \iff v, w$ sono linearmente dipendenti.

7. Questa proprietà è conseguenza immediata delle seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}\|v \wedge w\|^2 &= (b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \cdot (\cos \theta)^2 \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 (1 - (\cos \theta)^2) \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \cdot (\sin \theta)^2.\end{aligned}$$

□

Capitolo 5

Geometria euclidea

5.1 Spazi vettoriali euclidei e unitari

Riprendiamo alcune nozioni di Algebra Lineare sugli spazi vettoriali euclidei. Dovremo distinguere i due casi: quello reale e quello complesso.

Definizione 5.1.1. Sia V un \mathbb{R} -spazio vettoriale. Una *forma bilineare simmetrica su V* è una applicazione

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

che verifica le seguenti proprietà:

i) bilinearità, cioè

- $\forall v \in V$, l'applicazione $g(v, -) : V \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare;
- $\forall w \in V$, l'applicazione $g(-, w) : V \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare;

ii) simmetria, cioè $\forall v, w \in V$, vale $g(v, w) = g(w, v)$.

Infine, tale forma bilineare si dice *definita positiva* o *prodotto scalare reale* se $\forall v \in V$, si ha $g(v, v) \geq 0$ e inoltre $g(v, v) = 0$ se e solo se $v = 0_V$.

In questo caso, diciamo che V è uno *spazio vettoriale reale euclideo* o un \mathbb{R} - *spazio vettoriale euclideo*.

In modo analogo, ma con i dovuti adattamenti, vediamo la corrispondente nozione relativa ai numeri complessi.

Utilizzeremo le seguenti notazioni: se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, denotiamo il suo coniugato $a - ib$ con \bar{z} e il suo modulo $\sqrt{a^2 + b^2}$ con $|z|$. Chiaramente, se $z \in \mathbb{R}$, il suo modulo coincide col valore assoluto.

Definizione 5.1.2. Sia V un \mathbb{C} -spazio vettoriale. Una *forma sesquilineare hermitiana* su V è una applicazione

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

che verifica le seguenti proprietà:

i) *sequilinearità*, cioè

– $\forall v \in V$, l'applicazione $g(v, -) : V \rightarrow \mathbb{C}$ è additiva e verifica

$$g(v, \lambda w) = \bar{\lambda}g(v, w),$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e $w \in V$;

– $\forall w \in V$, l'applicazione $g(-, w) : V \rightarrow \mathbb{C}$ è lineare;

ii) *simmetria coniugata*, cioè $\forall v, w \in V$, vale $g(v, w) = \overline{g(w, v)}$.

Infine, tale forma si dice *definita positiva* o *prodotto hermitiano complesso* se $\forall v \in V$, si ha $g(v, v) \geq 0$ e inoltre $g(v, v) = 0$ se e solo se $v = 0_V$.

In questo caso, diciamo che V è uno *spazio vettoriale complessounitario*.

Si osservi che la richiesta $g(v, v) \geq 0$ ha senso in quanto, per la simmetria coniugata, $g(v, v) = \overline{g(v, v)}$, dunque $g(v, v) \in \mathbb{R}$.

Osservazione 5.1.3. Ricordiamo inoltre che, come accade per le applicazioni lineari, anche alle forme bilineari si può associare una matrice, una volta che si è fissata una base per lo spazio vettoriale. Infatti, se V è un \mathbb{R} -spazio vettoriale e $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è una sua base, a ogni forma bilineare

$$\tau : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

si associa la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(\tau)_{i,j} := (\tau(v_i, v_j)) \in M_n(\mathbb{R}).$$

Viceversa, a una matrice $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ si associa, rispetto a \mathcal{B} , la forma bilineare definita, su una qualunque coppia di vettori $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ e $w = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$, da:

$$\tau(v, w) := \sum_{i,j=1}^n m_{ij}a_ib_j.$$

Associando ad ogni vettore v la matrice colonna $a := {}^t(a_1, \dots, a_n)$ delle sue coordinate rispetto alla base scelta, e analogamente a w la matrice colonna $b := {}^t(b_1, \dots, b_n)$, l'uguaglianza precedente si scrive sinteticamente come

$$\tau(v, w) = {}^t a M b.$$

È noto, inoltre, che τ è una forma bilineare simmetrica se e solo se $M = M_{\mathcal{B}}(\tau)$ è una matrice simmetrica (cioè tale che ${}^tM = M$).

In particolare, se V è uno spazio vettoriale reale euclideo, si associa al prodotto scalare, rispetto a una base fissata \mathcal{B} , una matrice M simmetrica reale definita positiva che verifica

$$\langle v, w \rangle = {}^t_a M b.$$

e viceversa.

Definizione 5.1.4. Se $V = \mathbb{R}^n$, il *prodotto scalare standard* è quello associato alla matrice identica rispetto alla base canonica.

Pertanto, se $v = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ e $w = {}^t(b_1, \dots, b_n)$, allora

$$\langle v, w \rangle = {}^t v \mathbb{I}_n w = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

In modo analogo si prova la corrispondenza tra un prodotto hermitiano complesso in un \mathbb{C} -spazio vettoriale euclideo e una matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ hermitiana (cioè tale che ${}^tM = \overline{M}$) definita positiva, data da

$$g(v, w) = {}^t v M \overline{w}.$$

Ricordiamo un risultato fondamentale, di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 5.1.5. Se V è un \mathbb{R} -spazio vettoriale euclideo, comunque scelti $v, w \in V$, vale

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle.$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.

Definizione 5.1.6. Se V è un \mathbb{R} (rispettivamente, \mathbb{C})-spazio vettoriale euclideo, diciamo *norma* di $v \in V$ il numero reale non negativo

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Con tale nozione, possiamo riscrivere il risultato precedente nella sua formulazione più generale (che vale anche sui numeri complessi).

Teorema 5.1.7 (Diseguaglianza di Cauchy - Schwarz). Se V è un spazio vettoriale euclideo reale o complesso, comunque scelti $v, w \in V$, si ha

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|.$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.

Proposizione 5.1.8. Sia V un spazio vettoriale euclideo reale o complesso. Provare che, per ogni $v \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (rispettivamente, \mathbb{C}) valgono le seguenti proprietà:

a) $\|v\| \geq 0$ (qui 0 denota $0_{\mathbb{R}}$);

b) $\|v\| = 0 \iff v = 0_V$;

c) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

Dalla Disuguaglianza di Schwarz discende un'altra nota relazione.

Teorema 5.1.9 (Disuguaglianza triangolare). Se V è un spazio vettoriale euclideo reale o complesso, comunque scelti $v, w \in V$, si ha

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza allora v e w sono linearmente dipendenti.

In uno spazio vettoriale euclideo si può introdurre la nozione di ortogonalità fra vettori e, di conseguenza, anche fra sottospazi vettoriali.

Definizione 5.1.10. Diciamo che due vettori $v, w \in V$ sono *ortogonali* se $\langle v, w \rangle = 0$.

Osservazione 5.1.11. Si noti che in uno spazio vettoriale euclideo reale vale

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle.$$

Dunque, se v e w sono ortogonali si ha

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

cioè il Teorema di Pitagora, che dunque vale in un qualunque spazio vettoriale euclideo.

In uno spazio vettoriale euclideo si rivela essenziale la nozione di *base ortonormale*, cioè di una base costituita da vettori di norma 1 e a due a due ortogonali. Se $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ è una base ortonormale, allora per ogni $v \in V$ si ha

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Inoltre ogni cambiamento di base tra basi ortonormali è associato a una matrice ortogonale M (cioè tale che ${}^t M = M^{-1}$), nel caso reale. Mentre nel caso complesso M è unitaria (cioè tale che ${}^t \bar{M} = M^{-1}$).

Infine ricordiamo la seguente nozione

Definizione 5.1.12. Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V . Diciamo *complemento ortogonale di W* l'insieme

$$W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}.$$

Il nome di "complemento ortogonale" è giustificato dalle seguenti proprietà, le cui dimostrazioni sono già state viste nel corso di Algebra Lineare.

Proposizione 5.1.13. Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V . Allora valgono i seguenti fatti:

- i) W^\perp è un sottospazio vettoriale di V ;
- ii) $W^\perp \cap W = \{0_V\}$;
- iii) $W^\perp + W = V$.

In particolare, la somma $W^\perp + W$ è diretta e si denota dunque con $W^\perp \oplus W$. Conseguentemente, $\dim(W^\perp) + \dim(W) = \dim(V)$.

Osservazione 5.1.14. Se W_1 e W_2 sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale euclideo V , provare che

$$W_1 \subseteq W_2^\perp \iff W_2 \subseteq W_1^\perp.$$

Definizione 5.1.15. Due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 di uno spazio vettoriale euclideo V sono *ortogonali* se

$$W_1 \subseteq W_2^\perp, \quad \text{oppure} \quad W_2 \subseteq W_1^\perp.$$

Osservazione 5.1.16. Per la Proposizione 5.1.13, se W_1 e W_2 sono ortogonali si ha

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) \leq \dim(V).$$

Esempio 5.1.17. Sia W un iperpiano dello spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^n con prodotto scalare standard. La sua equazione cartesiana è del tipo

$$W : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Osserviamo che il vettore $(a_1, \dots, a_n) \in W^\perp$. D'altro canto, $\dim(W) = n - 1$ dunque $\dim(W^\perp) = 1$. Pertanto W^\perp è la retta vettoriale $\text{Span} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Concludiamo il paragrafo con una nozione relativa solo al caso reale.

Definizione 5.1.18. Siano v, w due vettori non nulli di un \mathbb{R} -spazio vettoriale euclideo V . Si dice *angolo convesso* tra v e w l'unico angolo θ , con $0 \leq \theta \leq \pi$ tale che

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Si noti che, per la Disuguaglianza di Cauchy - Schwarz, tale frazione è compresa tra -1 e 1 . Si osservi infine che, se v e w sono proporzionali, cioè se $w = \lambda v$, allora

$$\cos \theta = \frac{\langle v, \lambda v \rangle}{\|v\| \|\lambda v\|} = \frac{\lambda \|v\|^2}{|\lambda| \|v\|^2} = \pm 1$$

dove $\cos \theta = 1 \iff \theta = 0 \iff \lambda > 0$, $\cos \theta = -1 \iff \theta = \pi \iff \lambda < 0$.

5.2 Spazi affini euclidei

Introduciamo ora un nuovo ambiente geometrico relativamente ai due casi, reale e complesso.

Definizione 5.2.1. Se V è uno spazio vettoriale reale (rispettivamente, complesso) euclideo, diciamo *spazio affine euclideo* (rispettivamente, *unitario*) lo spazio affine $\mathbb{A}(V)$ su V che verrà denotato con

$$\mathbb{E}.$$

I sottospazi affini di \mathbb{E} sono detti suoi *sottospazi euclidei* (rispettivamente, *unitari*).

In particolare, se $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard, il corrispondente *spazio affine euclideo canonico* si denota con

$$\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n.$$

Se $V = \mathbb{C}^n$, il corrispondente *spazio affine unitario canonico* si denota

$$\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^n.$$

Grazie al prodotto scalare su V , è possibile definire l'ortogonalità e gli angoli tra sottospazi euclidei (risp. unitari).

Definizione 5.2.2. Sia \mathbb{E} uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario) e $S, T \subseteq \mathbb{E}$ due suoi sottospazi euclidei (rispettivamente, unitari) di dimensione ≥ 1 .

Diciamo che S e T sono *ortogonali* se lo sono le rispettive giaciture come sottospazi di V e scriveremo

$$S \perp T.$$

Si osservi che, se S e T sono ortogonali in \mathbb{E} , con $n = \dim(\mathbb{E})$, allora

$$\dim(S) + \dim(T) \leq n. \quad (5.2.1)$$

Per poter fare calcoli, come nel caso affine, occorre introdurre un sistema di riferimento. Ma qui terremo conto che lo spazio vettoriale soggiacente è euclideo.

Definizione 5.2.3. Sia \mathbb{E} uno spazio affine euclideo sullo spazio vettoriale euclideo V . Si dice *riferimento cartesiano* in \mathbb{E} un riferimento affine (O, \mathcal{B}) , dove \mathcal{B} è una base ortonormale di V .

Esempio 5.2.4. Si consideri un iperpiano H di $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ che, rispetto a un fissato riferimento cartesiano, abbia equazione

$$H : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

La sua giacitura è $H_0 : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. Per definizione, un sottospazio euclideo $S = Q + S_0$ è ortogonale a H se e solo se $\dim(S_0) \geq 1$ e $S_0 \subseteq H_0^\perp$.

Osserviamo che H_0^\perp è una retta vettoriale e precisamente $H_0^\perp = \text{Span}(v)$, dove $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Dunque S è necessariamente una retta affine di giacitura $S_0 = \text{Span}(v)$.

Ad esempio, il piano H e la retta r di \mathbb{E}^3 dati da

$$H : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \quad r : (x_1, x_2, x_3) = (1 + 2t, 2 - 3t, 43 + t)$$

sono ortogonali.

Esempio 5.2.5. Si considerino due rette r e s di $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ aventi come vettori direzionali (rispetto a un riferimento cartesiano)

$$v_r = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad v_s = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

rispettivamente. Per definizione, $r \perp s$ se e solo se $\text{Span}(v_r) \subset \text{Span}(v_s)^\perp$ e questo si verifica se e solo se $v_r \perp v_s$ cioè se e solo se

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = 0.$$

Come visto in (5.2.1), se $S, T \subset \mathbb{E}^n$ sono ortogonali, allora necessariamente $\dim(S) + \dim(T) \leq n$. Volendo estendere tale nozione a sottospazi di dimensione qualunque, partiamo dalla seguente osservazione.

Siano $S \ni P$ e $T \ni Q$ due sottospazi euclidei di giaciture rispettive S_0 e T_0 e denotiamo le rispettive dimensioni con

$$s := \dim(S) = \dim_{\mathbb{R}}(S_0), \quad t := \dim(T) = \dim_{\mathbb{R}}(T_0).$$

Se accade che

$$\dim(S) + \dim(T) \geq n,$$

allora

$$\dim(S_0^\perp) + \dim(T_0^\perp) = (n - s) + (n - t) = 2n - (s + t) \leq n.$$

Questo induce a introdurre la seguente nozione.

Definizione 5.2.6. Siano $S \ni P$ e $T \ni Q$ due sottospazi euclidei di \mathbb{E}^n di giaciture rispettive S_0 e T_0 . Se $\dim(S) + \dim(T) \geq n$, diciamo che S e T sono *perpendicolari* se S_0^\perp e T_0^\perp sono ortogonali.

Esempio 5.2.7. Si considerino due piani di \mathbb{E}^3 di equazioni

$$S : ax + by + cz + d = 0, \quad T : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Per definizione, essi sono perpendicolari se e solo se le rette vettoriali

$$S_0^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad T_0^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

sono ortogonali. Tale condizione equivale a

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \text{cioè} \quad aa' + bb' + cc' = 0.$$

5.3 Angolo tra sottospazi euclidei

Per quanto riguarda l'angolo tra due sottospazi euclidei, ci limiteremo a due classi di esempi: l'angolo fra due rette e quello fra una retta e un iperpiano.

Tenendo presente la definizione di angolo acuto fra due vettori di un \mathbb{R} -spazio vettoriale euclideo, si noti che due rette individuano due angoli, uno acuto e uno ottuso. Sceglieremo quello acuto, per convenzione.

Definizione 5.3.1. Siano $r, s \subset \mathbb{E}^n$ due rette nello spazio affine euclideo di vettori direzionali rispettivi v_r e v_s .

Si dice *angolo fra le rette r e s* , e si denota con \widehat{rs} , l'unico angolo $\theta \in [0, \pi/2]$ tale che

$$\cos \theta = \frac{|\langle v_r, v_s \rangle|}{\|v_r\| \|v_s\|}.$$

Si osservi che, nella definizione precedente, $0 \leq \cos \theta \leq 1$ e dunque \widehat{rs} è un angolo acuto. Inoltre è chiaro che $r \perp s$ se e solo se $\widehat{rs} = \pi/2$.

Osservazione 5.3.2. Si noti che l'angolo fra due rette, come accadeva con l'ortogonalità, non ha nulla a che vedere con l'incidenza delle due rette: infatti lo si può definire e calcolare sia nel caso in cui le rette siano incidenti, sia nel caso in cui siano sghembe.

Definizione 5.3.3. Siano r una retta e H un iperpiano in \mathbb{E}^n ; sia inoltre t una retta ortogonale a H . Si dice *angolo fra r e H* , e si denota con \widehat{rH} , l'unico angolo α complementare dell'angolo \widehat{rt} .

In altre parole, posti v_r e n due vettori direzionali di r e t , rispettivamente,

$$\widehat{rH} := \pi/2 - \widehat{rt}$$

ove \widehat{rt} è l'unico angolo (tra 0 e $\pi/2$) tale che

$$\cos \widehat{rt} = \frac{|\langle v_r, n \rangle|}{\|v_r\| \|n\|}.$$

Si osservi che anche \widehat{rH} è un angolo acuto.

5.4 Distanze negli spazi affini euclidei

Grazie al prodotto scalare su V , è possibile definire anche una distanza in \mathbb{E} , rendendolo uno spazio metrico e, di conseguenza, uno spazio topologico.

Definizione 5.4.1. Sia \mathbb{E} uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario). Se $P, Q \in \mathbb{E}$, diciamo *distanza tra P e Q* il numero reale non negativo

$$d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Proposizione 5.4.2. Se $P, Q, R \in \mathbb{E}$ allora:

- i) $d(P, Q) \geq 0$ e vale $d(P, Q) = 0$ se e solo se $P = Q$;
- ii) $d(P, Q) = d(Q, P)$;
- iii) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$.

Dimostrazione. (i) e (ii) sono lasciate per esercizio, in quanto immediate. (iii) Per la Relazione di Chasles (SA2) si ha $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$, dunque

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}\| \leq \|\overrightarrow{RQ}\| + \|\overrightarrow{PR}\|,$$

per la proprietà triangolare della norma indotta da un prodotto scalare □

Più in generale, diamo la seguente nozione.

Definizione 5.4.3. Sia \mathbb{E} uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario). Se $X, Y \subseteq \mathbb{E}$ sono due sottoinsiemi non vuoti, diciamo *distanza tra X e Y* il numero reale non negativo

$$d(X, Y) := \inf \{d(P, Q) \mid P \in X, Q \in Y\}.$$

Si osservi che tale estremo inferiore esiste in quanto l'insieme su cui si calcola è costituito da numeri reali maggiori o uguali di zero.

Per i sottospazi euclidei vale il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione; ne vedremo un caso particolare.

Teorema 5.4.4. In uno spazio euclideo \mathbb{E} sullo spazio vettoriale euclideo V , si considerino due sottospazi euclidei $X \ni A$ e $Y \ni B$, dove $A, B \in \mathbb{E}$ e con $U, W \subseteq V$ le rispettive giaciture.

Allora esistono $P_0 \in X$ e $Q_0 \in Y$ tali che il vettore $Q_0 - P_0$ è ortogonale sia a U che a W e, per ogni $P \in X$ e $Q \in Y$, si ha $\|Q_0 - P_0\| \leq \|Q - P\|$. Pertanto $d(X, Y) = d(P_0, Q_0)$.

In quanto segue considereremo come ambiente lo spazio affine euclideo canonico $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ con un riferimento cartesiano (O, \mathcal{B}) .

In tale ambito, diamo la seguente nozione.

Definizione 5.4.5. Se $A, B \in \mathbb{E}^n$ diciamo *punto medio del segmento* \overline{AB} l'unico punto $M \in \overline{AB}$ tale che

$$d(A, M) = d(M, B).$$

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto la proiezione, su un sottospazio affine S di \mathbb{A}^n , parallela a un sottospazio vettoriale U di \mathbb{R}^n (complementare alla giacitura di S).

In uno spazio euclideo possiamo considerare la situazione particolare in cui U è l'ortogonale della giacitura di S e dare la seguente nozione.

Definizione 5.4.6. Sia $S \ni Q$ un sottospazio euclideo di \mathbb{E}^n , con giacitura $W \subset V$. Si dice *proiezione ortogonale su S* l'applicazione

$$p_W : \mathbb{E}^n \longrightarrow S \quad \text{data da} \quad P \mapsto T_P(U) \cap S$$

dove $U = W^\perp$.

Il punto $P_0 = T_P(W^\perp) \cap S$ si dice *proiezione ortogonale di P su S* .

Esempio 5.4.7. Si considerino il punto $P = (1, 2, 3) \in \mathbb{E}^3$ e il piano di equazione $H : x - y + 3z + 1 = 0$. Per determinare la proiezione ortogonale P_0 di P su H , calcoliamo anzitutto la giacitura W di H e il sottospazio W^\perp . Quest'ultimo è la retta vettoriale

$$W^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Per definizione $P_0 = T_P(W^\perp) \cap H$. Poiché $r : (x, y, z) = (1 + t, 2 - t, 3 + 3t)$, bisogna determinare t in modo che

$$(1 + t) - (2 - t) + 3(3 + 3t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -9/11.$$

Sostituendo nell'equazione parametrica di r si ottiene infine

$$P_0 = (1 - 9/11, 2 + 9/11, 3 - 27/11) = (2/11, 31/11, 6/11).$$

La nozione di proiezione ortogonale verrà ora utilizzata nel trovare dei metodi per determinare alcune distanze.

Il primo caso è quello di distanza di un punto da un sottospazio euclideo.

Proposizione 5.4.8. Siano S un sottospazio euclideo e $Q \in \mathbb{E}^n$. Allora, posta Q_0 la proiezione ortogonale di Q su S , si ha

$$d(Q, S) = d(Q, Q_0).$$

Dimostrazione. Basta provare che, comunque scelto un punto $P \in S$, si ha $d(Q, P) \geq d(Q, Q_0)$ o, equivalentemente, che

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 \geq \|\overrightarrow{Q_0Q}\|^2.$$

Se W è la giacitura di $S \ni P$, si ha $\overrightarrow{Q_0P} \in W$. D'altro canto, per definizione di proiezione ortogonale, $\overrightarrow{Q_0Q} \in W^\perp$. Per (SA2) si ha inoltre

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ_0} + \overrightarrow{Q_0Q}.$$

Quindi

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ_0}\|^2 + \|\overrightarrow{Q_0Q}\|^2 \geq \|\overrightarrow{Q_0Q}\|^2.$$

□

Proposizione 5.4.9. *Si fissi un riferimento cartesiano di \mathbb{E}^n e si considerino un punto $Q = (q_1, \dots, q_n)$ e un iperpiano $H : a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$. Allora*

$$d(Q, H) = \frac{|a_1q_1 + \dots + a_nq_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Dimostrazione. Si consideri un versore (cioè un vettore di norma 1) ortogonale a H , ad esempio

$$n := \frac{(a_1, \dots, a_n)}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Essendo anche $\overrightarrow{Q_0Q}$ ortogonale a H , si ha

$$|\langle \overrightarrow{Q_0Q}, n \rangle| = \|\overrightarrow{Q_0Q}\| = d(Q, Q_0) = d(Q, H),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla Proposizione precedente.

Per calcolare il suddetto prodotto scalare, basta scegliere un qualunque punto $P \in H$, applicare la Relazione di Chasles (SA2) e la bilinearità, ottenendo

$$\langle \overrightarrow{Q_0Q}, n \rangle = \langle \overrightarrow{PQ}, n \rangle + \langle \overrightarrow{Q_0P}, n \rangle.$$

Ma $\langle \overrightarrow{Q_0P}, n \rangle = 0$ in quanto $\overrightarrow{Q_0P}$ appartiene alla giacitura di H , che è $\text{Span}(n)^\perp$.

Pertanto

$$d(Q, H) = |\langle \overrightarrow{Q_0Q}, n \rangle| = |\langle \overrightarrow{PQ}, n \rangle|.$$

Denotando le coordinate di P con (y_1, \dots, y_n) e tenendo conto che $P \in H$, vale $a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = -b$. Quindi

$$d(Q, H) = \frac{|\langle (q_1 - y_1, \dots, q_n - y_n), (a_1, \dots, a_n) \rangle|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

da cui la tesi. □

Osservazione 5.4.10. Se S e T sono due sottospazi paralleli di \mathbb{E}^n e $S \cap T = \emptyset$ allora la loro distanza è non nulla. Vediamo come determinarla.

Sia $\dim(T) \leq \dim(S)$. Allora, scelto un qualunque punto $Q \in T$ e denotando con Q_0 la proiezione ortogonale di Q su S , si ha

$$d(T, S) = d(Q, S) = d(Q, Q_0).$$

Chiaramente, se $\dim(T) = \dim(S)$, i ruoli di S e T si possono scambiare.

Esempio 5.4.11. Si considerino la retta r e il piano π di \mathbb{E}^3 dati da

$$r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, 2), \quad \pi : x + 2y + 4 = 0.$$

Poiché le rispettive giaciture sono $W_r = \langle (2, -1, 2) \rangle$ e $W_\pi : x + 2y = 0$, si vede immediatamente che $W_r \subset W_\pi$ e dunque $r \parallel \pi$. Tenendo conto che $\dim(r) = 1 < 2 = \dim(\pi)$, per l'Osservazione dispar si ha che $d(r, \pi) = d(Q, \pi)$, dove Q è un qualunque punto di r . Ad esempio, si scelga $Q = (1, 0, 0)$ e si calcoli, per la Proposizione dishy,

$$d(Q, \pi) = \frac{|1 + 4|}{\sqrt{1 + 4}} = \sqrt{5}.$$

Esempio 5.4.12. Si considerino i due piani paralleli π_1 e π_2 di \mathbb{E}^3 dati da

$$\pi_1 : x + 2y - z + 4 = 0, \quad \pi_2 : x + 2y - z + 10 = 0.$$

Si ha

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(Q, \pi_2),$$

dove Q è un qualunque punto di π_1 . Ad esempio, si scelga $Q = (0, 0, 4)$ e si calcoli, ancora per la Proposizione dishy,

$$d(Q, \pi_2) = \frac{|-4 + 10|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{6}.$$

Esempio 5.4.13. Si considerino le due rette parallele r_1 e r_2 di \mathbb{E}^3 date da

$$r_1 : (x, y, z) = (3, -1, 1) + \lambda(2, -1, 2), \quad r_2 : (x, y, z) = (2, 1, 3) + \mu(2, -1, 2).$$

In questo caso si deve procedere diversamente dai due precedenti esempi. Osserviamo però che per l'Osservazione 5.4.10 abbiamo

$$d(r_1, r_2) = d(Q, Q_0),$$

dove $Q \in r_1$ e Q_0 è la proiezione ortogonale di Q su r_2 . Invece di scegliere un punto su r_1 , si noti che si può procedere ancora più rapidamente considerando un piano π ortogonale a entrambe le rette. Evidentemente π interseca ogni retta in un punto e questi due punti sono uno la proiezione ortogonale dell'altro sull'altra retta. Pertanto, posti $Q_1 := \pi \cap r_1$ e $Q_2 := \pi \cap r_2$, si ha

$$d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2),$$

Si scelga, ad esempio, $\pi : 2x - y + 2z = 0$. Con facili calcoli si vede che

$$Q_1 := \pi \cap r_1 = (1, 0, -1), \quad Q_2 := \pi \cap r_2 = (0, 2, 1).$$

Pertanto

$$d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2) = \|Q_1 - Q_2\| = \|(1, -2, -2)\| = 3.$$

Concludiamo questo paragrafo con la determinazione della distanza tra due rette sghembe dello spazio euclideo canonico \mathbb{E}^3 , assieme alle nozioni di *retta e segmento di minima distanza*.

Teorema 5.4.14. *Siano r e s due rette sghembe di \mathbb{E}^3 . Allora si ha:*

- i) *esiste un'unica coppia π_r e π_s di piani paralleli a entrambe le rette (e paralleli tra loro) tali che $r \subset \pi_r$ e $s \subset \pi_s$;*
- ii) *esiste un'unica retta t ortogonale e incidente r e s (detta retta di minima distanza);*
- iii) *posti $R := t \cap r$ e $S := t \cap s$, si ha*

$$d(r, s) = d(\pi_r, \pi_s) = d(R, S),$$

dove il segmento \overline{RS} è detto segmento di minima distanza tra r e s .

Dimostrazione. Siano r determinata da $A \in r$ e con giacitura $\text{Span}(v_r)$ e s da $B \in s$ e giacitura $\text{Span}(v_s)$.

i) I due piani cercati sono necessariamente i piani π_r e π_s determinati, ad esempio, da $A \in \pi_r$ e $B \in \pi_s$, ed entrambi di giacitura

$$W_{\pi_r} = W_{\pi_s} = \text{Span}(v_r, v_s).$$

Si noti che questi sono veramente due piani in quanto $\dim_{\mathbb{R}} \text{Span}(v_r, v_s) = 2$ poiché v_r e v_s non sono paralleli per ipotesi.

ii) Si consideri l'unica (a meno di multipli) direzione w ortogonale sia a r che a s (e quindi anche ortogonale a π_r e π_s), data da

$$\text{Span}(w) := \text{Span}(v_r, v_s)^\perp.$$

Denotiamo con ρ l'unico piano del fascio di piani \mathcal{F}_r di sostegno r che contiene w nella sua giacitura; e, analogamente, denotiamo con σ l'unico piano del fascio di piani \mathcal{F}_s di sostegno s che contiene w nella sua giacitura.

Si ha quindi

$$W_\rho = \text{Span}(v_r, w), \quad W_\sigma = \text{Span}(v_s, w).$$

Per costruzione $t := \rho \cap \sigma$ è una retta di giacitura $W_\rho \cap W_\sigma = \text{Span}(w)$, che risulta dunque ortogonale sia a r che a s .

Inoltre, t e r giacciono entrambe sul piano ρ e sono ortogonali, quindi non parallele; pertanto sono incidenti.

Analogamente t e s sono incidenti.

Per provare l'unicità di t , supponiamo che esista un'altra retta t' ortogonale e incidente r e s . Per quanto osservato all'inizio, c'è un'unica direzione w ortogonale a r e a s , dunque $t' \parallel t$. In particolare, t e t' sono complanari. Per questo, denotando con $R' := t' \cap r$ e $S' := t' \cap s$, si ha che i punti R, S, R', S' sono complanari. Il piano che li contiene, pertanto, deve contenere r (individuata da R e R') e analogamente s ; questo è un assurdo in quanto r e s sono sghembe per ipotesi.

iii) Si noti che

$$d(r, s) := \inf \{d(P, Q) \mid P \in r, Q \in s\} \geq d(\pi_r, \pi_s).$$

Se si prova che $d(\pi_r, \pi_s)$ è raggiunta dalla coppia di punti $R \in r$ e $S \in s$, allora si ha la tesi. Per fare questo, basta osservare che la retta t è ortogonale a π_r e π_s per (ii) e che

$$R = t \cap r = t \cap \pi_r, \quad S = t \cap s = t \cap \pi_s.$$

Dunque S è la proiezione ortogonale di R su π_s ; pertanto $d(\pi_r, \pi_s) = d(R, S)$. □

Capitolo 6

Isometrie

6.1 Isometrie e Matrici Ortogonali

Definizione 6.1.1. Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo. Una isometria di (V, g) è un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ tale che $\forall u, v \in V$, vale:

$$g(f(u), f(v)) = g(u, v).$$

Osservazione 6.1.2. Se $f : V \rightarrow V$ è una isometria e V ha dimensione finita, allora f è iniettiva. Infatti, se $v \in \ker(f)$, allora $f(v) = 0_V$, quindi $g(f(v), f(v)) = g(0_V, 0_V) = 0$. Sfruttando ora il fatto che f è una isometria abbiamo: $0 = g(f(v), f(v)) = g(v, v)$, quindi $v = 0_V$.

Infine, se $\dim V = n < \infty$, per il Teorema di Dimensione f è un automorfismo.

Proposizione 6.1.3. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita. Sia $f \in \text{End}(V)$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f è una isometria di (V, g) .
2. Per una base ortonormale $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di (V, g) , anche $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base ortonormale di (V, g) .
3. $\|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in V$.

Dimostrazione. • $(1 \Rightarrow 2)$ Se $f \in \text{End}(V)$ è una isometria, e $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di (V, g) , allora $g(f(v_i), f(v_j)) = g(v_i, v_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$. Quindi $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono tutti non nulli (perché hanno norma = 1) e sono a due a due ortogonali. Quindi $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti, perciò $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base ortonormale di (V, g) .

- (2 \Rightarrow 3) Fissiamo una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$ di (V, g) . Per ipotesi anche $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base ortonormale di (V, g) . Sia ora $v \in V$. Scriviamo v come combinazione lineare dei vettori v_1, \dots, v_n : $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Allora

$$f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n).$$

Siccome $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale,

$$\|v\|^2 = g(v, v) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2.$$

Siccome anche $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è ortonormale,

$$\|f(v)\|^2 = g(f(v), f(v)) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2.$$

Ne segue che $\|v\|^2 = \|f(v)\|^2$, da cui il risultato.

- (3 \Rightarrow 1) Siano $v, w \in V$. Dalla formula di polarizzazione si ha:

$$g(f(v), f(w)) = \frac{1}{2}g(f(v) + f(w), f(v) + f(w)) - g(f(v), f(v)) - g(f(w), f(w)).$$

Si ha quindi

$$= \frac{1}{2}\|f(v) + f(w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2.$$

Per ipotesi, $\|f(u)\|^2 = \|u\|^2, \forall u \in V$, quindi

$$\frac{1}{2}\|f(v + w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2 = \frac{1}{2}\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 = g(v, w),$$

nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato la formula di polarizzazione. Ne segue che $g(f(v), f(w)) = g(v, w), \forall v, w \in V$, quindi f è una isometria. □

Proposizione 6.1.4. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita, e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di (V, g) . Sia $f \in \text{End}(V)$.

Allora f è una isometria di (V, g) se e solo se

$${}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \mathbb{I}_n.$$

Dimostrazione. Dalla precedente proposizione segue che f è una isometria $\iff g(f(v_i), f(v_j)) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$. Per definizione di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, se indichiamo con a_{ij} il suo elemento di posto (i, j) , abbiamo:

$$f(v_\ell) = a_{1\ell} v_1 + \dots + a_{n\ell} v_n, \quad \forall \ell = 1, \dots, n.$$

Quindi f è una isometria $\iff \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$. Il risultato segue ora dal fatto che $\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}$ è l'elemento di posto (i, j) della matrice ${}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. □

Definizione 6.1.5. Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ è detta ortogonale, se vale la seguente uguaglianza:

$${}^t A \cdot A = \mathbb{I}_n.$$

L'insieme delle matrici $n \times n$ ortogonali si denota con $O(n)$.

Osservazione 6.1.6. 1. $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale $\iff A$ è invertibile ed $A^{-1} = {}^t A$.

2. Sia $A \in O(n)$, allora $\det(A) = \pm 1$. Infatti, dall'uguaglianza $\mathbb{I}_n = {}^t A \cdot A$, dal teorema di Binet, sfruttando il fatto che $\det({}^t A) = \det(A)$, si ha:

$$1 = \det(\mathbb{I}_n) = \det({}^t A \cdot A) = (\det(A))^2.$$

Corollario 6.1.7. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Allora $A \in O(n) \iff L_A$ è una isometria di $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$, dove \langle, \rangle è il prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. L'enunciato segue ricordando che la base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^n è ortonormale per \langle, \rangle , e si ha $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(L_A) = A$. \square

Proposizione 6.1.8. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita n . Sia \mathcal{B} una base ortonormale di (V, g) , e sia \mathcal{C} una base di V . Allora \mathcal{C} è ortonormale $\iff M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \in O(n)$.

Dimostrazione. Osserviamo che \mathcal{C} è ortonormale $\iff M_{\mathcal{C}}(g) = \mathbb{I}_n$, dove $M_{\mathcal{C}}(g)$ è la matrice che rappresenta il prodotto scalare g rispetto alla base \mathcal{C} . Quindi:

$$M_{\mathcal{C}}(g) = {}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}(g) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V).$$

Siccome \mathcal{B} è ortonormale, $M_{\mathcal{B}}(g) = \mathbb{I}_n$, quindi la precedente formula diventa:

$$M_{\mathcal{C}}(g) = {}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V),$$

da cui segue il risultato. \square

Corollario 6.1.9. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Allora $A \in O(n)$ se e solo se le colonne di A , $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ formano una base ortonormale di \mathbb{R}^n rispetto al prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n .

6.2 Caratterizzazione delle matrici di $O(2, \mathbb{R})$

Proposizione 6.2.1. Sia $A \in O(2, \mathbb{R})$. Allora:

- se $\det(A) = 1$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tale che

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

- se $\det(A) = -1$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tale che

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2, \mathbb{R})$. Allora, per definizione, A è ortogonale se e solo se

$$\mathbb{I}_2 = {}^t A \cdot A,$$

cioè se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Dalle equazioni $a^2 + c^2 = 1$ e $b^2 + d^2 = 1$, segue che i punti $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ appartengono alla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine in \mathbb{R}^2 .

In particolare esistono $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ tali che $a = \cos \phi, c = \sin \phi, b = \cos \psi$ e $d = \sin \psi$.

Inoltre, dalla equazione $ab + cd = 0$ deduciamo

$$0 = \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi = \sin(\theta + \varphi).$$

Di conseguenza, $\theta + \varphi$ deve essere $0 + 2k\pi$ o $\pi + 2k\pi$.

Nel primo caso si ottiene la matrice R_θ ; nel secondo caso si ottiene la matrice S_θ . \square

Vediamo ora che possiamo caratterizzare anche autovalori e autospazi delle matrici di $O(2, \mathbb{R})$.

Proposizione 6.2.2. Per una matrice $M \in O(2)$ ci sono le seguenti possibilità:

- se $M = R_\theta$, essa ha autovalori reali se e solo se $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$ se e solo se $R_\theta = \pm \mathbb{I}_2$.
- Se $M = S_\theta$, essa ha sempre autovalori reali e precisamente ± 1 . Inoltre i relativi autospazi V_1 e V_{-1} sono tra loro ortogonali.

Dimostrazione. *i)* Si consideri il polinomio caratteristico di R_θ dato da

$$P_\lambda(R_\theta) = \det(R_\theta - \lambda \mathbb{I}_2) = (\cos \theta - \lambda)^2 + (\sin \theta)^2 = \lambda^2 - 2(\cos \theta)\lambda + 1.$$

Esso ha radici reali se e solo se il suo discriminante $\Delta/4 = (\cos \theta)^2 - 1 \geq 0$. Ma tale condizione equivale a $(\cos \theta)^2 - 1 = 0$; questo si verifica se e solo se $\cos \theta = \pm 1$ ovvero se e solo se $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$. L'ultima affermazione è banale. *ii)* Si osservi anzitutto che S_θ , essendo una matrice 2×2 simmetrica reale, ha due autovalori reali e, se distinti, i suoi due autospazi sono ortogonali. Per calcolare tali autovalori, si consideri il polinomio caratteristico di S_θ dato da

$$P_\lambda(S_\theta) = \det(S_\theta - \lambda \mathbb{I}_2) = \lambda^2 - 1.$$

Esso è indipendente da θ e ha sempre come radici ± 1 . □

Osservazione 6.2.3. Per comprendere il significato geometrico di R_θ , basta considerare l'automorfismo di \mathbb{R}^2 ad essa associato:

$$L_{R_\theta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definito da

$$(x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Utilizzando le coordinate polari nel dominio e nel codominio, si ha una forma esplicita più significativa. Infatti

$$r(\cos \psi, \sin \psi) \mapsto (r \cos \psi \cos \theta - r \sin \psi \sin \theta, r \cos \psi \sin \theta + r \sin \psi \cos \theta)$$

e quest'ultima espressione è esattamente $r(\cos(\psi + \theta), \sin(\psi + \theta))$. Pertanto R_θ è associata alla rotazione antioraria di angolo θ .

Vediamo ora come anche le matrici S_θ abbiano una interpretazione geometrica, e precisamente in termini di simmetrie assiali. Vediamo prima questo concetto in generale.

Definizione 6.2.4. Sia H è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n ; possiamo scrivere ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$ in modo unico come $v = v_H + v_{H^\perp}$, dove $v_H \in H$ e $v_{H^\perp} \in H^\perp$.

Si dice *simmetria rispetto a H* l'applicazione

$$\text{sy}_H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{definita da} \quad v = v_H + v_{H^\perp} \mapsto v_H - v_{H^\perp}.$$

Proposizione 6.2.5. *Con le notazioni precedenti, l'applicazione sy_H è un automorfismo ortogonale di \mathbb{R}^n ed è diagonalizzabile.*

Inoltre, se H è un iperpiano, sy_H è ortogonale non speciale.

Dimostrazione. È facile verificare che sy_H è un'applicazione lineare. Sia $s := \dim(H)$. Se $s = 0$, la tesi segue banalmente. Sia dunque $s \geq 1$ e sia $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_s)$ una base ortonormale di H . Si consideri il suo completamento a una base ortonormale $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_s, \dots, v_n)$ di \mathbb{R}^n . La matrice associata alla simmetria, rispetto a \mathcal{B} , risulta

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{sy}_H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

dove sulla diagonale compare 1 per s volte e -1 per $n - s$ volte. Tale matrice è ortogonale.

Pertanto, per la Proposizione 6.1.4, l'endomorfismo sy_H è un automorfismo ortogonale.

Infine, se H è un iperpiano, allora $s = n - 1$ e dunque $\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{sy}_H)) = -1$, pertanto la matrice è ortogonale non speciale. \square

Esempio 6.2.6. Vediamo due esempi di matrici non speciali S_{θ} nei casi $\theta = 0$ e $\theta = \pi$:

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_{\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso, il corrispondente automorfismo ortogonale di \mathbb{R}^2 è dato da $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Nel secondo caso, il corrispondente automorfismo ortogonale è dato da $(x, y) \mapsto (-x, y)$.

Le matrici S_0 e S_{π} sono associate, rispettivamente, alla simmetria rispetto a $\text{Span}(e_1)$ (asse x) e a quella rispetto a $\text{Span}(e_2)$ (asse y).

Vediamo ora che le matrici S_{θ} sono sempre associate a delle opportune simmetrie.

Proposizione 6.2.7. *Per ogni matrice del tipo S_{θ} , l'applicazione lineare associata $L_{S_{\theta}}$ è una simmetria rispetto al sottospazio $\text{sy}_{V_1} \subset \mathbb{R}^2$, dove V_1 è l'autospazio di S_{θ} associato all'autovalore 1.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_1^{\perp} = V_1 \oplus V_{-1}$. Quindi, per ogni $v \in \mathbb{R}^2$, si può scrivere $v = v_{V_1} + v_{V_{-1}}$. Da una parte, per definizione di autovettore, si ha $S_{\theta}(v_{V_1}) = v_{V_1}$ e $S_{\theta}(v_{V_{-1}}) = -v_{V_{-1}}$. Pertanto, per la linearità,

$$S_{\theta} \cdot v = v_{V_1} - v_{V_{-1}}.$$

D'altra parte, per definizione di simmetria rispetto a V_1 , si ha

$$\text{sy}_{V_1}(v) = v_{V_1} - v_{V_{-1}}.$$

\square

Osservazione 6.2.8. Determiniamo, in generale, l'autospazio V_1 di

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Una equazione cartesiana di V_1 è data da una riga del sistema lineare omogeneo

$$(S_\theta - \mathbb{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Se $\theta \neq 0$, una equazione è, ad esempio,

$$V_1 : (\cos \theta - 1)x + (\sin \theta)y = 0.$$

Possiamo, inoltre, determinare l'angolo acuto α tra V_1 e l'asse x data da $\text{Span}(e_1)$. Si ha:

$$\cos \alpha = \frac{\left| \left\langle \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right|}{\left\| \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \right\|} = \frac{|\sin \theta|}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)}}.$$

Infine, usando le formule di duplicazione $\sin \theta = 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2$ e $\cos \theta = \cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2$, si trova

$$\cos \alpha = |\cos \theta/2|,$$

quindi $\alpha = \theta/2$ se $0 < \theta \leq \pi$, e invece $\alpha = \pi - \theta/2$ se $\pi \leq \theta < 2\pi$.

Le seguenti semplici proprietà sono lasciate come esercizio (alcune di queste possono essere dimostrate utilizzando note formule trigonometriche).

Proposizione 6.2.9. *Comunque scelti θ e φ , valgono:*

- i) $S_\theta S_\varphi = R_{\theta-\varphi} \in SO(2)$;
- ii) $R_\theta R_\varphi = R_{\varphi+\theta} \in SO(2)$;
- iii) $R_\theta S_\varphi = S_{\varphi+\theta} \notin SO(2)$;
- iv) $S_\varphi R_\theta = S_{\varphi-\theta} \notin SO(2)$;
- v) $S_{2\theta} = R_\theta S_0 R_{-\theta}$.

In particolare, la composizione di una rotazione e di una simmetria non è commutativa.

Dalla ii) segue che $SO(2)$ è un gruppo abeliano (però $SO(n)$ non è abeliano per $n \geq 3$).

Diamo soltanto lo schema della dimostrazione del teorema, senza entrare in tutti i dettagli, che comunque non sono difficili.

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione su $n = \dim V$.

La base dell'induzione consiste nei casi $n = 1$ e $n = 2$. Se $n = 1$, una matrice ortogonale è uguale a (1) o a (-1) , quindi del tipo (6.3.1). Se $n = 2$, fissata una base ortonormale di V , f è rappresentata da una matrice del tipo R_α o S_α . Nel primo caso abbiamo uno dei blocchi 2×2 della (6.3.1), nel secondo caso la matrice è diagonalizzabile con autovalori $1, -1$; prendendo due versori v_1, v_2 nei relativi autospazi, otteniamo una base ortonormale rispetto a cui la matrice di f è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Per dimostrare il passo induttivo, avremo bisogno del seguente lemma.

Lemma 6.3.2. *Sia V un \mathbb{R} -spazio vettoriale di dimensione finita, e sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Allora esiste un sottospazio vettoriale $W \subset V$, con $\dim W = 1$ o $\dim W = 2$, tale che $f(W) \subset W$; un tale sottospazio è detto invariante rispetto a f .*

Idea della dimostrazione del Lemma. Se f ha un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$, sia v un suo autovettore: $f(v) = \lambda v$. Allora $W = \langle v \rangle$ ha dimensione 1 ed è invariante per f , perchè $f(cv) = cf(v) = c\lambda v \in W$.

Altrimenti, se f non ha autovalori reali, sia \mathcal{B} una base di V e sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, matrice reale $n \times n$. Passiamo quindi all'ambiente complesso, considerando l'applicazione lineare

$$L_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad z \rightarrow A \cdot z.$$

Ora, poichè siamo su \mathbb{C} , l'applicazione L_A ha almeno un autovalore (non reale) $\lambda \in \mathbb{C}$; infatti, λ è una radice complessa di $p_{L_A}(x) = p_A(x)$, polinomio a coefficienti reali perchè A è reale.

Si provano ora i seguenti fatti:

1. anche il numero complesso coniugato $\bar{\lambda}$ è radice di $p_A(x)$ ed è dunque autovalore di L_A ;
2. fissato v un autovettore di λ , allora il suo coniugato \bar{v} è un autovettore di $\bar{\lambda}$, e v, \bar{v} sono linearmente indipendenti;
3. i vettori $v + \bar{v}, i(v - \bar{v})$ sono reali, linearmente indipendenti e generano un sottospazio W' di \mathbb{R}^n invariante per $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ovvero $L_A(W') \subset W'$;
4. consideriamo l'isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$; in questo isomorfismo W' corrisponde a un sottospazio W di V invariante per f , di dimensione 2.

Questo conclude la dimostrazione del Lemma. □

Torniamo a $f : V \rightarrow V$ isometria lineare, con $\dim V = n > 2$. Per il Lemma precedente esiste un sottospazio $W \subset V$ invariante per f di dimensione 1 o 2, ovvero tale che $f(W) \subset W$. Siccome f è un isomorfismo, $\dim W = \dim f(W)$, e perciò $f(W) = W$. Da ciò si dimostra che anche $f(W^\perp) = W^\perp$.

Ora possiamo considerare le restrizioni

$$f|_W : W \rightarrow W, \quad f|_{W^\perp} : W^\perp \rightarrow W^\perp;$$

entrambi gli endomorfismi ristretti risultano delle isometrie. Possiamo quindi prendere due basi ortonormali \mathcal{B}_1 di W come nella base dell'induzione, e \mathcal{B}_2 di W^\perp come da ipotesi induttiva; essendo $V = W \oplus W^\perp$, l'unione di \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 è una base \mathcal{B} ortonormale di V , e $M_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice a blocchi della forma

$$\left(\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{B}_1}(f|_W) & 0 \\ \hline 0 & M_{\mathcal{B}_2}(f|_{W^\perp}) \end{array} \right)$$

come richiesto dal teorema. □

Corollario 6.3.3 (Corollario per le matrici ortogonali). *Se A è una matrice ortogonale, allora esiste una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}AS = {}^tSAS$ è della forma descritta dal Teorema 6.3.1.*

6.4 Isometrie lineari di \mathbb{R}^3

Applichiamo il teorema appena visto al caso $n = 3$.

In questo caso il polinomio caratteristico $p_f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ha grado 3, dunque può avere o 3 radici reali, o una radice reale e due radici complesse coniugate.

In ogni caso f ha almeno un autovalore reale λ_1 ; affermiamo che λ_1 è uguale a 1 o a -1 . Questo vale, in generale, per gli autovalori reali di isometrie lineari per il seguente risultato.

Lemma 6.4.1. *Sia $A \in O(n)$, e sia $\lambda \in Sp(A)$. Allora $\lambda = \pm 1$.*

Dimostrazione. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un autovettore di A relativo all'autovalore λ , quindi $v \neq 0$ e $A \cdot v = \lambda v$. Poiché $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una isometria, abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$\langle v, v \rangle = \langle A \cdot v, A \cdot v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle.$$

Siccome $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 \neq 0$, segue che $\lambda^2 = 1$, da cui il risultato. □

Torniamo al caso $n = 3$; sia v_1 un versore autovettore di λ_1 ; allora

$$W := \text{Span}(v_1)^\perp$$

ha dimensione 2 ed è invariante: $f(W) = W$. Presa una base ortonormale \mathcal{B}' di W formata da v_2, v_3 , la matrice di f rispetto a $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è del tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & A' & \end{pmatrix}$$

dove A' rappresenta $f|_W$ rispetto a \mathcal{B}' , dunque $A' \in O(2)$.

Ora distinguiamo i seguenti casi:

1. $\det(A) = 1, \lambda_1 = -1$: allora $\det(A') = -1$ e la forma normale è $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$:

rotazione di π intorno all'asse y ;

2. $\det(A) = 1, \lambda_1 = 1$: allora $\det(A') = 1$ e la forma normale è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$:

rotazione di α intorno all'asse x ;

3. $\det(A) = -1, \lambda_1 = 1$: allora $\det(A') = -1$ e la forma normale è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: riflessione

rispetto al piano xy che è fisso, ed è l'autospazio di autovalore 1;

4. $\det(A) = -1, \lambda_1 = -1$: allora $\det(A') = 1$ e la forma normale è $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Nei due casi in cui $\det(A) = 1$, abbiamo una rotazione intorno a un asse, in effetti il gruppo ortogonale speciale $SO(3)$ è detto anche gruppo delle rotazioni di \mathbb{R}^3 .

6.5 Isometrie degli spazi affini euclidei

Definizione 6.5.1. Si dice *isometria affine* dello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ una affinità f la cui parte lineare $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una isometria lineare. L'insieme delle isometrie di \mathbb{E}^n si denota con $\text{Iso}(\mathbb{E}^n)$.

Proposizione 6.5.2. *L'insieme $\text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ è un gruppo rispetto alla composizione, ed è un sottogruppo di $\text{Aff}(\mathbb{E}^n)$.*

Dimostrazione. Basta ricordare che le isometrie lineari di \mathbb{R}^n costituiscono un sottogruppo di $GL(n)$, che è infatti il gruppo ortogonale $O(n)$. \square

Si osservi che, in quanto affinità, una isometria $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ in un riferimento cartesiano (O, \mathcal{B}) ammette un'equazione matriciale del tipo

$${}^tY = M{}^tX + {}^tC,$$

con $M = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \in O(n, \mathbb{R})$, tX e tY colonne delle coordinate del generico punto $P \in \mathbb{E}^n$ e di $f(P) \in \mathbb{E}^n$, mentre tC rappresenta la colonna delle coordinate di $C = f(O)$.

Esempio 6.5.3. Un immediato esempio di isometria è dato dalle traslazioni.

Infatti, abbiamo osservato che un'affinità $f \in \text{Aff}(\mathbb{E}^n)$ di equazione $Y = MX + C$ è una traslazione se e solo se $M = \mathbb{I}_n$. In tal caso $f = t_v$, dove $v = \overrightarrow{Of(O)}$. Avendo $\mathbb{I}_n \in O(n)$, l'affermazione è verificata.

Le "proprietà euclidee", cioè quelle che vengono mantenute per isometria, sono le distanze e gli angoli.

Proposizione 6.5.4. *Sia $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ . Allora, per ogni $P, Q \in \mathbb{E}^n$ vale*

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q)).$$

Dimostrazione. Per definizione

$$d(P, Q)^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2$$

e, analogamente, tenendo conto che f è un'affinità di parte lineare φ ,

$$d(f(P), f(Q))^2 = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\|^2 = \|\varphi(\overrightarrow{PQ})\|^2.$$

Si conclude osservando che $\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\varphi(\overrightarrow{PQ})\|^2$ perché φ è un'isometria lineare. \square

Vediamo ora che le isometrie affini conservano gli angoli tra rette.

Proposizione 6.5.5. *Sia $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ . Allora, se r e s sono due rette di \mathbb{E}^n , si ha*

$$\widehat{r\hat{s}} = \widehat{f(r)f(s)}.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che l'angolo $\theta = \widehat{rs}$ è individuato da

$$\cos \theta = \frac{|\langle v_r, v_s \rangle|}{\|v_r\| \|v_s\|}.$$

L'angolo $\theta' = \widehat{f(r)f(s)}$ è individuato da

$$\cos \theta' = \frac{|\langle \varphi(v_r), \varphi(v_s) \rangle|}{\|\varphi(v_r)\| \|\varphi(v_s)\|}.$$

Essendo φ un'isometria lineare, si ha

$$\langle \varphi(v_r), \varphi(v_s) \rangle = \langle v_r, v_s \rangle, \quad \|\varphi(v_r)\| = \|v_r\|, \quad \|\varphi(v_s)\| = \|v_s\|$$

e quindi $\cos \theta = \cos \theta'$. □

Terminiamo con un risultato sui cambi di riferimenti cartesiani in \mathbb{E}^n .

Teorema 6.5.6. *Siano $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ e $\Sigma' = (O', \mathcal{B}')$ due riferimenti cartesiani di \mathbb{E}^n e siano (c_1, \dots, c_n) le coordinate del punto O nel riferimento Σ' .*

Se un punto $P \in \mathbb{E}^n$ ha coordinate (x_1, \dots, x_n) rispetto a Σ e coordinate (y_1, \dots, y_n) rispetto a Σ' , allora, posti

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_{\mathbb{R}^n})$$

si ha

$$Y = AX + C.$$

6.6 Classificazione delle isometrie del piano

Tenuto conto della Proposizione 6.2.1, abbiamo una prima suddivisione delle isometrie del piano.

Definizione 6.6.1. *Sia $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^2)$ data dall'equazione, rispetto a un riferimento cartesiano (O, \mathcal{B}) ,*

$$Y = MX + C, \quad M \in O(2).$$

Se $M = R_\theta \in SO(2)$, diremo che f è una isometria diretta o rototraslazione. Se invece $M = S_\theta$, diremo che f è una isometria inversa.

Vediamo alcuni casi particolari.

Esempio 6.6.2. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano $(O; v_1, \dots, v_n)$.

Se $C = O$, allora un'isometria affine di equazione $Y = MX$ può essere identificata con una rotazione di tipo R_θ o con una simmetria di tipo S_θ , a seconda che $M = R_\theta$ o $M = S_\theta$.

Definizione 6.6.3. Una rotazione di angolo θ e di centro il punto P_0 è l'isometria

$$\rho_{\theta, P_0} := t_w \circ R_{\theta, O} \circ t_{-w}$$

dove $w = \overrightarrow{OP_0}$ e $R_{\theta, O}$ indica l'affinità che fissa l'origine O e con parte lineare R_θ .

Osservazione 6.6.4. Determiniamo la forma matriciale di ρ_{θ, P_0} . Ricordiamo che dato un vettore $v\overrightarrow{OP_0}$, si ha

$$t_v(P) = P + P_0, \quad t_{-v}(P) = P - P_0,$$

dove con $P + P_0$ intendiamo il punto di coordinate date dalla somma delle coordinate di P e di quelle di P_0 . Pertanto l'equazione di ρ_{θ, P_0} risulta

$$Y = P_0 + R_\theta(X - P_0)$$

o anche

$$Y = R_\theta X + (\mathbb{I}_2 - R_\theta)P_0.$$

Dunque ρ_{θ, P_0} è una rototraslazione.

Come vedremo nel Teorema di classificazione, le traslazioni e le rotazioni di dati angolo e centro sono le uniche isometrie dirette.

Definizione 6.6.5. Data una retta affine $r \subset \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$, la simmetria σ_r di asse r è

$$\sigma_r = t_w \circ S_\theta \circ t_{-w}$$

dove $w = \overrightarrow{OP_0}$, $P_0 \in r$ e S_θ è la matrice associata alla simmetria lineare con autospazio V_1 uguale alla giacitura W_r di r :

$$V_1 = W_r.$$

Osservazione 6.6.6. Data una simmetria assiale affine σ_r , la retta r risulta una retta di punti fissi, e una qualunque retta s ortogonale a r è invariante per σ_r , cioè

$$\sigma_r(s) = s.$$

Infatti, fissato un sistema di riferimento cartesiano $(O; v_1, \dots, v_n)$, un'equazione per σ_r è data da

$$\sigma_r(X) = S_\theta(X - P_0) + P_0.$$

Se r è data dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + l_1 t \\ x_2 = p_2 + l_2 t' \end{cases}$$

dove $P_0 = (p_1, p_2)$, il suo generico punto $Q = (q_1, q_2)$ verifica

$$\sigma_r(Q) = S_\theta(Q - P_0) + P_0 = t S_\theta \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} + P_0.$$

Essendo $W_r = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right) = V_1$, si ha

$$S_\theta \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix},$$

quindi $\sigma_r(Q) = Q$.

Inoltre, se $s \perp r$, la giacitura di s corrisponde all'autospazio V_{-1} corrispondente all'autovalore -1 di S_θ , quindi delle equazioni parametriche per s sono date da

$$\begin{cases} x_1 = q_1 - l_2 t \\ x_2 = q_2 + l_1 t' \end{cases}$$

dove $Q = (q_1, q_2) = r \cap s$ e per il generico punto $R = (r_1, r_2) \in s$ si ha

$$\sigma_r(R) = S_\theta(R - P_0) + P_0 = S_\theta(Q - P_0) + t S_\theta \cdot \begin{pmatrix} -l_2 \\ l_1 \end{pmatrix} + P_0 = S_\theta(Q - P_0) + t \begin{pmatrix} l_2 \\ -l_1 \end{pmatrix} + P_0.$$

Ricordiamo ora che $Q - P_0$ sono le coordinate del vettore $\overrightarrow{P_0 Q} \in W_r = V_1$, quindi possiamo ancora scrivere

$$\sigma_r(R) = Q - P_0 + t \begin{pmatrix} l_2 \\ -l_1 \end{pmatrix} + P_0 = Q + t \begin{pmatrix} l_2 \\ -l_1 \end{pmatrix},$$

ed essendo

$$\begin{pmatrix} l_2 \\ -l_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_2 \\ l_1 \end{pmatrix},$$

vediamo che $\sigma_r(R) \in s$.

Osserviamo, infine che $d(R, Q) = d(\sigma_r(R), Q)$. Diciamo che $\sigma_r(R)$ è il punto simmetrico di R rispetto all'asse r .

Definizione 6.6.7. Sia $r \subset \mathbb{E}^2$ una retta e v un vettore parallelo a r ; si dice *glissoriflessione* rispetto a r e v l'isometria definita da

$$gl_{r,v} := t_v \circ \sigma_r.$$

Teorema 6.6.8. (Classificazione delle isometrie del piano euclideo) Sia f un'isometria di \mathbb{E}^2 . Allora f è uno dei seguenti tipi:

- Se f ha almeno un punto fisso, allora

$$f = \rho_{\theta, P_0}, \quad \text{oppure} \quad f = \sigma_r.$$

Nel primo caso f ha esattamente un punto fisso, il centro di rotazione; nel secondo caso f ha una retta di punti fissi, l'asse r della simmetria.

- Se f non ha punti fissi, allora

$$f = t_v, \quad \text{oppure} \quad f = gl_{r,v},$$

dove $v \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.

Dimostrazione. • Scriviamo f in coordinate

$$Y = MX + C, \tag{6.6.1}$$

e supponiamo che f abbia almeno un punto fisso P_0 :

$$P_0 = MP_0 + C.$$

Questa relazione implica che

$$C = (\mathbb{I}_2 - M)P_0.$$

Sostituendo in (6.6.1) otteniamo

$$Y = MX + (\mathbb{I}_2 - M)P_0,$$

ovvero

$$Y = M(X - P_0) + P_0. \tag{6.6.2}$$

Infine, essendo $M \in O(2, \mathbb{R})$, essa è del tipo $M = R_\theta$ oppure $M = S_\theta$, e l'espressione (6.6.2) rappresenta proprio ρ_{θ, P_0} , rispettivamente σ_r .

• Supponiamo ora che f non abbia punti fissi, cioè che l'equazione $X = MX + C$ non abbia soluzioni in $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$. Ciò equivale a dire che il sistema lineare

$$(\mathbb{I}_2 - M)X = C$$

non è compatibile. Dal Teorema di Rouché - Capelli questo accade se e solo se

$$\text{rg}(\mathbb{I}_2 - M) \neq \text{rg}(\mathbb{I}_2 - M \mid C).$$

Essendo la matrice completa $(\mathbb{I}_2 - M \mid C)$ di tipo 2×3 , abbiamo solo due possibilità:

1. $\text{rg}(\mathbb{I}_2 - M) = 0 < 1 = \text{rg}(\mathbb{I}_2 - M \mid C)$; questo equivale a dire che

$$M = \mathbb{I}_2, \quad C \neq (0, 0),$$

cioè f è una traslazione di un vettore non nullo;

2. $\text{rg}(\mathbb{I}_2 - M) = 1 < 2 = \text{rg}(\mathbb{I}_2 - M \mid C)$; questo implica che 1 è un autovalore di M e $\dim V_1 = \dim \ker(\mathbb{I}_2 - M) = 1$; per la classificazione delle isometrie lineari, vediamo che questo è possibile solo se $M = S_\theta$ per un θ opportuno. Inoltre, $\text{rg}(\mathbb{I}_2 - M \mid C)$ ci assicura che C non è combinazione lineare delle colonne di $\mathbb{I}_2 - S_\theta$; si può verificare facilmente che, geometricamente, ciò corrisponde al fatto che il vettore tC non appartiene a $V_1^\perp = V_{-1}$, dove V_1 e V_{-1} sono i due autospazi di S_θ .

Quindi, se scriviamo

$${}^tC = v_1 + v_{-1}, \quad v_1 \in V_1, \quad v_{-1} \in V_{-1},$$

abbiamo $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Inoltre, possiamo scrivere

$$Y = S_\theta X + v_1 + v_{-1} = S_\theta X + v_1 + 2\frac{v_{-1}}{2} = S_\theta(X - \frac{1}{2}v_{-1}) + \frac{1}{2}v_{-1} + v_1,$$

quindi f è del tipo

$$f = t_v \circ \sigma_r,$$

con r retta di giacitura $W_r = V_1$ e passante per il punto $\frac{1}{2}{}^t v_{-1}$, e $v = v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.

□

Infine, vediamo un risultato che ci mostra che le simmetrie sono delle trasformazioni che ci permettono di trovare tutte le isometrie affini.

Teorema 6.6.9. *Ogni isometria affine del piano è una composizione finita di simmetrie affini.*

Dimostrazione. Consideriamo dapprima le traslazioni t_v lungo un vettore non nullo v . Poniamo

$$c := \|v\|/2.$$

Siano r e s due rette ortogonali a v tali che $d(r, s) = c$ e siano σ_r e σ_s le riflessioni corrispondenti.

Vogliamo provare che

$$t_v = \sigma_s \circ \sigma_r \quad \text{oppure} \quad t_v = \sigma_r \circ \sigma_s.$$

Non è restrittivo scegliere un riferimento cartesiano tale che le due rette abbiano equazione

$$r : x = 0, \quad s : x = c.$$

Si osservi che, in tale riferimento, $v = (\pm 2c, 0)$ e le riflessioni sono

$$\sigma_r(x, y) = (-x, y), \quad \sigma_s(x, y) = (2c - x, y).$$

Dunque

$$\sigma_r(\sigma_s(x, y)) = \sigma_r(2c - x, y) = (x - 2c, y) = (x, y) + (-2c, 0)$$

e quindi $\sigma_r \circ \sigma_s$ è la traslazione lungo il vettore $(-2c, 0)$. Analogamente

$$\sigma_s(\sigma_r(x, y)) = \dots = (x, y) + (2c, 0)$$

e quindi $\sigma_s \circ \sigma_r$ è la traslazione lungo il vettore $(2c, 0)$. Questo conclude la dimostrazione.

Passiamo ora alle rotazioni del tipo ρ_{θ, P_0} . Ricordiamo che per la Proposizione 6.2.9 abbiamo

$$S_\alpha \cdot S_\beta = R_{\alpha-\beta};$$

in particolare, possiamo scrivere $R_\theta = S_\theta \cdot S_0$, da cui $\rho_{\theta, P_0} = t_w \circ R_\theta \circ t_{-w} = t_w \circ S_\theta \cdot S_0 \circ t_{-w}$, e si conclude perché abbiamo già dimostrato la tesi per le traslazioni.

Consideriamo, infine, le glissoriflessioni: sono del tipo $gl_{r, v} = t_v \circ \sigma_r$, dove r è una retta e v un vettore direzionale di r ; si conclude nuovamente perché abbiamo già dimostrato la tesi per le traslazioni. \square

Come nel caso delle isometrie del piano, anche lo studio delle isometrie dello spazio euclideo si fonda sulla descrizione delle matrici ortogonali reali 3×3 .

Enunciamo, senza dimostrarlo, l'analogo risultato di classificazione delle isometrie affini in \mathbb{E}^3 (Eulero, 1776).

Teorema 6.6.10. (Classificazione delle isometrie dello spazio affine euclideo) Sia f un'isometria di \mathbb{E}^3 espressa, in un riferimento cartesiano ortogonale, da $Y = f(X)$ dove

$$Y = AX + C,$$

con $A \in O(3)$ e $C \in \mathbb{E}^3$. Allora f è uno dei seguenti tipi:

1. traslazione t_v (diretta, senza punti fissi);
2. riflessione ρ_π (inversa, con un piano fisso π che è l'asse della riflessione);
3. rotazione $\sigma_{r,\theta}$ (diretta, con una retta fissa r che è l'asse della rotazione di angolo θ);
4. glissoriflessione $gl_{\pi,v} = t_v \circ \rho_\pi$ (inversa senza punti fissi, con v vettore parallelo a π);
5. glissorotazione $t_v \circ \sigma_{r,\theta}$ (diretta senza punti fissi, con v vettore parallelo a r);
6. riflessione rotatoria $\rho_\pi \circ \sigma_{r,\theta}$ (inversa, con un punto fisso, con r retta ortogonale al piano π).

Capitolo 7

Geometria proiettiva

7.1 Motivazioni e considerazioni preliminari

La geometria proiettiva è la parte della geometria che modella i concetti intuitivi di prospettiva e orizzonte, e si può pensare come la geometria “vista da un occhio”.

Infatti, informalmente, può essere pensata come la geometria che nasce dal collocare il proprio occhio in un punto dello spazio, così che ogni linea che intersechi l’“occhio” appaia solo come un punto. Le grandezze degli oggetti non sono direttamente quantificabili (perché guardando il mondo con un occhio soltanto non abbiamo informazioni sulla profondità) e l’orizzonte è considerato parte integrante dello spazio.

L’origine della geometria proiettiva è legata all’artista e matematico francese, Girard Desargues (1591-1661), che cercava una via alternativa per il disegno in prospettiva, che generalizzasse l’uso dei punti di fuga e includesse il caso in cui questi sono infinitamente lontani. Egli inquadrò quindi la geometria euclidea all’interno di un sistema geometrico più generale.

Il passaggio dalla geometria analitica a quella proiettiva si effettuò sostituendo le usuali coordinate cartesiane (ad esempio del piano cartesiano) con delle nuove coordinate, dette coordinate omogenee. Tramite queste coordinate, lo spazio (ad esempio, il piano) si arricchì di alcuni “punti all’infinito”, che la geometria proiettiva considera punti a tutti gli effetti, indistinguibili dai punti “propri” (da cui il carattere omogeneo del nuovo spazio, in cui tutti i punti hanno lo stesso ruolo).

I matematici del XIX secolo si resero conto che in questo nuovo contesto “omogeneo” molti teoremi risultavano più semplici ed eleganti: questo grazie alla scomparsa di molti “casi eccezionali”, generati da configurazioni particolari (quali ad esempio quella di due rette parallele nel piano), proprie della geometria euclidea ma assenti nella proiettiva. In

particolare lo studio delle curve risultava semplificato nel contesto proiettivo: tramite l'utilizzo dell'algebra lineare vennero classificate le coniche, e matematici come Julius Plücker iniziarono a rappresentare le curve come punti di altri spazi proiettivi, generalmente più grandi.

I matematici che per primi introdussero la geometria proiettiva, tra cui Poncelet e Steiner, non intendevano inizialmente estendere la geometria analitica. Le tecniche di dimostrazione erano inizialmente sintetiche, cioè simili a quelle di Euclide, senza l'ausilio dell'algebra, e lo spazio proiettivo era introdotto su base assiomatica, con assiomi simili a quelli di Euclide.

Vedremo in questo capitolo una costruzione rigorosa degli spazi proiettivi, basata sull'Algebra Lineare. Prima di introdurre le definizioni in grande generalità, vediamo degli esempi semplici che possono aiutare la comprensione delle idee di base.

Esempio 7.1.1. Consideriamo due rette affini piane parallele, quindi con la stessa giacitura; siccome un'equazione cartesiana della giacitura di una retta piana è data dall'equazione omogenea associata, e siccome un'equazione cartesiana di una retta piana è determinata a meno di un fattore di proporzionalità, senza perdere in generalità, possiamo supporre che le due rette abbiano equazioni

$$\begin{aligned} r : \quad ax + by + c = 0, \quad W_r : \quad ax + by = 0 \\ s : \quad ax + by + c' = 0 \quad W_s : \quad ax + by = 0. \end{aligned}$$

Abbiamo

$$W_r = W_s = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right).$$

Vorremmo ampliare il piano affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ in modo che la direzione delle due rette $\text{Span} \left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right)$ corrispondesse a un nuovo punto, un "punto all'infinito", o un "punto sull'orizzonte".

Un possibile modo è dato dalla introduzione di una nuova variabile x_0 e di una modifica delle equazioni cartesiane delle due rette, e precisamente l'*omogeneizzazione* delle due equazioni:

$$\begin{aligned} r : \quad ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0, \\ s : \quad ax_1 + bx_2 + c'x_0 = 0. \end{aligned}$$

Chiameremo questa trasformazione omogeneizzazione, in quanto abbiamo trasformato i due polinomi lineari $ax + by + c$ e $ax + by + c'$ in due polinomi omogenei.

Osserviamo che una terna di numeri reali $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ con $\bar{x}_0 \neq 0$ soddisfa $a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 + c\bar{x}_0 = 0$ se e solo se

$$a \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} + b \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_0} + c = 0,$$

quindi se e solo se $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_0 \end{pmatrix} \in r$.

Analogamente, $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ con $\bar{x}_0 \neq 0$ soddisfa $a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 + c'\bar{x}_0 = 0$ se e solo se

$$a\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} + b\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_0} + c' = 0,$$

quindi se e solo se $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_0 \end{pmatrix} \in s$.

Possiamo quindi considerare una corrispondenza tra le terne $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ con $\bar{x}_0 \neq 0$ che verificano $a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 + c'\bar{x}_0 = 0$ e i punti di r ; questa corrispondenza non è iniettiva, in quanto due terne proporzionali danno luogo a uno stesso punto di r :

$$(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (\lambda\bar{x}_0, \lambda\bar{x}_1, \lambda\bar{x}_2), \quad \bar{x}_0 \neq 0, \lambda \neq 0 \iff \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_0 \end{pmatrix}.$$

Quando, invece, $\bar{x}_0 = 0$, le terne di numeri reali $(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ che soddisfano $a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 = 0$ sono del tipo

$$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, \lambda(-b), \lambda a),$$

cioè sono in biiezione con i vettori della giacitura $W_r = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right) = W_s$.

Queste considerazioni ci suggeriscono che, se vogliamo identificare una direzione con un punto in un opportuno spazio e vogliamo definire una retta ampliata in cui ci sia una biiezione tra i punti non corrispondenti al punto direzione e i punti di una retta affine, una scelta naturale consiste nel considerare *terne di numeri reali a meno di un fattore di proporzionalità*.

Il passo successivo è quello di capire se la relazione di proporzionalità tra vettori di \mathbb{R}^3 sia una relazione di equivalenza.

Osservazione 7.1.2. Consideriamo lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 e la relazione

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : w = \lambda v.$$

Vediamo subito che non si tratta di una relazione di equivalenza, in quanto manca la proprietà riflessiva; infatti, ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \not\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \nexists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se, invece, consideriamo la stessa relazione su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, si verifica facilmente che la relazione

$$v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}, \quad v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : w = \lambda v$$

è una relazione di equivalenza.

Le considerazioni appena viste motivano le seguenti definizioni generali, che possono essere introdotte in spazi vettoriali generali, su campi arbitrari.

7.2 Spazi proiettivi

Definizione 7.2.1. Sia V uno spazio vettoriale non nullo su un campo \mathbb{K} .

Nell'insieme $V \setminus \{0_V\}$ consideriamo la relazione:

$$v \sim v' \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : v = \lambda v'.$$

Si prova facilmente che \sim è una relazione d'equivalenza; le classi d'equivalenza sono le rette vettoriali di V private del vettore nullo.

Denoteremo l'insieme quoziente con

$$\mathbb{P}(V) := \frac{V \setminus \{0\}}{\sim}.$$

e con $\pi : V \setminus \{0_V\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ l'applicazione suriettiva, detta *proiezione canonica*, definita da

$$\pi(v) = [v].$$

L'insieme quoziente $\mathbb{P}(V)$ si dice *spazio proiettivo su V* .

Definizione 7.2.2. Se $\dim V = n \geq 1$, poniamo per definizione

$$\dim \mathbb{P}(V) := n - 1 = \dim V - 1.$$

Esempio 7.2.3. Se $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 1$ allora $\mathbb{P}(V)$ ha dimensione 0 e consiste di un solo punto.

Definizione 7.2.4. Se $V = \mathbb{K}^{n+1}$, denotiamo $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ con $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ che viene detto *n -spazio proiettivo standard*.

In particolare, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ è detta *retta proiettiva reale standard*, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ è detto *piano proiettivo reale standard*, ecc.

I punti di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, che sono del tipo $[{}^t(x_0, \dots, x_n)]$, con ${}^t(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{n+1}}\}$, vengono denotati semplicemente con $[x_0 : \dots : x_n]$.

Vediamo ora come possiamo associare delle coordinate o un punto di uno spazio proiettivo; l'idea è di fissare una base dello spazio vettoriale, e considerare le coordinate di un vettore che rappresenta la classe di proporzionalità. Con questa scelta, le coordinate di un punto non sono univocamente determinate, ma lo sono a meno di un fattore di proporzionalità.

Definizione 7.2.5. Un sistema di riferimento proiettivo in $\mathbb{P}(V)$ è la scelta di una base $\mathcal{B} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ dello spazio vettoriale V . In tal modo, per ogni $v \in V \setminus \{0_V\}$,

$$v = x_0v_0 + \dots + x_nv_n, \quad (x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0).$$

Diciamo dunque che gli $n + 1$ scalari x_0, \dots, x_n sono le *coordinate omogenee* del punto $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$ e scriviamo

$$P = (x_0 : \dots : x_n).$$

I punti

$$E_0 = [v_0], \dots, E_n = [v_n], \quad U = [v_0 + \dots + v_n]$$

si dicono, rispettivamente, punti fondamentali e punto unità del riferimento.

Osservazione 7.2.6. Le coordinate omogenee di un punto sono definite a meno di una costante non nulla di proporzionalità. Infatti, si considerino i vettori non nulli di V :

$$v = x_0v_0 + \dots + x_nv_n, \quad v' = \lambda v = \lambda x_0v_0 + \dots + \lambda x_nv_n, \quad \lambda \neq 0.$$

Osserviamo che se $v \sim v'$, cioè $[v] = [v']$ e quindi ne segue che

$$(x_0 : \dots : x_n) = (\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n).$$

Quindi uno stesso punto ha infinite $(n+1)$ -uple di coordinate omogenee, tutte proporzionali. Come conseguenza, due basi proporzionali di V individuano lo stesso riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ e dunque ogni punto ha le stesse coordinate omogenee in entrambi i riferimenti.

Dalla definizione di sistema di riferimento proiettivo si ha immediatamente il seguente risultato, che enunciamo per semplicità per gli spazi proiettivi standard.

Proposizione 7.2.7. Siano dati in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ due riferimenti proiettivi associati alle basi $\mathcal{B} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v'_0, v'_1, \dots, v'_n\}$ dello spazio vettoriale \mathbb{K}^{n+1} .

Sia $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ avente per coordinate omogenee $(x_0 : \dots : x_n)$ rispetto a \mathcal{B} e $(x'_0 : \dots : x'_n)$ rispetto a \mathcal{B}' . Si denotino le colonne di tali coordinate con

$$X := {}^t(x_0, \dots, x_n), \quad X' := {}^t(x'_0, \dots, x'_n) \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Se $A := M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ è la matrice di cambio di base avente sulle colonne le componenti dei vettori di \mathcal{B} rispetto a \mathcal{B}' allora si ha

$$X' = \lambda AX, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Esempio 7.2.8. Nella retta proiettiva $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ ci sono due punti fondamentali $E_0 = (1 : 0)$, $E_1 = (0 : 1)$ e il punto unità $U = (1 : 1)$.

Nel piano $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ con il riferimento proiettivo associato alla base canonica, i tre punti fondamentali sono $E_0 = (1 : 0 : 0)$, $E_1 = (0 : 1 : 0)$, $E_2 = (0 : 0 : 1)$ e il punto unità $U = (1 : 1 : 1)$.

Nello spazio proiettivo \mathbb{P}^3 i punti fondamentali sono quattro e precisamente $E_0 = (1 : 0 : 0 : 0)$, $E_1 = (0 : 1 : 0 : 0)$, $E_2 = (0 : 0 : 1 : 0)$, $E_3 = (0 : 0 : 0 : 1)$, mentre il punto unità è $U = (1 : 1 : 1 : 1)$.

7.3 Sottospazi proiettivi

La definizione di sottospazio proiettivo è associata a quella di sottospazio vettoriale.

Definizione 7.3.1. Se W è un sottospazio non nullo di V , diciamo che $\pi(W \setminus \{0_V\})$ è un *sottospazio proiettivo* di $\mathbb{P}(V)$ e lo denoteremo con $\mathbb{P}(W)$.

Diremo *dimensione* di $\mathbb{P}(W)$ il numero non negativo

$$\dim \mathbb{P}(W) := \dim_{\mathbb{K}} W - 1$$

e *codimensione* di $\mathbb{P}(W)$ in $\mathbb{P}(V)$ il numero non negativo

$$\text{codim } \mathbb{P}(W) := \dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W).$$

In particolare, si dicono *iperpiani* i sottospazi proiettivi di codimensione 1, *rette* quelli di dimensione 1, *piani* quelli di dimensione 2.

Vediamo ora che, analogamente al caso di intersezioni di sottospazi vettoriali e di sottospazi affini, l'intersezione di sottospazi proiettivi, se non vuota, è ancora un sottospazio proiettivo.

Proposizione 7.3.2. Se U e W sono sottospazi vettoriali di V e se $\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) \neq \emptyset$, allora

$$\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(U \cap W).$$

Dimostrazione. Immediata, dalla costruzione dello spazio proiettivo. □

Osservazione 7.3.3. Osserviamo che

$$\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \emptyset \iff U \cap W = \{0_V\}.$$

Infatti si ha

$$\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) \neq \emptyset \iff \exists [v] \in \mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(U \cap W) \iff \exists v \in U \cap W, v \neq 0_V \iff \dim U \cap W \geq 1.$$

Di conseguenza $\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \emptyset \iff \dim(U \cap W) = 0$.

Vediamo ora una versione proiettiva della Formula di Grassmann. Ricordiamo prima la relazione di Grassmann per sottospazi vettoriali.

Teorema 7.3.4. *Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale e U, W suoi sottospazi vettoriali. Allora*

$$\dim_{\mathbb{K}}(U + W) = \dim_{\mathbb{K}}(U) + \dim_{\mathbb{K}}(W) - \dim_{\mathbb{K}}(U \cap W).$$

Da tale relazione si deduce l'analogo risultato per sottospazi proiettivi.

Teorema 7.3.5. *Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e $\mathbb{P}(U), \mathbb{P}(W)$ suoi sottospazi proiettivi. Allora si ha*

$$\dim \mathbb{P}(U + W) = \dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) - \dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)).$$

Dimostrazione. Basta osservare che $\dim \mathbb{P}(U + W) = \dim_{\mathbb{K}}(U + W) - 1$, $\dim \mathbb{P}(U) = \dim_{\mathbb{K}}(U) - 1$, $\dim \mathbb{P}(W) = \dim_{\mathbb{K}}(W) - 1$ e, infine, che

$$\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) = \dim(\mathbb{P}(U \cap W)) = \dim_{\mathbb{K}}(U \cap W) - 1,$$

e applicare la Formula di Grassmann vettoriale. Osserviamo che la formula ha senso anche quando $\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \emptyset$, a patto di porre, per convenzione,

$$\dim \emptyset := -1.$$

□

Se l'intersezione di sottospazi proiettivi è ancora un sottospazio proiettivo, questo non è vero per l'unione. La nozione corrispondente è la seguente.

Definizione 7.3.6. Sia X un qualunque sottoinsieme non vuoto (finito o infinito) di $\mathbb{P}(V)$. L'insieme

$$L(X) := \bigcap_{\mathbb{P}(W) \supseteq X} \mathbb{P}(W)$$

si dice *sottospazio proiettivo generato da X* .

Esercizio Provare che $\mathbb{P}(U + W) = L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W))$.

Osservazione 7.3.7. Se $n = \dim \mathbb{P}(V)$, si ha $\dim L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W)) \leq n$. Pertanto la relazione precedente implica

$$\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) \geq \dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) - n.$$

In particolare, se $\dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) \geq n$ allora necessariamente

$$\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) \geq 0,$$

dunque i due sottospazi proiettivi sono incidenti.

Dall'Osservazione precedente discendono alcuni importanti fatti sulla posizione reciproca di sottospazi proiettivi.

Esempio 7.3.8. Consideriamo due rette r e s in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$. Per quanto visto

$$\dim r + \dim s = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim(r \cap s) \geq 0.$$

Pertanto due rette distinte del piano proiettivo sono sempre incidenti.

Analoga considerazione vale per due piani π e σ in \mathbb{P}^3 e precisamente

$$\dim(\pi \cap \sigma) \geq \dim \pi + \dim \sigma - \dim \mathbb{P}^3 = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Pertanto due piani distinti nello spazio proiettivo sono sempre incidenti in una retta proiettiva.

Infine, se r è una retta e π è un piano in \mathbb{P}^3 , applicando ancora l'Osservazione precedente si ha

$$\dim(\pi \cap r) \geq \dim \pi + \dim r - \dim \mathbb{P}^3 = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Chiaramente $\dim(\pi \cap r)$ può essere solo 0 o 1. Nel primo caso la retta e il piano si intersecano in un solo punto; nel secondo $r \subset \pi$.

Un'importante fatto è che non esiste la nozione di parallelismo tra sottospazi proiettivi. Dunque due sottospazi proiettivi possono essere soltanto incidenti o non incidenti. Si tratterà, di volta in volta, di studiare la loro eventuale intersezione.

Riprendiamo ora il concetto di sottospazio proiettivo generato da un sottoinsieme.

Corollario 7.3.9. Siano $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{P}(V)$ punti distinti, dove $P_i = [v_i]$ e $v_i \in V$, per $i = 1, \dots, s$. Allora

$$L(P_1, \dots, P_s) = \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_s \rangle).$$

In particolare, $\dim L(P_1, \dots, P_s) \leq s - 1$.

Dimostrazione. Per definizione $L(P_1, \dots, P_s)$ è l'intersezione di tutti i sottospazi proiettivi $\mathbb{P}(W)$ contenenti i punti P_1, \dots, P_s :

$$L(P_1, \dots, P_s) = \bigcap_{\mathbb{P}(W) \ni P_1, \dots, P_s} \mathbb{P}(W).$$

Chiaramente $\mathbb{P}(W) \ni P_1, \dots, P_s$ se e solo se $W \ni v_1, \dots, v_s$; quindi

$$L(P_1, \dots, P_s) = \bigcap_{W \ni v_1, \dots, v_s} \mathbb{P}(W) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{W \ni v_1, \dots, v_s} W \right) = \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_s \rangle)$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla Proposizione intopr e l'ultima dalla definizione di sottospazio vettoriale generato da certi vettori. \square

Con le notazioni del Corollario precedente, $\dim L(P_1, \dots, P_s) = s - 1$ se e solo se v_1, \dots, v_s sono vettori linearmente indipendenti.

Definizione 7.3.10. I punti $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{P}(V)$ si dicono (*proiettivamente*) *indipendenti* se

$$\dim L(P_1, \dots, P_s) = s - 1.$$

E' chiaro che il massimo numero di punti indipendenti in \mathbb{P}^n è $n + 1$. Tuttavia si può richiedere un simile requisito di "indipendenza" a un numero maggiore di punti. Per questo diamo la seguente nozione.

Definizione 7.3.11. Se $\dim \mathbb{P}(V) = n$, diciamo che i punti $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{P}(V)$ sono in *posizione generale* in uno dei seguenti casi:

- se $s \leq n + 1$ e P_1, \dots, P_s sono proiettivamente indipendenti;
- se $s > n + 1$ e P_1, \dots, P_s sono a $n + 1$ a $n + 1$ indipendenti (cioè ogni loro sottoinsieme di $n + 1$ punti è costituito da punti indipendenti).

Esempio 7.3.12. In \mathbb{P}^2 consideriamo s punti distinti. Se $s = 2$, allora i punti sono indipendenti e quindi in posizione generale. Se $s = 3$, allora P_1, P_2, P_3 sono indipendenti se $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 2$, dunque se e solo se i tre punti non appartengono a una stessa retta (in tal caso, infatti, sarebbe $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 1$:). Anche in questo caso, indipendenti equivale a essere in posizione generale. Se $s = 4$, allora P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale se mai tre di essi sono dipendenti, cioè mai tre di essi sono allineati. La stessa condizione caratterizza gli insiemi di s punti in posizione generale, con $s \geq 4$.

Esempio 7.3.13. In \mathbb{P}^n gli $n + 2$ punti E_0, \dots, E_n, U sono in posizione generale. Per verificarlo, consideriamo tutti i loro sottoinsiemi di $n + 1$ elementi. I punti E_0, \dots, E_n sono proiettivamente indipendenti, in quanto

$$\dim L(E_0, E_1, \dots, E_n) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Span}(e_0, e_1, \dots, e_n) - 1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{n+1} - 1 = n.$$

Gli altri sottoinsiemi sono costituiti da U e da n tra gli E_i . Ad esempio, calcoliamo

$$\dim L(U, E_1, \dots, E_n) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Span}(u, e_1, \dots, e_n) - 1.$$

Si vede facilmente che i vettori $u, e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ sono linearmente indipendenti, ad esempio scrivendo le loro $n + 1$ componenti in una matrice e osservando che essa ha determinante non nullo. Pertanto anch'essi generano tutto \mathbb{K}^{n+1} e quindi si ha quanto affermato.

Questo esempio è, in qualche senso, generalizzato dal seguente risultato.

Teorema 7.3.14. *Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n e siano $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ punti in posizione generale. Allora esiste un unico riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ nel quale P_0, \dots, P_n sono i punti fondamentali e P_{n+1} è il punto unità.*

Dimostrazione. Siano $P_i = [v_i]$ per $i = 0, 1, \dots, n+1$, per opportuni $v_0, v_1, \dots, v_{n+1} \in V$. Per ipotesi P_0, \dots, P_n sono punti proiettivamente indipendenti, quindi i vettori v_0, \dots, v_n sono linearmente indipendenti e dunque una base di V . Di conseguenza esistono $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Si osservi che tutti i λ_i sono non nulli. Infatti, se uno di essi fosse nullo, e.g. $\lambda_0 = 0$, si avrebbe $v_{n+1} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ e quindi v_1, \dots, v_{n+1} sarebbero linearmente dipendenti. Di conseguenza, i punti P_1, \dots, P_{n+1} sarebbero proiettivamente dipendenti, contro l'ipotesi sulla posizione generale. Sia $\mathcal{B} = (\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_n v_n)$: per quanto appena osservato, \mathcal{B} è una base di V e dunque un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. In tale riferimento i punti dati hanno coordinate

$$\begin{aligned} P_0 = [v_0] &= [\lambda_0 v_0] = (1 : 0 : \dots : 0) \\ &\vdots \\ P_n = [v_n] &= [\lambda_n v_n] = (0 : 0 : \dots : 1) \end{aligned} \quad .$$

$$P_{n+1} = [v_{n+1}] = [\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n] = (1 : 1 : \dots : 1)$$

Pertanto, in tale riferimento, i punti dati sono, rispettivamente, i punti fondamentali e il punto unità. \square

7.4 Equazioni cartesiane per sottospazi proiettivi

Un iperpiano proiettivo $\mathbb{P}(W)$ nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ corrisponde a un iperpiano vettoriale $W \subset V$. Come abbiamo visto nell'ambito della Geometria affine, fissata una base di V , l'iperpiano W ha una equazione cartesiana del tipo

$$W : a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$$

dove $a_i \in \mathbb{K}$ per ogni i .

È naturale chiedersi se tale equazione definisca anche $\mathbb{P}(W)$, una volta fissato un riferimento proiettivo. La risposta è affermativa.

Infatti, un punto $P = (\bar{x}_0 : \dots : \bar{x}_n) \in \mathbb{P}(W)$ se e solo se $(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n) \in W$ se e solo se $a_0 \bar{x}_0 + \dots + a_n \bar{x}_n = 0$.

Si osservi infine che tale verifica non dipende dalla scelta delle coordinate omogenee di P . Infatti, $P = (\bar{x}_0 : \cdots : \bar{x}_n) = (\lambda \bar{x}_0 : \cdots : \lambda \bar{x}_n)$ per ogni $\lambda \neq 0$ e si ha

$$a_0 \bar{x}_0 + \cdots + a_n \bar{x}_n = 0 \iff \lambda a_0 \bar{x}_0 + \cdots + \lambda a_n \bar{x}_n = 0.$$

Possiamo dunque dire che

$$\mathbb{P}(W) : a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n = 0$$

è una *equazione cartesiana* dell'iperpiano $\mathbb{P}(W)$.

Esempio 7.4.1. Un iperpiano in \mathbb{P}^2 è una retta e dunque ha equazione

$$r : a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0.$$

Un iperpiano in \mathbb{P}^3 è un piano e dunque ha equazione

$$\pi : a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

In \mathbb{P}^n si dicono *iperpiani coordinati* quelli le cui equazioni, in un fissato riferimento proiettivo, sono le seguenti:

$$H_0 : x_0 = 0, \quad H_1 : x_1 = 0, \quad \dots, \quad H_n : x_n = 0.$$

È chiaro che ogni iperpiano coordinato H_i contiene tutti i punti fondamentali eccetto E_i e U non appartiene a nessuno degli iperpiani coordinati.

Quanto visto per l'equazione cartesiana di un iperpiano si generalizza a un sottospazio di qualunque dimensione.

Definizione 7.4.2. Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n in cui si è fissato un riferimento proiettivo e siano $(x_0 : \cdots : x_n)$ le sue coordinate omogenee.

Se $\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo, posta s la sua codimensione, delle *equazioni cartesiane* per $\mathbb{P}(W)$ sono costituite da un sistema lineare omogeneo che determina $W \subset V$, cioè del tipo

$$\mathbb{P}(W) : AX = 0$$

dove $A \in \mathbb{K}^{s, n+1}$, $\text{rk}(A) = s$ e $X = {}^t(x_0, \dots, x_n)$.

Esplicitamente:

$$\mathbb{P}(W) : \begin{cases} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{s-1\ 0}x_0 + a_{s-1\ 1}x_1 + \cdots + a_{s-1\ n}x_n & = 0 \end{cases}$$

Esempio 7.4.3. L'equazione cartesiana di una retta in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ è, ad esempio,

$$r : \begin{cases} 3x_0 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 - x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}.$$

Quella di un piano in \mathbb{P}^4 è, ad esempio,

$$\pi : \begin{cases} 3x_0 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_0 - x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Quella di una retta in \mathbb{P}^4 è, ad esempio,

$$s : \begin{cases} 3x_0 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_0 - x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 0 \\ 2x_0 + x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ricordando la nozione di sottospazio proiettivo $L(X)$ generato da un insieme X , se in particolare $X = \{P_1, \dots, P_s\}$ è costituito da un numero finito di punti, allora

$$L(P_1, \dots, P_s) := \bigcap_{\mathbb{P}(W) \ni P_1, \dots, P_s} \mathbb{P}(W).$$

7.5 Equazioni parametriche per sottospazi proiettivi

Esprimere un sottospazio proiettivo come generato da un insieme di punti indipendenti fornisce una ulteriore descrizione.

Sia $S = \mathbb{P}(W)$ un qualunque sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, dove $\dim_{\mathbb{K}} V = n + 1$ e W è un sottospazio vettoriale di V .

Posta $\dim_{\mathbb{K}} W = k + 1$, con $k \leq n$, possiamo scrivere

$$W = \text{Span}(w_0, \dots, w_k),$$

per opportuni vettori linearmente indipendenti $w_0, \dots, w_k \in V$.

Infine, ponendo $P_i = [w_i]$, per $i = 0, \dots, k$, si ha

$$S = \mathbb{P}(W) = L(P_0, \dots, P_k)$$

Pertanto

$$Q \in S \iff Q = [v], v \in W \setminus \{0_V\} \iff Q = [\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_k w_k] \quad (7.5.1)$$

con $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ non tutti nulli.

Si fissi ora una base $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ di V e di conseguenza un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. Esprimendo i vettori w_0, \dots, w_k nella base \mathcal{B} si individuano $(k+1) \times (n+1)$ scalari (a_{ij}) :

$$\begin{cases} w_0 = a_{00}v_0 + \dots + a_{0n}v_n \\ \vdots \\ w_k = a_{k0}v_0 + \dots + a_{kn}v_n \end{cases}.$$

Moltiplicando ogni equazione per lo scalare λ_i corrispondente si ha

$$\begin{cases} \lambda_0 w_0 = \lambda_0 a_{00}v_0 + \dots + \lambda_0 a_{0n}v_n \\ \vdots \\ \lambda_k w_k = \lambda_k a_{k0}v_0 + \dots + \lambda_k a_{kn}v_n \end{cases}.$$

A questo punto, possiamo esprimere esplicitamente le coordinate omogenee del punto $[\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_k w_k]$ e, per comodità grafica, le scriviamo in verticale:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 a_{00} + \dots + \lambda_k a_{k0} \\ \vdots \\ \lambda_0 a_{0n} + \dots + \lambda_k a_{kn} \end{bmatrix}.$$

Se Q è il generico punto di $\mathbb{P}(V)$ di coordinate omogenee $Q = (x_0 : \dots : x_n)$, l'equivalenza (7.5.1) diventa

$$Q \in S \iff \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 a_{00} + \dots + \lambda_k a_{k0} \\ \vdots \\ \lambda_0 a_{0n} + \dots + \lambda_k a_{kn} \end{bmatrix}.$$

Questa uguaglianza tra coordinate omogenee significa l'uguaglianza delle componenti *a meno di un fattore di proporzionalità*. Tuttavia, convenzionalmente, si omette questa costante non nulla nella scrittura che esprime le coordinate omogenee del generico punto Q di S .

Infine si osservi che le componenti di w_i sulla base \mathcal{B} sono, per definizione, le coordinate omogenee del punto P_i , per ogni $i = 0, \dots, k$.

Abbiamo pertanto provato il seguente risultato.

Proposizione 7.5.1. *Sia $S = L(P_0, \dots, P_k) \subseteq \mathbb{P}(V)$ il sottospazio proiettivo generato dai punti proiettivamente indipendenti P_0, \dots, P_k aventi coordinate omogenee, in un fissato riferimento proiettivo,*

$$P_0 = [a_{00} : \dots : a_{0n}], \quad \dots, \quad P_k = [a_{k0} : \dots : a_{kn}].$$

Osservazione 7.6.3. Si noti che la scrittura $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ si sarebbe potuta usare anche nel caso di fasci di rette affini, in quanto l'equazione cartesiana di una retta piana è determinata a meno di un fattore di proporzionalità. Non si era utilizzata in quel contesto solo perché non si erano ancora introdotti gli spazi proiettivi.

Osservazione 7.6.4. La scrittura $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ ha un evidente vantaggio: permette di stabilire chiaramente una corrispondenza biunivoca tra le rette di Φ_P e i punti di \mathbb{P}^1 .

Infatti si verifica facilmente che, posta $r_{\lambda,\mu}$ la retta di Φ_P di equazione $\lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) = 0$, l'applicazione

$$\Phi_P \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad r_{\lambda,\mu} \mapsto (\lambda : \mu)$$

è ben definita e biunivoca.

Esempio 7.6.5. Determiniamo il fascio di rette Φ_P dove $P = (1 : 2 : 3) \in \mathbb{P}^2$. Per fare questo, basta determinarne due generatrici. Ad esempio,

$$r : 3x_0 - x_2 = 0, \quad s : 3x_1 - 2x_2 = 0.$$

Dunque

$$\Phi_P : \lambda(3x_0 - x_2) + \mu(3x_1 - 2x_2) = 0, \quad (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1.$$

Passiamo ora ai fasci di piani proiettivi in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$.

Definizione 7.6.6. In \mathbb{P}^3 con coordinate $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, si considerino la retta r e due piani distinti $\pi : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ e $\sigma : b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ contenenti r . Allora il fascio di piani di sostegno r è l'insieme di piani di equazione

$$\mathcal{F}_r : \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0$$

al variare di $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$.

Proposizione 7.6.7. Data una retta $r \subset \mathbb{P}^3$ il fascio di piani di sostegno r coincide con l'insieme di tutti e soli i piani dello spazio contenenti r .

Posto $\pi_{\lambda,\mu}$ il generico piano del precedente fascio, si ha che l'applicazione

$$\mathcal{F}_r \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{data} \quad \pi_{\lambda,\mu} \mapsto (\lambda : \mu)$$

è ben definita e biunivoca.

Esempio 7.6.8. Determinare tutti i piani di \mathbb{P}^3 passanti per i punti $A = (1 : 2 : 3 : 4)$ e $B = (-1 : 5 : 7 : 0)$. Chiaramente i piani richiesti sono tutti e soli quelli del fascio \mathcal{F}_r di sostegno la retta r passante per A e B . Tale retta è

$$r : \begin{cases} x_0 + 10x_1 - 7x_2 = 0 \\ 20x_0 + 4x_1 - 7x_3 = 0 \end{cases}.$$

Quindi

$$\mathcal{F}_r : \lambda(x_0 + 10x_1 - 7x_2) + \mu(20x_0 + 4x_1 - 7x_3) = 0.$$

Si osservi che abbiamo dato un'unica nozione di fascio (sia di rette che di piani) senza distinguere tra "propri" e "impropri". La ragione sarà chiara nel prossimo paragrafo.

Quanto visto si può generalizzare in uno spazio proiettivo di dimensione qualunque, osservando che il *luogo base* (cioè l'insieme dei punti comuni a tutti i sottospazi del fascio) è un punto, nel caso delle rette di \mathbb{P}^2 , e una retta, nel caso dei piani di \mathbb{P}^3 . In entrambe le situazioni si tratta di un sottospazio proiettivo di codimensione 2.

Definizione 7.6.9. Nello spazio proiettivo \mathbb{P}^n , si consideri un sottospazio proiettivo di dimensione $n - 2$ di equazioni cartesiane

$$L : \begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ b_0x_0 + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0 \end{cases}.$$

Allora il fascio di iperpiani di sostegno L è l'insieme di iperpiani di equazioni

$$\mathcal{F}_L : \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n) = 0$$

al variare di $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$.

Proposizione 7.6.10. Sia $L \subset \mathbb{P}^n$ un sottospazio proiettivo di dimensione $n - 2$. Allora il fascio di iperpiani di sostegno L è costituito da tutti e soli gli iperpiani di \mathbb{P}^n contenenti L .

Esempio 7.6.11. Determinare tutti e soli gli iperpiani di \mathbb{P}^4 contenenti il sottospazio proiettivo $L = \mathbb{P}(W)$, dove W è il seguente sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 :

$$W = \text{Span}({}^t(1, 0, 1, 0, 1), {}^t(0, 0, 0, 0, 1), {}^t(1, 2, 0, 0, 0)).$$

Si verifica facilmente che $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$.

Di conseguenza, $\dim L = 2$, pertanto gli iperpiani richiesti costituiscono il fascio \mathcal{F}_L di iperpiani di \mathbb{P}^4 avente per sostegno L .

Troviamo le equazioni cartesiane di L imponendo che il vettore $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ sia combinazione lineare dei generatori di W , ovvero che

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Per il *Teorema dei minori orlati*, basta orlare un minore non degenere 3×3 , ad esempio quello costituito dalle colonne 1 – 3 – 5 (intersecate con le righe 2-3-4): i minori *orlati* saranno dunque costituiti, rispettivamente, dalle colonne 1–2–3–5 e 1–3–4–5. I loro determinanti sono:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2x_0 - x_1 - 2x_2 \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x_3.$$

Quindi

$$L : \begin{cases} 2x_0 - x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

e dunque

$$\mathcal{F}_L : \lambda(2x_0 - x_1 - 2x_2) + \mu x_3 = 0.$$

7.7 Fasci proiettivizzati

Nel Capitolo 1 abbiamo trattato i fasci di iperpiani nello spazio affine \mathbb{A}^n , suddividendoli in “propri” e “impropri”: i primi avevano in comune un sottospazio affine di codimensione 2 (ad esempio, i fasci propri di rette nel piano di centro un punto) e i secondi avevano in comune una giacitura (ad esempio, un fascio improprio di rette nel piano, tutte parallele a una retta data). Tale distinzione viene a cessare nella Geometria Proiettiva.

Definizione 7.7.1. Sia \mathcal{F} un fascio di iperpiani in \mathbb{A}^n . Diciamo suo *fascio proiettivizzato* l’insieme di iperpiani di \mathbb{P}^n dato da

$$\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{H} \subset \mathbb{P}^n \mid H \in \mathcal{F}\}.$$

Osservazione 7.7.2. Se \mathcal{F} è un fascio proprio di iperpiani di sostegno un sottospazio affine L (con $\text{codim}(L) = 2$) allora $\overline{\mathcal{F}}$ è un fascio di iperpiani proiettivi di sostegno \overline{L} . Se invece \mathcal{F} è un fascio improprio di iperpiani di giacitura W (con W iperpiano vettoriale di \mathbb{K}^n) allora $\overline{\mathcal{F}}$ è un fascio di iperpiani proiettivi di sostegno $\mathbb{P}(W) \subset H_0$.

Esempio 7.7.3. Si consideri il fascio di rette in \mathbb{A}^2 dato da

$$\mathcal{F} : \quad \lambda(x + y - 3) + \mu(2x - y) = 0$$

e sia $\overline{\mathcal{F}}$ il suo fascio proiettivizzato. Determinare una equazione di $\overline{\mathcal{F}}$ (in coordinate omogenee) e il suo centro. Chiaramente $\overline{\mathcal{F}}$ ha come generatori le chiusure proiettive dei generatori di \mathcal{F} e dunque l'equazione di $\overline{\mathcal{F}}$ in \mathbb{P}^2 è

$$\overline{\mathcal{F}} : \quad \lambda(x_1 + x_2 - 3x_0) + \mu(2x_1 - x_2) = 0.$$

Pertanto il centro di $\overline{\mathcal{F}}$ è il punto

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_0 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow [x_0, x_1, x_2] = [1, 1, 2].$$

7.8 Immersione dello spazio affine nello spazio proiettivo e chiusura proiettiva

In questa sezione vedremo un modo naturale di immergere gli spazi affini negli spazi proiettivi; in effetti gli spazi proiettivi sono storicamente state introdotti come ampliamenti degli spazi affini, tramite l'aggiunta dei cosiddetti "punti all'infinito", o *puncti impropri*.

Definizione 7.8.1. Consideriamo $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Gli $n + 1$ iperpiani di \mathbb{P}^n

$$H_i : \quad x_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

sono detti *iperpiani coordinati*.

Osservazione 7.8.2. Ogni spazio proiettivo \mathbb{P}^n con coordinate omogenee $(x_0 : \dots : x_n)$ può essere scritto come la seguente unione (disgiunta):

$$\mathbb{P}^n = H_0 \cup U_0,$$

dove

$$H_0 := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\}, \quad U_0 := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0\}.$$

Analogamente, se $U_i := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$, si ha $\mathbb{P}^n = H_i \cup U_i$.

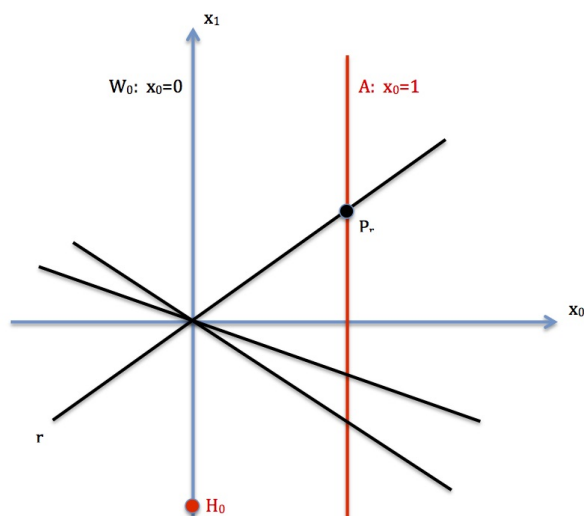
Considerando la decomposizione $\mathbb{P}^n = H_0 \cup U_0$, mostriamo come costruire una corrispondenza biunivoca "naturale" tra U_0 e \mathbb{A}^n .

Iniziamo a studiare il caso $n = 1$, per semplicità. In questo caso, H_0 è il punto $(0 : 1) \in \mathbb{P}^1$.

In \mathbb{K}^2 si considerino i seguenti sottoinsiemi $W_0 : x_0 = 0$ (retta vettoriale) e $A : x_0 = 1$ (retta affine).

Ogni retta vettoriale $r = \langle v \rangle = [v] \in \mathbb{P}^1 \setminus H_0$ interseca la retta A in uno e un solo punto, che denotiamo con P_r . Questo definisce l'applicazione

$$\alpha : \mathbb{P}^1 \setminus H_0 \longrightarrow A \subset \mathbb{K}^2 \quad \text{data da} \quad r \mapsto P_r := r \cap A.$$



L'applicazione α è biunivoca e, essendo la prima coordinata di ogni punto $r \in \mathbb{P}^1 \setminus H_0$ non nulla, è definita da

$$r = (a_0 : a_1) = \left(1 : \frac{a_1}{a_0} \right) \mapsto P_r = \left(1, \frac{a_1}{a_0} \right) \in A.$$

Inoltre, consideriamo l'applicazione biettiva

$$\beta : A \longrightarrow \mathbb{A}^1 \quad \text{data da} \quad (1, t) \mapsto t.$$

La composizione

$$\beta \circ \alpha : \mathbb{P}^1 \setminus H_0 \longrightarrow \mathbb{A}^1 \quad \text{data da} \quad (a_0 : a_1) \mapsto \frac{a_1}{a_0}$$

è ancora biunivoca. Possiamo quindi considerare la sua inversa, che denotiamo con

$$j_0 : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus H_0 \quad \text{dove} \quad t \mapsto (1 : t).$$

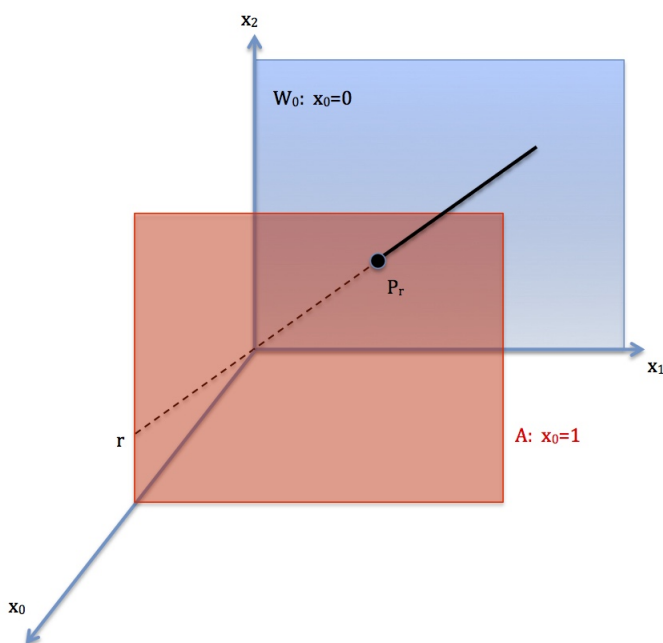
Tenendo conto delle notazioni introdotte nell'Osservazione 7.8.2, è chiaro che $j_0(\mathbb{A}^1) = U_0$ e si ha dunque

$$\mathbb{P}^1 = H_0 \cup U_0 = H_0 \cup j_0(\mathbb{A}^1).$$

Definizione 7.8.3. Diciamo che U_0 è una carta affine di \mathbb{P}^1 e che H_0 è il punto all'infinito di \mathbb{A}^1 (via l'immersione j_0).

Passiamo ora al caso $n = 2$.

In \mathbb{K}^3 consideriamo il piano vettoriale $W_0 : x_0 = 0$ e il piano affine $A : x_0 = 1$



Si osservi che $H_0 = \mathbb{P}(W_0)$ e definiamo, come prima, l'applicazione biunivoca

$$\alpha : \mathbb{P}^2 \setminus H_0 \longrightarrow A \subset \mathbb{K}^3$$

definita da

$$r = (a_0 : a_1 : a_2) \mapsto P_r := r \cap A = \left(1, \frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0} \right)$$

e anche l'applicazione biunivoca

$$\beta : A \longrightarrow \mathbb{A}^2 \quad \text{data da} \quad (1, t_1, t_2) \mapsto (t_1, t_2).$$

La composizione

$$\beta \circ \alpha : \mathbb{P}^2 \setminus H_0 \longrightarrow \mathbb{A}^2 \quad \text{data da} \quad (a_0 : a_1 : a_2) \mapsto \left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0} \right)$$

risulta ancora biunivoca. Si consideri la sua inversa

$$j_0 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \setminus H_0 \quad \text{dove} \quad (t_1, t_2) \mapsto [1, t_1, t_2].$$

Si ha dunque

$$\mathbb{P}^2 = H_0 \cup U_0 = H_0 \cup j_0(\mathbb{A}^2)$$

In questo caso l'iperpiano H_0 è una retta.

Definizione 7.8.4. Diciamo che U_0 è una carta affine di \mathbb{P}^2 e che H_0 è la retta all'infinito o retta impropria di \mathbb{A}^2 (via l'immersione j_0). I suoi punti si dicono punti impropri.

Il caso in cui n è generale e perfettamente analogo.

Proposizione 7.8.5. Si consideri lo spazio affine \mathbb{A}^n con coordinate (y_1, \dots, y_n) e lo spazio proiettivo \mathbb{P}^n con coordinate omogenee $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$.

L'applicazione

$$j_0 : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus H_0 = U_0$$

definita da

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto [1, y_1, \dots, y_n]$$

è biunivoca e la sua inversa

$$j_0^{-1} : U_0 \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

è definita da

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right).$$

Definizione 7.8.6. Diciamo che U_0 è una carta affine di \mathbb{P}^n e che H_0 è l'iperpiano all'infinito di \mathbb{A}^n (via j_0).

Osservazione 7.8.7. Analogamente a j_0 si possono definire delle immersioni j_1, j_2, \dots, j_n dove

$$j_i : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus H_i = U_i, \quad i = 1, \dots, n$$

e le corrispondenti carte affini

$$U_i = \{[x_0 \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\} = j_i(\mathbb{A}^n) \cong \mathbb{A}^n.$$

Quindi

$$\mathbb{P}^n = H_i \cup U_i = H_i \cup j_i(\mathbb{A}^n) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

e dunque \mathbb{A}^n si può immergere in \mathbb{P}^n in almeno $n + 1$ modi.

Si osservi infine che

$$\mathbb{P}^n = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$$

e tale scrittura viene detta *ricoprimento* di \mathbb{P}^n con carte affini (o *atlante affine*).

Osservazione 7.8.8. Nel seguito utilizzeremo spesso il completamento di \mathbb{A}^n a \mathbb{P}^n mediante j_0 e, identificando in tal modo U_0 con \mathbb{A}^n , scriveremo con abuso di notazione

$$\mathbb{P}^n = H_0 \cup \mathbb{A}^n.$$

I punti di \mathbb{P}^n che sono affini si diranno *punti propri* mentre quelli appartenenti all'iperpiano H_0 sono *punti impropri*.

7.8.1 Chiusura proiettiva

In questa sezione utilizziamo le notazioni introdotte sopra, dunque le coordinate affini di un punto generico di \mathbb{A}^n sono (y_1, y_2, \dots, y_n) , mentre le coordinate omogenee di un generico punto di \mathbb{P}^n sono $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$.

Definizione 7.8.9. Sia H un iperpiano di \mathbb{A}^n di equazione

$$H : a_1 y_1 + \dots + a_n y_n + b = 0.$$

Diciamo *chiusura proiettiva* di H l'iperpiano di \mathbb{P}^n di equazione

$$\overline{H} : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b x_0 = 0.$$

Proposizione 7.8.10. Se H è un iperpiano di \mathbb{A}^n di chiusura proiettiva $\overline{H} \subset \mathbb{P}^n$, allora

$$H = \overline{H} \cap U_0.$$

Inoltre $H_\infty := \overline{H} \setminus H$ è un sottospazio proiettivo di codimensione 2 in \mathbb{P}^n e precisamente

$$H_\infty = \overline{H} \cap H_0.$$

Dimostrazione. Sia $H : a_1y_1 + \dots + a_ny_n + b = 0$ e sia $P = (Y_1, \dots, Y_n)$ un punto di H . Dunque vale l'identità $a_1Y_1 + \dots + a_nY_n + b = 0$.

D'altra parte, per la Proposizione 7.8.5, le coordinate omogenee di $j_0(P)$ sono $(1 : Y_1 : \dots : Y_n)$ e quindi soddisfano l'equazione della chiusura proiettiva $\bar{H} : a_1x_1 + \dots + a_nx_n + bx_0 = 0$. Questo prova che $H \subset \bar{H}$ e quindi che $H \subset \bar{H} \cap j_0(\mathbb{A}^n)$.

Viceversa, sia $P = (Y_1, \dots, Y_n) \in \bar{H} \cap j_0(\mathbb{A}^n)$. Dunque le sue coordinate omogenee $(1 : Y_1 : \dots : Y_n)$ soddisfano l'equazione della chiusura proiettiva \bar{H} , cioè vale l'identità $a_1Y_1 + \dots + a_nY_n + b = 0$. Questo equivale al fatto che le coordinate affini soddisfano l'equazione di H e quindi $P \in H$.

Resta da provare l'ultima affermazione, cioè che

$$\bar{H} \setminus H = \bar{H} \cap H_0.$$

Si osservi che

$$\bar{H} = \bar{H} \cap \mathbb{P}^n = \bar{H} \cap (\mathbb{A}^n \cup H_0) = (\bar{H} \cap \mathbb{A}^n) \cup (\bar{H} \cap H_0) = H \cup (\bar{H} \cap H_0)$$

dove l'ultima uguaglianza è stata provata sopra. Pertanto si ha la tesi. \square

Come conseguenza si ha dunque la decomposizione

$$\bar{H} = H \cup H_\infty$$

dove H è l'insieme dei punti propri di \bar{H} e H_∞ è l'insieme dei punti impropri di \bar{H} .

Definizione 7.8.11. Il sottospazio proiettivo H_∞ è detto *sottospazio all'infinito* o *sottospazio improprio* di H .

Osservazione 7.8.12. Se H è l'iperpiano di \mathbb{A}^n di equazione

$$H : a_1y_1 + \dots + a_ny_n + b = 0$$

allora il suo sottospazio improprio è

$$H_\infty : \begin{cases} a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

Esempio 7.8.13. Data la retta $r \subset \mathbb{A}^2$, vogliamo determinare la sua chiusura proiettiva $\bar{r} \subset \mathbb{P}^2$ e il suo punto improprio r_∞ , dove

$$r : 3x + 2y - 1 = 0.$$

Per quanto visto

$$\bar{r} : 3x_1 + 2x_2 - x_0 = 0$$

e

$$r_\infty : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow r_\infty = [0, 2, -3].$$

Esempio 7.8.14. Dato il piano $\pi \subset \mathbb{A}^3$, vogliamo determinare la sua chiusura proiettiva $\bar{\pi} \subset \mathbb{P}^3$ e la sua retta impropria π_∞ (in equazione cartesiana e in equazione parametrica), dove

$$\pi : 3x + y - 5z + 3 = 0.$$

Per quanto visto

$$\bar{\pi} : 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_0 = 0$$

$$\pi_\infty : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \text{ o equivalentemente } \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \lambda \\ x_2 = -3\lambda + 5\mu \\ x_3 = \mu \end{cases}$$

Dall'Osservazione 7.8.12 si ha il seguente fatto.

Corollario 7.8.15. Due iperpiani paralleli H e H' di \mathbb{A}^n hanno lo stesso sottospazio improprio, i.e. $H_\infty = H'_\infty$.

Dimostrazione. Per ipotesi, gli iperpiani H e H' hanno equazioni del tipo

$$H : a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + b = 0$$

e

$$H' : a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + b' = 0$$

Per l'Osservazione 7.8.12 si ha immediatamente la tesi. □

Proposizione 7.8.16. Se H è un iperpiano di \mathbb{A}^n di giacitura W allora

$$H_\infty \cong \mathbb{P}(W).$$

Dimostrazione. Se $H : a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + a_0 = 0$ allora per l'Osservazione 7.8.12

$$H_\infty : \begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

D'altra parte, la giacitura di H è il sottospazio vettoriale di \mathbb{K}^n di equazione

$$W : a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n = 0$$

e le rette vettoriali di W sono del tipo $\text{Span}(v)$, dove il vettore $v = (c_1, \dots, c_n)$ verifica l'uguaglianza $a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n = 0$.

Quindi è naturale definire

$$\alpha : H_\infty \longrightarrow \mathbb{P}(W)$$

in questo modo: per ogni punto $P = (0 : x_1 : \cdots : x_n) \in H_\infty$, cioè tale che $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$, si pone $\alpha(P) := (x_1 : \cdots : x_n)$. Si verifica immediatamente che α è ben definita ed è biunivoca. \square

La nozione di chiusura proiettiva si generalizza in modo naturale a un qualunque sottospazio affine.

Ricordando il sottospazio proiettivo $L(X)$ generato da un insieme X (vedi Definizione ??), introduciamo la seguente nozione.

Definizione 7.8.17. Sia $S \subset \mathbb{A}^n$ un sottospazio affine. Si dice *chiusura proiettiva* di S il sottospazio proiettivo $L(S)$ e si denota con \bar{S} , i.e.

$$\bar{S} := \bigcap_{\mathbb{P}(U) \supset S} \mathbb{P}(U).$$

Si dice inoltre *sottospazio all'infinito* o *sottospazio improprio* di S l'insieme

$$S_\infty := \bar{S} \setminus S.$$

Enunciamo, senza dimostrarlo, il seguente utile risultato.

Proposizione 7.8.18. *Sia $S \subset \mathbb{A}^n$ un sottospazio affine e siano H_1, \dots, H_s iperpiani tali che $S = H_1 \cap \cdots \cap H_s$. Allora la chiusura proiettiva di S è il sottospazio proiettivo*

$$\bar{S} = \bar{H}_1 \cap \cdots \cap \bar{H}_s.$$

Inoltre il sottospazio all'infinito di S è

$$S_\infty = (H_1)_\infty \cap \cdots \cap (H_s)_\infty = \mathbb{P}(W),$$

dove W è la giacitura di S .

Esempio 7.8.19. Data la retta $r \subset \mathbb{A}^3$, vogliamo determinare la sua chiusura proiettiva $\bar{r} \subset \mathbb{P}^3$ e il suo punto improprio r_∞ , dove

$$r : \begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 \\ 3x + z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Per la Proposizione 7.8.18 si ha

$$\bar{r} : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_0 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + x_0 = 0 \end{cases}$$

e

$$r_\infty : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 = -2x_1 \\ x_3 = -3x_1 \end{cases}$$

e quindi $r_\infty = (0 : 1 : -2 : -3)$.

Capitolo 8

Proiettività

Introduciamo ora le trasformazioni degli spazi proiettivi che mantengono i sottospazi proiettivi.

Definizione 8.0.1. Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ due spazi proiettivi della stessa dimensione. Diciamo che un'applicazione

$$f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

è un *isomorfismo proiettivo* se esiste un isomorfismo di \mathbb{K} -spazi vettoriali

$$\varphi : V \longrightarrow V'$$

tale che, per ogni $v \in V \setminus \{0_V\}$,

$$f(\langle v \rangle) = \langle \varphi(v) \rangle.$$

Equivalentemente, posta $\pi : V \setminus \{0_V\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ l'applicazione suriettiva definita da $\pi(v) = \langle v \rangle$ (e definita analogamente π'), f è un isomorfismo proiettivo se il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V \setminus \{0_V\} & \xrightarrow{\varphi} & V' \setminus \{0_{V'}\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}(V') \end{array}$$

è commutativo.

Diremo inoltre che f è l'*isomorfismo proiettivizzato di φ* o che è *indotto da φ* . Scriveremo anche $f = [\varphi]$.

Definizione 8.0.2. Due spazi proiettivi $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo proiettivo $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$. In tal caso scriveremo $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(V')$.

Osservazione 8.0.3. Si può verificare che la composizione di isomorfismi proiettivi è ancora un isomorfismo proiettivo e precisamente che $[\varphi] \circ [\psi] = [\varphi \circ \psi]$.

Inoltre, se f è un isomorfismo proiettivo, anche f^{-1} lo è e si ha

$$[\varphi]^{-1} = [\varphi^{-1}].$$

Proposizione 8.0.4. Se $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n allora $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}_K^n$.

Dimostrazione. Sappiamo dall'Algebra Lineare che, fissata una base \mathcal{B} di un \mathbb{K} -spazio vettoriale V , essa determina un isomorfismo $\varphi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$, dato dall'assegnazione delle coordinate.

Se $f_{\mathcal{B}} := [\varphi_{\mathcal{B}}]$, allora $f_{\mathcal{B}} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}_K^n$ è un isomorfismo proiettivo, come volevamo. □

Osservazione 8.0.5. Sia $\varphi : V \rightarrow V'$ un isomorfismo di K -spazi vettoriali. Allora, per ogni $\lambda \in K^*$, gli isomorfismi φ e $\lambda\varphi$ inducono lo stesso isomorfismo proiettivo, i.e.

$$[\varphi] = [\lambda\varphi].$$

Infatti, per ogni $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$, si ha

$$[\varphi](\langle v \rangle) = [\varphi(v)],$$

$$[\lambda\varphi](\langle v \rangle) = [(\lambda\varphi)(v)] = [\lambda\varphi(v)] = [\varphi(v)].$$

È naturale chiedersi se valga il viceversa. La risposta è affermativa, ma non immediata, come mostra il seguente risultato.

Teorema 8.0.6. Siano $\varphi, \psi : V \rightarrow V'$ due isomorfismi di \mathbb{K} -spazi vettoriali. Se $[\varphi] = [\psi]$ come isomorfismi proiettivi da $\mathbb{P}(V)$ in $\mathbb{P}(V')$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che

$$\psi = \lambda\varphi.$$

Dimostrazione. Per ipotesi e per definizione, per ogni $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ si ha

$$[\varphi(v)] = [\psi(v)].$$

Pertanto esiste uno scalare $\lambda_v \in \mathbb{K}^*$, dipendente da v , tale che

$$\psi(v) = \lambda_v \varphi(v).$$

Applicando φ^{-1} ad ambo i membri si ottiene

$$\varphi^{-1}(\psi(v)) = \varphi^{-1}(\lambda_v \varphi(v)) = \lambda_v v.$$

Quindi v è un autovettore di $\varphi^{-1} \circ \psi$: ciò accade per ogni $v \in V$ e dunque, necessariamente, $\varphi^{-1} \circ \psi$ è un'omotetia.

Dunque esiste $\lambda \in \mathbb{K}^*$ (indipendente da v) tale che $\varphi^{-1} \circ \psi = \lambda \text{Id}_V$, da cui $\psi = \lambda \varphi$, come volevamo. □

Come abbiamo fatto per gli spazi affini, focalizzeremo la nostra attenzione a isomorfismi che hanno uguale dominio e codominio. La nozione analoga all'affinità (introdotta nel Capitolo 1) è dunque la seguente.

Definizione 8.0.7. Si dice *proiettività* di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ un isomorfismo proiettivo

$$f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V).$$

Osserviamo che $\text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$ è una proiettività. Dunque l'insieme

$$\{f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V) \mid f \text{ è una proiettività}\}$$

è un gruppo rispetto alla composizione.

Definizione 8.0.8. Tale gruppo si dice *gruppo proiettivo lineare* di $\mathbb{P}(V)$ e si denota con $PGL(\mathbb{P}(V))$. In particolare, invece di $PGL(\mathbb{P}_K^n)$, scriveremo $PGL(n+1, K)$ che viene detto *gruppo proiettivo lineare generale*.

Proposizione 8.0.9. Se V è un \mathbb{K} -spazio vettoriale, l'applicazione

$$\alpha : GL(V) \longrightarrow PGL(\mathbb{P}(V)) \quad \text{data da} \quad \varphi \mapsto \bar{\varphi}$$

è un omomorfismo suriettivo di gruppi.

Inoltre $\ker(\alpha) = \text{Om}(V)$, il gruppo delle omotetie di V . Conseguentemente

$$PGL(\mathbb{P}(V)) \cong GL(V)/\text{Om}(V).$$

Dimostrazione. Poiché, per definizione, ogni proiettività di $\mathbb{P}(V)$ è individuata da un isomorfismo lineare di V , l'applicazione α è suriettiva.

Inoltre, dalle osservazioni precedenti si ha che α è un omomorfismo di gruppi.

Resta da determinare il suo nucleo, cioè

$$\ker(\alpha) = \{\varphi \in GL(V) \mid \bar{\varphi} = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}\}.$$

È chiaro che $\text{Id}_{\mathbb{P}(V)} = \overline{\text{Id}_V}$. Quindi, per l'Osservazione 8.0.5 e il Teorema ??, si ha che

$$\bar{\varphi} = \overline{\text{Id}_V} \iff \exists \lambda \in K^* \mid \varphi = \lambda \text{Id}_V \iff \varphi \in \text{Om}(V).$$

□

8.0.1 Rappresentazioni matriciali di proiettività

Il problema di determinare le equazioni di una proiettività è facilmente risolvibile: basti pensare che ogni $f \in PGL(\mathbb{P}(V))$ è del tipo $f = \bar{\varphi}$ per un'opportuna $\varphi \in GL(V)$. Nel caso particolare (che non è restrittivo, per la Proposizione 8.0.4) in cui $V = K^{n+1}$ e quindi $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_K^n$, l'omomorfismo α si esplicita come

$$\alpha : GL(n+1, K) \longrightarrow PGL(n+1, K) \quad \text{data da} \quad M \mapsto [M].$$

Se, fissata una base \mathcal{B} di V e posta $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, l'equazione di φ è

$$Y = MX,$$

allora l'equazione di $f = \bar{\varphi}$ (rispetto al riferimento proiettivo \mathcal{B} di $\mathbb{P}(V)$) è

$$\rho Y = MX$$

dove $\rho \in K^*$. Diremo che M è la matrice associata a f rispetto al riferimento \mathcal{B} , intendendo che è determinata a meno di una costante non nulla (più precisamente a f è associata una classe di equivalenza $[M]$ di matrici, tutte proporzionali a M).

Esempio 8.0.10. Determinare tutte e sole le proiettività f di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ tali che $f(A_i) = B_i$, con $i = 1, 2, 3$, dove

$$A_1 = (1 : 0 : 0), \quad A_2 = (0 : 1 : 0), \quad A_3 = (0 : 0 : 1)$$

$$B_1 = (1 : 1 : 0), \quad B_2 = (1 : 0 : 1), \quad B_3 = (0 : 1 : 1).$$

Per determinare una matrice M associata a f , imponiamo le 3 condizioni precedenti sulla generica matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

cioè, scrivendo le coordinate dei punti in colonne:

$$\rho B_i = M \cdot A_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ad esempio, dalla prima si ha

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}.$$

In modo analogo si impongono le altre due condizioni, ottenendo

$$M = \begin{pmatrix} \rho & \sigma & 0 \\ \rho & 0 & \tau \\ 0 & \sigma & \tau \end{pmatrix}.$$

In tal modo si è determinata una famiglia infinita di matrici che soddisfano i requisiti richiesti.

Di conseguenza tutte le proiettività cercate costituiscono la famiglia

$$\left\{ [M] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

La domanda che nasce naturalmente dal precedente Esempio è: quanti punti sono necessari per individuare univocamente una proiettività?

La risposta è nel seguente risultato.

Teorema 8.0.11 (Teorema di struttura per isomorfismi proiettivi). *Si considerino due spazi proiettivi $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$, entrambi di dimensione n .*

Se $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ e $Q_0, \dots, Q_{n+1} \in \mathbb{P}(V')$ sono due $(n+2)$ -uple di punti in posizione generale, allora esiste un'unico isomorfismo proiettivo

$$f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

tale che

$$f(P_i) = Q_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Dimostrazione. Proviamo dapprima l'esistenza di f .

Siano $v_i \in V$ e $w_i \in V'$ vettori tali che $P_i = [v_i]$ e $Q_i = [w_i]$, per ogni $i = 0, 1, \dots, n+1$. Per ipotesi, v_0, \dots, v_n sono una base di V e quindi si può scrivere

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n \tag{8.0.1}$$

dove i λ_i sono tutti non nulli, per l'ipotesi che gli $n+2$ punti siano in posizione generale.

Analogamente

$$w_{n+1} = \mu_0 w_0 + \dots + \mu_n w_n \tag{8.0.2}$$

dove i μ_i sono tutti non nulli.

Siano ora $\mathcal{B} := (\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_n v_n)$ e $\mathcal{B}' := (\mu_0 w_0, \dots, \mu_n w_n)$: si verifica facilmente che sono ancora basi di V e V' , rispettivamente. Per il Teorema di struttura per Applicazioni Lineari, esiste un unico isomorfismo di \mathbb{K} -spazi vettoriali

$$\varphi : V \longrightarrow V' \quad \text{tale che} \quad \varphi(\lambda_i v_i) = \mu_i w_i, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Di conseguenza, per (8.0.1) e (8.0.2), vale anche

$$\varphi(v_{n+1}) = w_{n+1}.$$

Pertanto, posto $f := [\varphi]$, si ha che f è un isomorfismo proiettivo e verifica

$$f(P_i) = Q_i, \quad \forall i = 0, \dots, n+1.$$

Proviamo ora l'unicità di f . Supponiamo che esista un isomorfismo proiettivo

$$f' : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

tale che

$$f'(P_i) = Q_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Poniamo $g := (f')^{-1} \circ f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$. Se mostriamo che $g = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$, concluderemo che $f' = f$.

A tale scopo, osserviamo dapprima che g risulta una proiettività in quanto composizione di isomorfismi, e quindi è indotta da un automorfismo ψ di V : $g = [\psi]$. Si noti che $g(P_i) = P_i$, per ogni $i = 0, 1, \dots, n+1$. Questo implica che

$$\psi(v_i) = \rho_i v_i,$$

per opportuni scalari $\rho_i \in \mathbb{K}^*$, per $i = 0, 1, \dots, n+1$.

In particolare, $\psi(v_{n+1}) = \rho_{n+1} v_{n+1}$. Inoltre,

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n \tag{8.0.3}$$

dove i λ_i sono tutti non nulli. Quindi, per la linearità di ψ si ottiene

$$\begin{aligned} \psi(v_{n+1}) &= \psi(\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_0 \psi(v_0) + \dots + \lambda_n \psi(v_n) = \\ &= \lambda_0 \rho_0 v_0 + \dots + \lambda_n \rho_n v_n. \end{aligned}$$

D'altra parte, sempre da (8.0.3), si ha

$$\begin{aligned} \psi(v_{n+1}) &= \rho_{n+1} v_{n+1} = \rho_{n+1} (\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n) = \\ &= \lambda_0 \rho_{n+1} v_0 + \dots + \lambda_n \rho_{n+1} v_n. \end{aligned}$$

Confrontando le due precedenti espressioni di $\psi(v_{n+1})$ e tenendo conto del fatto che v_0, \dots, v_n sono linearmente indipendenti, si ottiene

$$\begin{cases} \lambda_0 \rho_0 = \lambda_0 \rho_{n+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \rho_n = \lambda_n \rho_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_0 - \rho_{n+1} = 0 \\ \vdots \\ \rho_n - \rho_{n+1} = 0 \end{cases}$$

dove l'implicazione segue dal fatto che i λ_i sono tutti non nulli.

Quindi tutti i ρ_i coincidono e ponendo

$$\rho := \rho_0 = \dots = \rho_{n+1},$$

si ha che $\psi(v_i) = \rho v_i$, per ogni i . Di conseguenza, $\psi = \rho \text{Id}_V$ è un'omotetia e quindi $g = \bar{\psi} = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$, come volevamo. □

Esempio 8.0.12. Dal precedente teorema segue che per determinare una proiettività di \mathbb{P}^n servono due $n + 2$ -uple di punti in posizione generale. Ad esempio, per determinare una proiettività di \mathbb{P}^2 servono due quaterne di punti in posizione generale.

Consideriamo la situazione dell'Esempio 8.0.10: abbiamo determinato tutte le proiettività f di \mathbb{P}^2 tali che $f(A_i) = B_i$ per $i = 1, 2, 3$. Se alle 2 terne date aggiungiamo $A_4 = (1 : 1 : 1) = B_4$, poiché le due quaterne A_1, A_2, A_3, A_4 e B_1, B_2, B_3, B_4 sono in posizione generale, troveremo un'unica proiettività tale che $f(A_i) = B_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

Quindi basta imporre l'ultima condizione $f(A_4) = B_4$ alla famiglia determinata nell'Esempio 8.0.10, che risultava essere costituita dalle matrici

$$M = \begin{pmatrix} \rho & \sigma & 0 \\ \rho & 0 & \tau \\ 0 & \sigma & \tau \end{pmatrix}.$$

Tale condizione si esprime imponendo

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \sigma & 0 \\ \rho & 0 & \tau \\ 0 & \sigma & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho + \sigma \\ \rho + \tau \\ \sigma + \tau \end{pmatrix} \Rightarrow \rho = \sigma = \tau.$$

Pertanto le matrici richieste sono

$$M = \begin{pmatrix} \tau & \tau & 0 \\ \tau & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \tau \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che è associata a un'unica proiettività di \mathbb{P}^2 , come affermato dal Teorema 8.0.11.

Osservazione 8.0.13. Si confronti il Teorema 7.3.14 col Teorema 8.0.11. Il primo si può riformulare dicendo che la scelta di un riferimento proiettivo su $\mathbb{P}(V)$ equivale alla scelta di un isomorfismo proiettivo $\rho: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ che mette in corrispondenza i rispettivi punti fondamentali ed i punti unità, che a sua volta equivale alla scelta dei punti fondamentali (ordinati) e del punto unità.

In analogia con quanto visto negli spazi affini, introduciamo la seguente nozione.

Definizione 8.0.14. Due sottoinsiemi X e X' di \mathbb{P}^n si dicono *proiettivamente equivalenti* se esiste una proiettività f di \mathbb{P}^n tale che $f(X) = X'$.

Dal Teorema di struttura sugli isomorfismi proiettivi segue immediatamente questo risultato.

Corollario 8.0.15. Due r -uple di punti di \mathbb{P}^n in posizione generale sono proiettivamente equivalenti se $1 \leq r \leq n + 2$.

Capitolo 9

Coniche

9.1 Coniche nel piano euclideo

9.1.1 Coniche come luoghi geometrici

L'ambiente in cui inizialmente studieremo le coniche è il piano euclideo $\mathbb{E}^2 = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$. Successivamente avremo bisogno anche di coordinate complesse, quindi "amplieremo" il nostro ambiente ad $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$: dall'inclusione canonica $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$, segue l'inclusione dei piani euclidei

$$\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2 \hookrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2.$$

Le coniche sono note fino dai tempi più remoti come luoghi geometrici, cioè come insiemi di punti caratterizzati da proprietà geometriche.

Definizione 9.1.1. a) Fissata una retta δ e un punto F del piano, il luogo dei punti equidistanti da δ e da F si dice *parabola* e il punto F e la retta δ sono detti, rispettivamente, *fuoco* e *direttrice* della parabola.

b) Fissati due punti del piano F_1 ed F_2 , il luogo dei punti tali che la somma delle loro distanze da F_1 ed F_2 è costante si dice *ellisse*.

c) Fissati due punti del piano F_1 ed F_2 , il luogo dei punti tali che la differenza delle loro distanze da F_1 ed F_2 è costante si dice *iperbole*.

Nei casi (b) e (c), i punti F_1 e F_2 sono detti *fuochi* dell'ellisse o dell'iperbole, rispettivamente

Per determinare le equazioni di questi luoghi geometrici, al fine di semplificare i calcoli, scegliamo opportunamente i punti e le rette in questione.

a) Siano, ad esempio, in un riferimento cartesiano ortogonale $(O; x, y)$:

$$\delta : y = -p/2, \quad F = (0, p/2).$$

Sia $P = (x, y)$ un generico punto del piano; il luogo geometrico in questione è caratterizzato dalla proprietà

$$d(P, \delta) = d(P, F).$$

Poiché la proiezione ortogonale di P su δ è il punto $P' = (x, -p/2)$ e $d(P, \delta) = d(P, P')$, la condizione precedente diventa:

$$\|P - P'\|^2 = \|P - F\|^2 \quad \text{cioè} \quad \|(0, y + p/2)\|^2 = \|(x, y - p/2)\|^2$$

quindi

$$(y + p/2)^2 = x^2 + (y - p/2)^2 \quad \text{da cui} \quad x^2 = 2py.$$

b) Siano $F_1 = (-q, 0)$, $F_2 = (q, 0)$ (con $q \geq 0$) e sia k un numero reale positivo tale che $k > 2q$; vogliamo determinare l'equazione del luogo dei punti $P = (x, y)$ tali che

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = k. \quad (9.1.1)$$

Consideriamo le intersezioni di tale luogo geometrico con i semiassi positivi, cioè due punti del tipo $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$, con $a > 0, b > 0$. Dal fatto che $d(A, F_1) + d(A, F_2) = k$, segue $k = 2a$; inoltre dalla relazione $d(B, F_1) + d(B, F_2) = k$ segue che $2\sqrt{q^2 + b^2} = k$. Quindi si hanno le uguaglianze

$$k = 2a, \quad q^2 = a^2 - b^2.$$

(Si osservi che, in particolare, si deduce $a \geq b$). Elevando al quadrato ambo i membri di (9.1.1), si ottiene:

$$\|(x + q, y)\|^2 + \|(x - q, y)\|^2 + 2 \|(x + q, y)\| \|(x - q, y)\| = 4a^2$$

cioè

$$2(x^2 + y^2 + q^2) + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + q^2 + 2qx)(x^2 + y^2 + q^2 - 2qx)} = 4a^2$$

e quindi

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + q^2)^2 - 4q^2x^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + q^2).$$

Elevando ancora al quadrato e semplificando si ottiene

$$-q^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + y^2 + q^2)$$

e quindi, operando la sostituzione $q^2 = a^2 - b^2$, si ottiene l'equazione del luogo geometrico in questione in funzione dei due parametri a e b :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividendo ambo i membri per a^2b^2 si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se $q = 0$, cioè se $a = b$, allora i fuochi F_1 ed F_2 coincidono nell'origine, l'ellisse si dice circonferenza e la sua equazione assume la forma

$$x^2 + y^2 = r^2$$

dove $r = a = b$ ed è detto raggio della circonferenza.

c) Fissiamo i punti $F_1 = (-q, 0)$, $F_2 = (q, 0)$ (con $q \geq 0$) e un numero reale positivo $k < 2q$; vogliamo determinare l'equazione del luogo dei punti $P = (x, y)$ tali che

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = k. \quad (9.1.2)$$

Si osservi che, contrariamente al caso precedente, tale luogo geometrico non interseca l'asse y , in quanto ogni suo punto P è equidistante da F_1 e F_2 , mentre $k \neq 0$. Si consideri, invece, l'intersezione $A = (a, 0)$ ($a > 0$) di tale luogo geometrico con il semiasse positivo delle x . Anche per A vale

$$k = |d(A, F_1) - d(A, F_2)| = |a + q - |a - q||.$$

Se fosse $|a - q| = a - q$, si avrebbe $k = 2q$, contro l'ipotesi $k < 2q$. Quindi deve essere $a < q$ e dunque la condizione precedente implica

$$k = |a + q + a - q| = 2a.$$

Elevando al quadrato ambo i membri di (9.1.2), si ottiene:

$$\|(x + q, y)\|^2 + \|(x - q, y)\|^2 - 2 \|(x + q, y)\| \|(x - q, y)\| = 4a^2$$

cioè

$$2(x^2 + y^2 + q^2) - 2\sqrt{(x^2 + y^2 + q^2 + 2qx)(x^2 + y^2 + q^2 - 2qx)} = 4a^2$$

e quindi

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + q^2)^2 - 4q^2x^2} = (x^2 + y^2 + q^2) - 2a^2.$$

Elevando ancora al quadrato e semplificando si ottiene dunque:

$$-q^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + y^2 + q^2)$$

e quindi

$$(a^2 - q^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - q^2).$$

Poiché $a < q$, la quantità $q^2 - a^2$ è sicuramente positiva; si ponga dunque, in analogia con quanto visto nel caso b), $q^2 - a^2 = b^2$; pertanto l'equazione del luogo geometrico in questione diventa:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Dividendo ambo i membri per $-a^2b^2$ si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Osservazione 9.1.2. Da quanto visto in precedenza, segue che, se C è una parabola di equazione

$$x^2 = 2py,$$

allora la sua direttrice ha equazione $y = -p/2$ e il suo fuoco è il punto $(0, p/2)$. Con procedimento del tutto analogo, se C è una parabola di equazione $y^2 = 2px$, allora la sua direttrice è $x = -p/2$ e il suo fuoco è il punto $(p/2, 0)$. Se C è una ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e $a > b$, allora i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ (con procedimento del tutto analogo, si vede che se $a < b$ allora i suoi fuochi sono i punti $(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2})$). Se C è un'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

allora i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$.

Ricordiamo ora le rette e i punti notevoli di una conica.

Definizione 9.1.3. i) Sia C una parabola di fuoco F e di direttrice δ ; - la retta ortogonale a δ e passante per F si dice *asse* di C ; - il punto di intersezione dell'asse con la parabola si dice *vertice*.

ii) Sia C un'ellisse di fuochi (distinti) F_1 e F_2 ; - la retta per i fuochi si dice *asse maggiore*; - la retta asse del segmento $\overline{F_1F_2}$ si dice *asse minore*; - il punto di intersezione dell'asse maggiore e dell'asse minore (cioè il punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$) si dice *centro* di C ; - i quattro punti di intersezione di C con gli assi si dicono *vertici*; - la misura dei segmenti congiungenti il centro e i vertici che appartengono all'asse maggiore si dice *semiasse maggiore* (analogamente si definisce il *semiasse minore*).

- iii) Sia C un'iperbole di fuochi (distinti) F_1 e F_2 ; - la retta per i fuochi si dice *asse trasverso*;
 - la retta asse del segmento $\overline{F_1F_2}$ si dice *asse non trasverso*; - il punto di intersezione dell'asse trasverso e dell'asse non trasverso (cioè il punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$) si dice *centro* di C ; - i due punti di intersezione di C con l'asse trasverso si dicono *vertici*;
 - la misura dei segmenti congiungenti il centro e i vertici si dice *semiasse trasverso*.

Esempio 9.1.4. La parabola vista sopra: $x^2 = 2py$ ha fuoco $F = (0, p/2)$ e direttrice $\delta : y = -p/2$. Dunque il suo asse è $x = 0$ e il suo vertice è soluzione del sistema $x = 0 = x^2 - 2py$ e pertanto è il punto $(0, 0)$. L'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ha come asse maggiore la retta per i due fuochi $F_1 = (-q, 0)$, $F_2 = (q, 0)$, cioè la retta $y = 0$ e come asse minore la retta $x = 0$. Il centro è quindi il punto $(0, 0)$.

Definizione 9.1.5. Sia $C \subset \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ un sottoinsieme.

- a) Una retta r si dice *asse di simmetria* per C se, per ogni punto $P \in C$, il punto P' simmetrico di P rispetto a r appartiene ancora a C ;
 b) un punto O si dice *centro di simmetria* per C se, per ogni punto $P \in C$, il punto P' simmetrico di P rispetto a O appartiene ancora a C .

Proposizione 9.1.6.

i) Se C è una parabola di equazione

$$x^2 = 2py$$

allora il suo asse è asse di simmetria; inoltre il suo vertice è equidistante dal fuoco e dalla direttrice;

ii) se C è un'ellisse (con fuochi distinti) o un'iperbole, di equazioni rispettive

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

allora i suoi assi sono assi di simmetria e il suo centro è centro di simmetria.

Dimostrazione. i) Come visto nell'esempio precedente, l'asse di C è la retta $x = 0$ che risulta asse di simmetria per C . Infatti, se $P = (x_0, y_0) \in C$ allora vale $x_0^2 = 2py_0$. Il punto simmetrico di P rispetto all'asse y è $P' = (-x_0, y_0)$, che appartiene ancora a C in quanto $2py_0 = x_0^2 = (-x_0)^2$. Inoltre il vertice è l'origine $(0, 0)$, che è chiaramente equidistante da δ e dal fuoco F . ii) Se C è l'ellisse considerata, nel caso in cui $a > b$ per l'Osservazione 9.1.2

i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, dunque l'asse maggiore è la retta $y = 0$. L'asse minore è la retta $x = 0$, quindi il centro di C è l'origine. Il caso $a < b$ è analogo. Se un punto $P = (x_0, y_0)$ verifica l'equazione di C , allora anche i punti $P' = (x_0, -y_0)$ (simmetrico di P rispetto all'asse x), $P'' = (-x_0, y_0)$ (simmetrico di P rispetto all'asse y), $P''' = (-x_0, -y_0)$ (simmetrico di P rispetto all'origine), verificano la stessa equazione. Dunque gli assi dell'ellisse sono assi di simmetria e il centro è il centro di simmetria. Infine sia C l'iperbole data; ancora per l'Osservazione 9.1.2 i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$, dunque l'asse trasverso è la retta $y = 0$. L'asse non trasverso è la retta $x = 0$, quindi il centro di C è l'origine. Se un punto $P = (x_0, y_0)$ verifica l'equazione di C , allora anche i punti $P' = (x_0, -y_0)$, $P'' = (-x_0, y_0)$, $P''' = (-x_0, -y_0)$ verificano la stessa equazione. \square

Definizione 9.1.7. Una conica si dice *conica a centro* se è una ellisse o una iperbole.

9.1.2 Equazione di una conica generale e sua forma matriciale

Abbiamo visto che, in un opportuno sistema di riferimento, una parabola, un'ellisse e un'iperbole hanno una equazione del tipo

$$x^2 = 2py; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (9.1.3)$$

Tali equazioni sono piuttosto particolari, infatti i luoghi geometrici di cui sopra sono in una posizione particolare rispetto agli assi cartesiani (che, ad esempio, nel caso dell'ellisse e dell'iperbole, sono i loro assi di simmetria). Ciò che accomuna le tre equazioni precedenti è il fatto che sono tutte associate a polinomi di secondo grado nelle variabili x e y .

Vediamo ora come trattare il caso generale.

Definizione 9.1.8. Si dice *conica* il luogo dei punti di \mathbb{E}^2 aventi coordinate (x, y) che soddisfano una equazione polinomiale di secondo grado a coefficienti reali in due variabili, cioè una equazione del tipo:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (9.1.4)$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$. La denominazione dei coefficienti (con due indici) come pure il fattore 2 nei coefficienti di alcuni monomi sono dovuti a motivi pratici, che risulteranno chiari a breve.

Tratteremo generalmente i punti reali di una conica, tuttavia in alcuni contesti considereremo anche i punti a coordinate complesse, tenendo conto dell'inclusione $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2 \hookrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$.

Osservazione 9.1.9. Le coniche di (9.1.3) sono casi particolari dell'equazione generale (9.1.4); ad esempio la prima si ottiene per

$$a_{11} = 1, \quad a_{23} = -p, \quad a_{12} = a_{22} = a_{13} = a_{33} = 0$$

e analogamente le altre; si osservi che in tutte le equazioni (9.1.3) il coefficiente a_{12} del monomio xy è nullo.

Ci chiediamo se ogni equazione del tipo (9.1.4) descrive uno dei luoghi geometrici precedentemente definiti (cioè se è una parabola, un'ellisse o un'iperbole). Tale domanda, così formulata, ha chiaramente risposta negativa. Infatti, ad esempio, il polinomio $x^2 - y^2$ si fattorizza nel prodotto $(x + y)(x - y)$ e quindi la conica di equazione $x^2 - y^2 = 0$ risulta essere l'unione delle due rette di equazione $x + y = 0$ e $x - y = 0$.

Più in generale, ogni equazione di secondo grado del tipo

$$(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0$$

rappresenta l'unione di due rette. Tali rette non sempre sono reali. Ad esempio si consideri l'equazione $x^2 + y^2 = 0$. In $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ tale equazione ha la sola soluzione $(0, 0)$, mentre in $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$, poiché $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$, corrisponde all'unione delle due rette complesse e coniugate $x + iy = 0$ e $x - iy = 0$.

Definizione 9.1.10. Una conica si dice *degenere* se è unione di due rette (che possono essere reali e distinte, reali e coincidenti, complesse e coniugate).

Nel seguito utilizzeremo ampiamente una scrittura più sintetica ma equivalente all'equazione (9.1.4).

Definizione 9.1.11. Sia C la generica conica di equazione (9.1.4), cioè

$$C : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Le matrici

$$B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

sono dette, rispettivamente, *matrice dei coefficienti* e *matrice della parte quadratica* di C .

Osservazione 9.1.12. L'equazione (9.1.4) di una conica C diventa dunque

$$(x \ y \ 1) B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Inoltre la parte omogenea di secondo grado del polinomio che definisce la conica C , cioè

$$F_C(x, y) := a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2$$

è una *forma quadratica*, esprimibile anch'essa in termini di matrici come

$$F_C(x, y) = (x \ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Esempio 9.1.13. Le matrici associate alla parabola $y = 3x^2$ sono:

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservazione 9.1.14. Si noti che i 6 coefficienti a_{ij} che compaiono in (9.1.4) individuano una conica, ma non viceversa; infatti per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'equazione

$$ka_{11} x^2 + 2ka_{12} xy + ka_{22} y^2 + 2ka_{13} x + 2ka_{23} y + ka_{33} = 0$$

definisce lo stesso luogo di punti del piano, cioè la stessa conica.

9.2 Forma canonica: traslazioni

Vogliamo risolvere il seguente problema: data una conica non degenera in forma generale, esiste un riferimento cartesiano del piano euclideo in cui tale conica assume una forma particolarmente semplice, cioè una forma "simile" a quelle di (9.1.3)? O, più in generale, in cui la matrice A è diagonale? A tale scopo introduciamo la seguente importante nozione.

Definizione 9.2.1. Si dice *forma canonica* di una conica non degenera C una sua equazione in riferimento cartesiano $(O; x, y)$ che è di una delle seguenti forme:

$$\begin{array}{ll} (P.i) & x^2 = 2py & (P.ii) & y^2 = 2px \\ (E.i) & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 & (E.ii) & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \\ (I.i) & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & (I.ii) & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \end{array}$$

dove p, a, b sono non nulli. La conica C viene detta, rispettivamente: - parabola, nei casi (P.i) e (P.ii); - ellisse reale, nel caso (E.i); - ellisse immaginaria, nel caso (E.ii); - iperbole, nei casi (I.i) e (I.ii).

Risolveremo il problema iniziale in due passi successivi: dapprima, in questo paragrafo, ci limiteremo a coniche nella cui equazione non appare il monomio xy , cioè tali $a_{12} = 0$; vedremo che il sistema di riferimento cercato è ottenibile mediante traslazione. Nel prossimo paragrafo vedremo che, data una conica in forma generale, il riferimento in cui si annulla il coefficiente del monomio xy si otterrà mediante una rotazione. La procedura globale per ottenere una forma canonica di una conica risulterà essere, quindi, una rototraslazione del piano, cioè un'isometria diretta di \mathbb{E}^2 .

Esempio 9.2.2. Sia $\Gamma : y = 2x^2$ una parabola in forma canonica; vediamo come varia l'equazione di Γ se operiamo la traslazione del piano

$$t_{(-\alpha, -\beta)} : \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}.$$

Sostituendo si ottiene l'equazione di Γ in $(O'; X, Y)$:

$$Y = 2X^2 + 4\alpha X + 2\alpha^2 - \beta.$$

Esempio 9.2.3. Sia $\Gamma' : x^2 + 2y^2 = 1$ un'ellisse in forma canonica; con la traslazione $t_{(-\alpha, -\beta)}$ dell'esempio precedente, l'equazione di Γ' diventa:

$$X^2 + 2Y^2 + 2\alpha X + 4\beta Y + \alpha^2 + 2\beta^2 - 1 = 0.$$

Si osservi che, attraverso la traslazione $t_{(-\alpha, -\beta)}$, le coniche Γ e Γ' passano dalla forma canonica a una nuova forma nella quale il coefficiente a_{12} è zero. Proviamo ora il viceversa: se una conica ha una equazione priva del monomio xy , la si può ridurre a forma canonica operando una traslazione.

Osservazione 9.2.4 (Metodo del completamento dei quadrati). Si consideri, in un riferimento cartesiano $(O; x, y)$ di \mathbb{E}^2 , una conica non degenera con equazione priva del monomio xy

$$C : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (9.2.1)$$

Si possono presentare due casi: o entrambi i coefficienti a_{11} e a_{22} sono non nulli oppure uno dei due è nullo.

I. Caso $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$. (il caso $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = 0$ è del tutto analogo). L'equazione (9.2.1) diventa dunque:

$$a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} + 2a_{13}x = 0. \quad (9.2.2)$$

Poiché

$$a_{22} y^2 + 2 a_{23} y = a_{22} \left(y^2 + 2 \frac{a_{23}}{a_{22}} y \right) = a_{22} \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} \quad (9.2.3)$$

l'equazione (9.2.2) diventa:

$$a_{22} \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} + a_{33} + 2 a_{13} x = 0. \quad (9.2.4)$$

Poiché si suppone C non degenera, allora $a_{13} \neq 0$ e quindi

$$a_{22} \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 + 2 a_{13} \left(x + \frac{a_{33} a_{22} - a_{23}^2}{2 a_{22} a_{13}} \right) = 0$$

da cui

$$\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 = -\frac{2 a_{13}}{a_{22}} \left(x + \frac{a_{33} a_{22} - a_{23}^2}{2 a_{22} a_{13}} \right).$$

Quindi con la traslazione

$$\begin{cases} X = x + \frac{a_{33} a_{22} - a_{23}^2}{2 a_{22} a_{13}} \\ Y = y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

e ponendo $p = -a_{13}/a_{22}$, si ottiene la forma canonica:

$$Y^2 = 2 p X.$$

Il caso $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = 0$ è analogo e conduce (nell'ipotesi non degenera, cioè $a_{23} \neq 0$) alla forma canonica

$$X^2 = 2 p Y.$$

Se non richiediamo alla conica in questione di essere non degenera, dobbiamo esaminare anche il caso $a_{13} = 0$ (rispettivamente, $a_{23} = 0$); in questo caso l'equazione (9.2.4) diventa:

$$\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 = \frac{a_{23}^2 - a_{33} a_{22}}{a_{22}^2}$$

e con la traslazione

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

assume la forma

$$Y^2 = q \quad (X^2 = q). \quad (9.2.5)$$

II. Caso $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$. A meno di un cambio di segno nell'equazione (9.2.1), si può supporre $a_{11} > 0$. Tenendo conto dell'uguaglianza (9.2.3) e dell'analogia

$$a_{11} x^2 + 2 a_{13} x = a_{11} \left(x^2 + 2 \frac{a_{13}}{a_{11}} x \right) = a_{11} \left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}} \right)^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}$$

l'equazione (9.2.1) diventa:

$$a_{11} \left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}} \right)^2 + a_{22} \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 + a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} = 0.$$

Se si pone $h = -a_{33} + \frac{a_{13}^2}{a_{11}} + \frac{a_{23}^2}{a_{22}}$ e si opera la traslazione

$$\begin{cases} X = x + \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ Y = y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

nel sistema di riferimento $(O'; X, Y)$ la conica C ha equazione

$$a_{11} X^2 + a_{22} Y^2 = h. \quad (9.2.6)$$

Se $h \neq 0$ si ha chiaramente

$$\frac{a_{11}}{h} X^2 + \frac{a_{22}}{h} Y^2 = 1. \quad (9.2.7)$$

II.a) Caso $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$.

- se $h > 0$ i coefficienti della (9.2.7) sono strettamente positivi quindi possiamo porre $a_{11}/h = 1/a^2$ e $a_{22}/h = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$. In tal caso l'equazione (9.2.7) diventa:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

- se $h < 0$ si ponga $-a_{11}/h = 1/a^2$ e $-a_{22}/h = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$; quindi l'equazione (9.2.7) diventa

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1.$$

- se $h = 0$, ponendo nell'equazione (9.2.6) $a_{11} = 1/a^2$ e $a_{22} = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0. \quad (9.2.8)$$

II.b) Caso $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$. Con un ragionamento del tutto analogo al precedente, si hanno i seguenti casi.

- se $h > 0$, con opportune sostituzioni, si ottiene

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

- se $h < 0$, con opportune sostituzioni, si ottiene

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1.$$

- se $h = 0$, con opportune sostituzioni, si ottiene

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0. \quad (9.2.9)$$

Osservazione 9.2.5. Esaminiamo geometricamente le tre coniche particolari emerse nella costruzione precedente. -) La conica C di equazione (9.2.5), cioè

$$x^2 = q \quad (\text{rispettivamente } y^2 = q)$$

è l'unione delle rette $x = \pm\sqrt{q}$. Se $q > 0$, tali rette sono reali e distinte e parallele all'asse y ; se $q < 0$ tali rette sono complesse e coniugate; infine se $q = 0$ la conica C risulta essere l'asse y "contato due volte", cioè costituita da due rette coincidenti. -) Si noti poi che l'equazione (9.2.8), cioè

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

è soddisfatta da un solo punto a coordinate reali: l'origine $(0, 0)$; mentre nel piano complesso $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$ tale conica è l'unione di due rette complesse e coniugate, in quanto si può operare la fattorizzazione di polinomi (in $\mathbb{C}[x, y]$):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right).$$

-) Infine l'equazione (9.2.9), cioè

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

corrisponde all'unione di due rette reali e distinte, in quanto si può operare la fattorizzazione di polinomi (in $\mathbb{R}[x, y]$):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Quanto precede conduce a provare il seguente fatto.

Osservazione 9.2.6. L'equazione (9.2.6) rappresenta una conica non degenera se e solo se $h \neq 0$.

Infatti, col *Metodo di completamento dei quadrati*, si è provato che, se $h \neq 0$ allora si ottiene una forma canonica di tipo (E.i), (E.ii), (I.i) o (I.ii), cioè una conica a centro non degenera.

Viceversa, se $h = 0$ si ottiene un'equazione dei tipi (9.2.8) o (9.2.9), le quali, come osservato sopra, rappresentano coniche degeneri.

E' naturale, dopo lo studio precedente, dare la seguente nozione.

Definizione 9.2.7. Si dice *forma canonica* di una conica degenera una delle equazioni del tipo (9.2.5), (9.2.8), (9.2.9) e le corrispondenti coniche si diranno *degeneri di tipo parabolico, ellittico, iperbolico*, rispettivamente. In analogia con la Definizione 9.2.1, le denoteremo, rispettivamente, con le sigle (P.iii), (E.iii), (I.iii).

Definizione 9.2.8. Una conica si dice *semplicemente degenera* se è unione di due rette distinte e *doppiamente degenera* se è unione di due rette coincidenti.

La procedura vista nell'Osservazione 9.2.4 prova il seguente risultato.

Teorema 9.2.9. Sia C una conica (degenera o non degenera) di equazione priva del monomio xy in un riferimento cartesiano $(O; x, y)$; allora esiste un riferimento cartesiano $(O'; X, Y)$, ottenuto dal precedente mediante traslazione, in cui C si esprime con un'equazione in forma canonica.

Esempio 9.2.10. Sia C la conica di equazione

$$C : x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 3 = 0.$$

Applicando il metodo del completamento dei quadrati, poiché

$$x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1, \quad 4y^2 - 12y = 4 \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 9$$

si ha:

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 3 = (x + 1)^2 + 4 \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 - 7.$$

Pertanto, operando la traslazione:

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - \frac{3}{2} \end{cases}$$

l'equazione di C diventa

$$X^2 + 4Y^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{X^2}{7} + \frac{Y^2}{7/4} = 1.$$

Si tratta quindi di una ellisse di centro $(-1, 3/2)$, assi le rette $x = -1$ e $y = 3/2$ e semiassi $\sqrt{7}$, $\sqrt{7}/2$.

Infine si possono determinare i 4 vertici dell'ellisse intersecandola con gli assi, sia nel sistema di riferimento $(O; x, y)$ che nel sistema $(O'; X, Y)$ (si confrontino i risultati ottenuti con i due metodi).

9.3 Forma canonica: rotazioni

Esempio 9.3.1. Nel sistema di riferimento $(O; x, y)$, sia data la parabola Γ di equazione (canonica) $y = x^2$. Vogliamo determinare l'equazione di Γ nel sistema di riferimento $(O; X, Y)$ ottenuto dal precedente mediante la seguente rotazione:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione di Γ , si ottiene

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y = \frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 \quad \Rightarrow \quad X^2 + 2XY + Y^2 + \sqrt{2}X - \sqrt{2}Y = 0.$$

In questo esempio si vede che, per effetto della rotazione, nella ultima equazione della conica appare il monomio XY . E' naturale chiedersi se vale il viceversa, cioè se sia possibile, attraverso una rotazione, passare da un'equazione che contiene il monomio XY a una che non lo contiene. In altri termini, vogliamo determinare un riferimento in cui la matrice della forma quadratica di una conica è diagonale. Il teorema di diagonalizzazione delle matrici reali simmetriche garantisce che ciò è possibile.

Iniziamo con un risultato che lega le equazioni di una conica in due diversi riferimenti cartesiani.

Teorema 9.3.2. Siano $(O; x, y)$ e $(O'; X, Y)$ due riferimenti cartesiani di \mathbb{E}^2 e siano Q e P , rispettivamente, le matrici completa e quella di rotazione associate al cambio speciale di riferimento dal primo al secondo. Sia $C \subset \mathbb{E}^2$ una conica e siano B e A le matrici di C nel riferimento $(O; x, y)$. Poste

$$B' := {}^tQ B Q \quad e \quad A' := {}^tP A P = P^{-1} A P,$$

allora B' e A' sono matrici associate a C nel riferimento $(O'; X, Y)$. In particolare, B e B' sono congruenti e A e A' sono simili.

Siano

$$P := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \quad e \quad Q := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a \\ p_{21} & p_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove la matrice P è ortogonale speciale, dunque ${}^tP = P^{-1}$ e $\det(P) = 1$. Il cambio di coordinate è dato da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.3.1)$$

Trasponendo ambo i membri:

$$(x \ y \ 1) = (X \ Y \ 1) {}^tQ. \quad (9.3.2)$$

La conica C , nel sistema di riferimento $(O; x, y)$, ha equazione

$$C : (x \ y \ 1) B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

e quindi, operando le sostituzioni (9.3.1) e (9.3.2) si ottiene

$$C : (X \ Y \ 1) {}^tQ B Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

che è l'equazione di C nel riferimento $(O'; X, Y)$. Si osservi che $B' = {}^tQ B Q$ è ancora una matrice simmetrica, come deve essere in quanto matrice di una conica. Con un facile calcolo, si vede che la matrice A' della forma quadratica di C nel riferimento $(O'; X, Y)$, cioè la sottomatrice 2×2 di B' ottenuta intersecando le prime due righe con le prime due colonne, è esattamente

$$A' = {}^tP A P = P^{-1} A P$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che P è ortogonale.

Esempio 9.3.3. Riduciamo a forma canonica la conica

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizziamo A come al solito, calcolandone il polinomio caratteristico, gli autovalori, gli autospazi e quindi una base di autovettori per l'endomorfismo di \mathbb{R}^2 ad essa associato:

$$p_A(T) = |A - TI| = \begin{vmatrix} 1-T & -1 \\ -1 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2 - 1 = T^2 - 2T = T(T-2)$$

da cui si ottengono gli autovalori

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$$

e gli autospazi associati:

$$V_0 = \ker(f_A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\} = \langle (1, 1) \rangle$$

$$V_2 = \ker(f_{A-2I}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} = \langle (1, -1) \rangle.$$

Pertanto la matrice ortogonale speciale P che esprime l'opportuno cambiamento di base è:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(Si noti che l'ordine degli autovettori è scambiato per ottenere $\det(P) = 1$). Se non operiamo alcuna traslazione, la matrice di rototraslazione ha la forma:

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice della conica C nel sistema di riferimento $(O; \bar{x}, \bar{y})$, dove

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y} \end{cases} \quad (9.3.3)$$

diventa dunque, per il Teorema 9.3.2,

$$\begin{aligned}
 &= {}^t B = \\
 &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Quindi l'equazione di C nel nuovo sistema di riferimento risulta:

$$2\bar{x}^2 + 4\sqrt{2}\bar{y} - 1 = 0$$

da cui

$$\bar{x}^2 = -2\sqrt{2} \left(\bar{y} - \frac{\sqrt{2}}{8} \right).$$

Operando dunque la traslazione

$$\begin{cases} X = \bar{x} \\ Y = \bar{y} - \frac{\sqrt{2}}{8} \end{cases} \quad (9.3.4)$$

si ottiene la parabola, in forma canonica:

$$X^2 = -2\sqrt{2} Y.$$

Chiaramente si può procedere alla rototraslazione globale mediante la matrice Q che esprima sia la precedente rotazione, sia la traslazione sopra scritta. Da (9.3.3) e (9.3.4) si hanno le equazioni della rototraslazione

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{8} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{8} \end{cases}$$

quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine si può verificare che la matrice della conica nel riferimento $(O'; X, Y)$ diventa

$$\begin{aligned} {}^t Q B Q &= \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = B'. \end{aligned}$$

L'esempio precedente suggerisce un metodo generale per la riduzione di una conica a forma canonica: è la dimostrazione (costruttiva) del seguente risultato.

Teorema 9.3.4. *Sia C una conica data in un sistema di riferimento cartesiano $(O; x, y)$ di \mathbb{E}^2 ; allora esiste un riferimento cartesiano $(O'; X, Y)$, ottenuto dal precedente mediante rototraslazione, in cui C ha un'equazione in forma canonica.*

Siano A e B le matrici associate a C nel riferimento $(O; x, y)$.

*i) Diagonalizzazione di A . - Se $a_{12} = 0$ (cioè se A è diagonale) si passa al punto *iii*). - Se $a_{12} \neq 0$, si diagonalizza A nel modo consueto, determinando una base ortonormale di autovettori: $v_1 = (p_{11}, p_{21})$, $v_2 = (p_{12}, p_{22})$, in modo che la matrice ortogonale*

$$P := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

sia speciale.

ii) Posta

$$:= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si opera la rotazione corrispondente

$$\begin{cases} x = p_{11}\bar{x} + p_{12}\bar{y} \\ y = p_{21}\bar{x} + p_{22}\bar{y} \end{cases} \quad (9.3.5)$$

Nel riferimento $(O; \bar{x}, \bar{y})$ la conica ha matrice ${}^t B$ e matrice della forma quadratica $\bar{A} = {}^t P A P$, che risulta dunque diagonale. Pertanto in tale riferimento la conica ha equazione

$$(\bar{x} \ \bar{y} \ 1) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

che è priva del monomio $\bar{x}\bar{y}$.

iii) Si opera la traslazione da $(O; \bar{x}, \bar{y})$ a $(O'; X, Y)$ indotta dal Metodo del completamento dei quadrati

$$\begin{cases} X = \bar{x} + \alpha \\ Y = \bar{y} + \beta \end{cases} \quad (9.3.6)$$

Per ottenere la forma canonica di C , cioè la sua equazione nel sistema $(O'; X, Y)$, basta operare la sostituzione inversa di (9.3.6) nell'equazione della conica in $(O; \bar{x}, \bar{y})$.

iv) Infine la rototraslazione da $(O; x, y)$ a $(O'; X, Y)$ si ottiene sostituendo la relazione inversa di (9.3.6) in (9.3.5).

Osservazione 9.3.5. Il precedente teorema può essere riformulato così: data una conica C esiste una rototraslazione φ tale che $\varphi(C)$ è espressa in forma canonica.

Corollario 9.3.6. Data un'equazione di secondo grado in x e y a coefficienti reali, il luogo degli zeri (in $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$) di tale equazione, se contiene almeno due punti reali, è uno dei seguenti luoghi geometrici: ellisse, iperbole, parabola, unione di due rette (distinte o coincidenti).

9.4 Classificazione delle coniche in \mathbb{E}^2

Utilizzando i precedenti risultati, vedremo quali sono gli invarianti di una conica e come è possibile determinarne una forma canonica senza calcolare esplicitamente la rototraslazione.

Teorema 9.4.1. Sia C una conica avente, come matrici completa e della forma quadratica, rispettivamente, B e A , nel riferimento $(O; x, y)$. Siano B' e A' le matrici associate a C (la cui equazione è ottenuta mediante cambio speciale di coordinate) nel riferimento $(O'; X, Y)$. Allora:

- i) i polinomi caratteristici di A e di A' , $p_A(T)$ e $p_{A'}(T)$, coincidono;
- ii) $\det(A) = \det(A')$ e $\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$
- iii) $\det(B) = \det(B')$ e $\text{rg}(B) = \text{rg}(B')$.

Per il Teorema 9.3.2, le matrici A e A' sono simili e le matrici B e B' sono congruenti (tramite una matrice Q di determinante 1). La tesi segue dalle Proposizioni ?? e ??.

Alla luce dei Teoremi 9.3.4 e 9.4.1, si può caratterizzare una conica nel piano euclideo mediante i determinanti delle matrici associate. Infatti, data una conica in forma generale, esiste un'isometria diretta del piano tale che la conica trasformata sia in forma canonica. Per quest'ultima è immediato calcolare i determinanti e i ranghi delle matrici associate; ma tali invarianti, come appena visto, si mantengono per isometria.

La seguente tabella contiene le possibili forme canoniche e i rispettivi invarianti numerici. Per convenzione, le forme paraboliche (P.i) e (P.ii) restano distinte e il coefficiente di x^2 (resp. y^2) è esattamente l'autovalore non nullo di A . Inoltre le coniche di tipo (E) ed (I) possono essere scritte anche entrambe nell'unica forma

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

dove α e β sono gli autovalori di A .

Entrambe queste convenzioni sono utili per esprimere in modo omogeneo le rispettive matrici complete delle coniche e per il "metodo rapido" di riduzione a forma canonica illustrato nella prossima Osservazione 9.4.3.

tipo	equazione	B	$\det(B)$	$\det(A)$
P.i	$\alpha x^2 = 2\gamma y, \gamma \neq 0$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$	$-\alpha\gamma^2$	0
P.ii	$\beta y^2 = 2\gamma x, \gamma \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-\beta\gamma^2$	0
P.iii	$x^2 = \gamma (y^2 = \gamma)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}$	0	0
E.i	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_1$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta > 0$
E.ii	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_2$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta > 0$
E.iii	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} *_3$	0	$\alpha\beta > 0$
I.i	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_4$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta < 0$
I.ii	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_5$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta < 0$
I.iii	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} *_6$	0	$\alpha\beta < 0$

Tabella delle forme canoniche in \mathbb{E}^2

dove si sono posti:

$$*_1 \quad \alpha = b^2, \quad \beta = a^2, \quad \gamma = a^2b^2$$

$$*_2 \quad \alpha = b^2, \quad \beta = a^2, \quad \gamma = -a^2b^2$$

$$*_3 \quad \alpha = b^2, \quad \beta = a^2$$

$$*_4 \quad \alpha = b^2, \quad \beta = -a^2, \quad \gamma = a^2b^2$$

$$*_5 \quad \alpha = b^2, \quad \beta = -a^2, \quad \gamma = -a^2b^2$$

$$*_6 \quad \alpha = b^2, \quad \beta = -a^2$$

Teorema 9.4.2. *Sia C una conica e siano A e B le matrici associate in un qualunque sistema di riferimento cartesiano. Allora:*

a) C è degenere se e solo se $|B| = 0$; in particolare, è doppiamente degenere se e solo se $\text{rg}(B) = 1$;

b) se C è non degenere allora:

- C è una parabola se e solo se $|A| = 0$;
- C è un'ellisse se e solo se $|A| > 0$;
- C è un'iperbole se e solo se $|A| < 0$.

Segue dal Teorema 9.3.4, dal Teorema 9.4.1 e dalla precedente tabella.

La discussione precedente fornisce un metodo per ottenere la forma canonica di una conica non degenere senza utilizzare le matrici di rototraslazione.

Osservazione 9.4.3 *(Metodo rapido di riduzione a forma canonica).* Sia C una conica e siano A e B le matrici associate in un certo sistema di riferimento cartesiano.

i) Si determinano gli autovalori α e β della matrice A (cioè le radici, sicuramente reali, del polinomio caratteristico $p_A(T)$).

ii) Caso $\det(A) = 0$.

- Poiché $\det(A) = \alpha\beta$, si può supporre $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$.

- Se $\det(B) = -\alpha\gamma^2 \neq 0$, la conica è una parabola e si ha

$$\gamma = \pm \sqrt{-\frac{|B|}{\alpha}}$$

e quindi una forma canonica è $\alpha X^2 = 2\gamma Y$.

- Se $\det(B) = 0$, la conica è degenera e una sua forma canonica è $X^2 = \gamma$. Se $\gamma = 0$ allora C è unione di due rette reali e coincidenti; se $\gamma > 0$, C è unione di due rette reali e distinte, se $\gamma < 0$, C è unione di due rette complesse e coniugate. Si noti che, in questo caso, non si riesce a determinare γ partendo solo dalle matrici A e B .

iii) Caso $\det(A) \neq 0$.

- Poiché $\det(A) = \alpha\beta$, allora $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Inoltre $\det(B) = -\alpha\beta\gamma$.
- Se $\det(B) \neq 0$, la conica è un'ellisse o un'iperbole e si ha

$$\gamma = -\frac{|B|}{|A|}$$

e quindi una forma canonica della conica è $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$.

- Se $\det(B) = 0$, la conica è degenera e di forma canonica $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 0$.

Esempio 9.4.4. Determiniamo una forma canonica della conica vista nell'Esempio 9.3.3

$$C : x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$$

con il metodo ora descritto. Abbiamo già visto che le matrici associate a C sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$|B| = -16 \quad \text{e} \quad |A| = 0$$

la conica è non degenera ed è una parabola, infatti gli autovalori di A calcolati in precedenza sono: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Scegliendo dunque la forma (P.i):

$$\alpha X^2 = 2\gamma Y$$

poiché $\alpha = 2$ e $\det(B) = -\alpha\gamma^2$, si ha $\gamma^2 = 8$; scegliendo ad esempio $\gamma = -2\sqrt{2}$, si ottiene

$$2X^2 = -4\sqrt{2}Y$$

cioè

$$X^2 = -2\sqrt{2}Y.$$

L'altra scelta $\gamma = 2\sqrt{2}$ significa riferirsi ad un altro sistema di riferimento $(O'; \bar{X}, \bar{Y})$ nel quale la parabola ha equazione:

$$\bar{X}^2 = 2\sqrt{2}\bar{Y}.$$

Esempio 9.4.5. Determiniamo una forma canonica della conica

$$C : 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 5 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

di determinanti, rispettivamente:

$$|B| = -11, \quad |A| = 2.$$

Quindi C è non degenera ed è una ellisse (reale). Determiniamone una forma canonica del tipo:

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma,$$

dove α e β sono gli autovalori di A , $|A| = \alpha\beta$ e $|B| = -\alpha\beta\gamma$. Poiché

$$p_A(T) = |A - TI| = T^2 - 4T + 2$$

gli autovalori di A sono

$$\alpha = 2 - \sqrt{2}, \quad \beta = 2 + \sqrt{2}.$$

Inoltre $\gamma = -|B|/|A| = 11/2$. Da cui segue che una forma canonica di C è

$$(2 - \sqrt{2})X^2 + (2 + \sqrt{2})Y^2 = \frac{11}{2}.$$

Si noti che anche in questo caso non è unica la forma canonica: infatti, scambiando gli autovalori α e β , la forma canonica risulta

$$(2 + \sqrt{2})\bar{X}^2 + (2 - \sqrt{2})\bar{Y}^2 = \frac{11}{2}.$$

Concludiamo col risultato più importante di questa sezione. Se richiediamo che una conica sia un insieme non vuoto di punti, oltre che soddisfare un'equazione del tipo (9.1.4), dobbiamo eliminare il caso (E.ii) dalla tabella precedente.

Teorema 9.4.6 (Classificazione delle coniche nel piano euclideo reale). Ogni conica C in $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ (costituita da almeno un punto reale) è definita, a meno di isometrie dirette, da un'equazione di una delle seguenti famiglie

(P) famiglie paraboliche:

$$x^2 = qy, \quad q \neq 0$$

$$x^2 = q^2, \quad q \neq 0$$

(E) famiglie ellittiche:

$$x^2 + p^2y^2 = q^2, \quad p, q \neq 0$$

$$x^2 + p^2y^2 = 0, \quad p \neq 0$$

(I) famiglie iperboliche:

$$x^2 - p^2y^2 = q^2, \quad p, q \neq 0$$

$$x^2 - p^2y^2 = 0, \quad p \neq 0$$

(D) conica doppiamente degenera:

$$x^2 = 0$$

descritte dai parametri $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Inoltre le famiglie precedenti sono distinte, a meno di isometrie.

Per i Teoremi 9.3.2 e 9.3.4, è sufficiente mostrare che ogni conica in forma canonica può essere trasformata in una conica delle precedenti famiglie attraverso un'isometria diretta. Le forme canoniche delle coniche sono elencate nella Tabella precedente, ma bisogna tenere conto della limitazione dell'ipotesi: la conica deve contenere almeno un punto reale. Questo esclude alcune coniche degeneri paraboliche e precisamente quelle di tipo (P.iii) di equazione $x^2 = \gamma$ con $\gamma < 0$ e le ellissi immaginarie (E.ii): entrambe, come osservato, non hanno punti reali. Prendiamo dunque in esame le restanti forme canoniche della Tabella precedente.

(P.i) Per tali coniche è immediato: basta dividere l'equazione per α e si ottiene la prima famiglia parabolica. (P.ii) L'equazione è $\beta y^2 = 2\gamma x$ associata alla matrice B come nella Tabella. Si ponga

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

quindi è una conica di tipo (P.i) e dunque riconducibile alla prima famiglia parabolica. (P.iii) Una conica di equazione $x^2 = \gamma$ ha punti reali se e solo se $\gamma \geq 0$. Quindi, nel caso $\gamma > 0$, possiamo scrivere la sua equazione come $x^2 = q^2$, ottenendo la seconda famiglia parabolica. Se invece $\gamma = 0$, otteniamo la conica doppiamente degenerata denotata con (D) nell'enunciato. (E.i) Tali coniche hanno equazione

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

e quindi, dividendo per b^2 si ottiene la prima famiglia ellittica. (E.iii) Per tali coniche si procede come in (E.i), ottenendo la seconda famiglia ellittica. (I.i) Tali coniche hanno equazione

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

e quindi, dividendo per b^2 si ottiene la prima famiglia iperbolica. (I.ii) Basta applicare l'isometria associata alla matrice Q definita sopra e si ottiene una conica di tipo (I.i) e quindi riconducibile alla prima famiglia iperbolica. (I.iii) Per tali coniche si procede come in (I.i), ottenendo la seconda famiglia iperbolica.

Per provare l'ultima affermazione, è sufficiente confrontare i determinanti delle matrici associate a ogni famiglia dell'enunciato e applicare "in negativo" il Teorema 9.4.1.

famiglia	$\det(B)$	$\det(A)$
(P) - 1	< 0	0
(P) - 2	0	0
(E) - 1	< 0	> 0
(E) - 2	0	> 0
(I) - 1	> 0	< 0
(I) - 2	0	< 0
(D)	0	0

Chiaramente le righe di questa tabella sono tutte distinte, eccetto la seconda famiglia parabolica e la conica (unica) doppiamente degenerata. In tal caso, però, il rango di B è diverso: vale 2 nel primo caso e 1 nel secondo. Questo conclude la dimostrazione.

Osservazione 9.4.7. Come notato nella dimostrazione del precedente Teorema di classificazione, sono escluse le coniche di tipo (P.iii) di equazione $x^2 = \gamma$ con $\gamma < 0$ e quelle di tipo (E.ii)

di equazione $b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$: infatti entrambe non hanno punti reali. La prima è unione di due rette complesse e coniugate $x = \pm\sqrt{\gamma}$ e la seconda è un'ellisse immaginaria.

Nell'analogo risultato di *Classificazione delle coniche nel piano euclideo complesso* (che qui omettiamo), entrambe vengono recuperate nelle famiglie elencate nel *Teorema di classificazione* visto sopra.

9.5 Studio di una conica in forma generale

Lo scopo di questo paragrafo è determinare i punti e le rette notevoli di una conica in forma generale. Strumento fondamentale sarà il Teorema 9.3.4 che qui ricordiamo:

Sia $C \subset \mathbb{E}^2$ una conica data in un sistema di riferimento cartesiano (O, \mathcal{B}) con coordinate (x, y) . Allora esiste un riferimento cartesiano (O', \mathcal{B}') con coordinate (X, Y) , ottenuto dal precedente mediante rototraslazione (isometria diretta), in cui C ha un'equazione in forma canonica.

Utilizzeremo la consueta notazione, introdotta nel Teorema 9.3.2, dove Q e P denotano, rispettivamente, le matrici completa e quella di rotazione associate al cambio (speciale) di riferimento

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \quad e \quad Q = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a \\ p_{21} & p_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.5.1)$$

con $P \in SO(2)$ e vale la (9.3.1):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.5.2)$$

Chiaramente non è restrittivo supporre che \mathcal{B} sia la base canonica, quindi P è la matrice le cui colonne sono i vettori della base (ortonormale) \mathcal{B}' .

Osservazione 9.5.1. I punti e le rette notevoli di una conica in forma canonica sono stati definiti e studiati nel Paragrafo 4.1: gli assi di una conica a centro sono gli assi coordinati X e Y , il suo centro è l'origine O' , i suoi vertici sono le intersezioni della conica con gli assi. Nel caso della parabola, il suo asse è l'asse Y e il vertice l'origine O' .

E' chiaro che basta applicare a tali punti e rette il cambio di coordinate inverso a quello descritto sopra per ottenerli nel riferimento $(O; x, y)$. Cercheremo invece strade alternative più brevi.

Iniziamo stabilendo alcune proprietà generali

Lemma 9.5.2. *Gli assi di simmetria e i centri di simmetria di un sottoinsieme di \mathbb{E}^2 si mantengono per isometrie. Più precisamente, se f è un'isometria del piano, X un sottoinsieme di \mathbb{E}^2 e r è una retta asse di simmetria per X , allora $f(r)$ è asse di simmetria per $f(X)$. Inoltre, se M è centro di simmetria per X , allora $f(M)$ è centro di simmetria per $f(X)$.*

Per esercizio.

Proposizione 9.5.3. *Sia C una conica nel piano euclideo \mathbb{E}^2 .*

- i) Se C è una parabola allora il suo asse è asse di simmetria; inoltre il suo vertice è equidistante dal fuoco e dalla direttrice;*
- ii) se C è un'ellisse (con fuochi distinti) o un'iperbole, allora i suoi assi sono assi di simmetria e il suo centro è (l'unico) centro di simmetria.*

Segue dal Lemma precedente e dal fatto che l'enunciato vale per coniche in forma canonica grazie alla Proposizione 9.1.6.

Vediamo ora come risolvere il problema iniziale: determinare gli assi e il centro di una conica a centro e l'asse e il vertice di una parabola, quando queste siano date in forma generale (senza trasformarla in forma canonica).

Proposizione 9.5.4. *Sia $(O; x, y)$ un riferimento cartesiano di \mathbb{E}^2 e sia C una conica a centro. Allora C ha per centro il punto O se e solo se nella sua equazione non compaiono i termini di primo grado.*

Supponiamo dapprima che C sia non degenera e abbia equazione generale

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (9.5.3)$$

Per la Proposizione 9.5.3, è sufficiente provare che O è suo centro di simmetria se e solo se $a_{13} = 0 = a_{23}$.

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di C e $Q_0 = (-x_0, -y_0)$ il suo simmetrico rispetto a O . Se $a_{13} = 0 = a_{23}$ è chiaro che anche le coordinate di Q_0 soddisfano l'equazione (9.5.3) e dunque $Q_0 \in C$. Pertanto O è centro di simmetria della conica.

Viceversa, supponiamo che O sia il centro di simmetria della conica e si consideri un altro punto $P_1 = (x_1, y_1) \in C$ in modo che O, P_0, P_1 non siano allineati (tale punto esiste perché C è non degenera). Dunque anche il punto $Q_1 = (-x_1, -y_1)$, simmetrico di P_1 rispetto a O , appartiene alla conica. In conclusione:

$$P_0, Q_0 \in C \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0 \\ a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 - 2a_{13}x_0 - 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0 \end{cases}$$

e dal sistema precedente (ad esempio, sottraendo un'equazione dall'altra) segue $a_{13}x_0 + a_{23}y_0 = 0$. In modo del tutto analogo, da $P_1, Q_1 \in C$ segue $a_{13}x_1 + a_{23}y_1 = 0$. Abbiamo quindi provato che, se O è centro di simmetria della conica, allora (a_{13}, a_{23}) è soluzione del sistema lineare nelle incognite u e v :

$$\begin{cases} u x_0 + v y_0 = 0 \\ u x_1 + v y_1 = 0 \end{cases}.$$

Ma il determinante della matrice dei coefficienti è non nullo perché, per costruzione O, P_0, P_1 non sono allineati. Pertanto il sistema ha solo la soluzione nulla e quindi $(a_{13}, a_{23}) = (0, 0)$ come volevamo.

Esempio 9.5.5. Sia data la conica $\Gamma : 3x^2 + 4xy - y^2 + 3 = 0$; vogliamo vedere se è a centro e, in tal caso, determinarlo. Poiché $|A| = -7$ e $|B| = -21$, Γ è non degenera ed è un'iperbole. Il suo centro è nell'origine per la Proposizione 9.5.4, in quanto la sua equazione non contiene i monomi di primo grado.

Teorema 9.5.6. Sia C una conica a centro di equazione

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Il suo centro è il punto le cui coordinate (u, v) sono l'unica soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}u + a_{12}v + a_{13} = 0 \\ a_{12}u + a_{22}v + a_{23} = 0 \end{cases}$$

avente come matrice completa quella costituita dalle prime due righe della matrice B associata alla conica.

La conica C ha per centro $M = (u, v)$ nel sistema di riferimento $(O; x, y)$ se e solo se, operando la traslazione

$$\{ Y = y - v$$

nel sistema di coordinate X e Y ha per centro l'origine. Si operi dunque la sostituzione $x = X + u, y = Y + v$ nell'equazione di C , che diventa:

$$a_{11}(X + u)^2 + 2a_{12}(X + u)(Y + v) + a_{22}(Y + v)^2 + \\ + 2a_{13}(X + u) + 2a_{23}(Y + v) + a_{33} = 0$$

ovvero, con un calcolo immediato e denotando con γ il termine costante, si ottiene l'equazione

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + \\ + 2(a_{11}u + a_{12}v + a_{13})X + 2(a_{12}u + a_{22}v + a_{23})Y + \gamma = 0$$

Dalla Proposizione 9.5.4, tale conica ha per centro l'origine se e solo se i coefficienti dei monomi X e Y sono entrambi nulli.

Esempio 9.5.7. Sia data la conica $\Gamma : 3x^2 + 4xy - y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$; vogliamo vedere se è a centro e, in tal caso, determinarlo. Consideriamo le matrici associate

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $|A| = -7$ e $|B| = -13$, Γ è non degenera ed è un'iperbole. Il suo centro si ottiene dal sistema i cui coefficienti sono le prime due righe di B :

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}.$$

La soluzione è $(x, y) = (-1/7, -9/7)$, che sono le coordinate del centro di Γ .

Per determinare gli assi di una conica a centro (e l'asse di una parabola) occorre un fatto preliminare di algebra lineare. Valgono le notazioni ricordate all'inizio del paragrafo, in particolare si considerino due basi ortonormali \mathcal{B} e \mathcal{B}' di \mathbb{R}^2 e il cambio di riferimento di \mathbb{E}^2 da (O, \mathcal{B}) a (O', \mathcal{B}') associato alla (9.5.2).

Lemma 9.5.8. *Sia $r \subset \mathbb{E}^2$ una retta di giacitura r_0 . Se $r_0 = \langle(\alpha, \beta)\rangle$ in $(O'; X, Y)$, allora la giacitura di r in $(O; x, y)$ è $r_0 = \langle(\gamma, \delta)\rangle$, dove*

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Si osservi anzitutto che si può riportare il problema in \mathbb{R}^2 in quanto la giacitura r_0 è un suo sottospazio vettoriale. Il generico vettore di r_0 sulla base \mathcal{B}' è quindi $(X, Y) = \lambda(\alpha, \beta)$. Poiché la matrice di cambio base è P e vale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

il generico vettore di r_0 sulla base \mathcal{B} è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

come volevamo.

Tenendo conto dell'Osservazione 9.5.1 si prova il seguente risultato.

Proposizione 9.5.9. *Sia C una conica non degenera e siano B ed A le matrici ad essa associate in un qualunque sistema di riferimento $(O; x, y)$.*

- i) Se C è una conica a centro (non circonferenza), allora i suoi assi sono le due rette passanti per il centro e aventi come giaciture i due autospazi della matrice A ;
- ii) se C è una parabola, allora il suo asse è la retta per il vertice e di giacitura l'autospazio della matrice A associato al suo autovalore nullo.

Con le notazioni iniziali, indichiamo con $(O'; X, Y)$ il riferimento in cui C ha forma canonica e matrici B' e A' , dove $B' = {}^tQBQ$, $A' = P^{-1}AP$ e le matrici P e Q sono come in (9.5.1) e (9.5.2).

i) Gli assi di C sono gli assi coordinati X e Y . Vogliamo determinare la loro giacitura in $(O; x, y)$. A tal fine, utilizziamo il Lemma 9.5.8, osservando che in $(O'; X, Y)$ le loro giaciture sono $\langle(1, 0)\rangle$ e $\langle(0, 1)\rangle$, quindi in $(O; x, y)$ sono, rispettivamente:

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}.$$

Tenendo conto della costruzione della matrice P , ricordiamo che le sue colonne sono una base ortonormale di autovettori e quindi ognuna di esse genera un autospazio di A .

ii) Del tutto analogo, tenendo con che l'asse di C è l'asse Y (come nella forma canonica $x^2 = qy$ nel Teorema di classificazione delle coniche nel piano euclideo reale) e quindi l'autovalore nullo è il secondo nella matrice A' .

Esempio 9.5.10. Sia Γ l'iperbole dell'Esempio 9.5.7. Abbiamo determinato il suo centro $M = (-1/7, -9/7)$. Per la Proposizione 9.5.9, gli assi di Γ sono le rette per M parallele agli autospazi di A . Per determinare tali autospazi, consideriamo la matrice della forma quadratica di Γ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che $p_A(T) = |A - TI| = T^2 - 2T - 7$ e dunque $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$ sono gli autovalori di A . Ne segue che gli autospazi, dati dalle formule

$$V_{\lambda_i} : (a_{11} - \lambda_i)x + a_{12}y = 0, \quad i = 1, 2$$

risultano essere

$$V_{\lambda_1} : (1 + \sqrt{2})x + y = 0, \quad V_{\lambda_2} : (1 - \sqrt{2})x + y = 0.$$

Pertanto gli assi hanno una equazione del tipo

$$a_1 : (1 + \sqrt{2})x + y + h_1 = 0; \quad a_2 : (1 - \sqrt{2})x + y + h_2 = 0.$$

Infine, imponendo il passaggio per M , si ottiene: $h_1 = (10 + \sqrt{2})/7$ e $h_2 = (10 - \sqrt{2})/7$.

Si noti che il Teorema 9.5.6 assieme alla Proposizione 9.5.9-(i), permettono di determinare assi e centro di una conica a centro; mentre dalla Proposizione 9.5.9-(ii) si può determinare l'asse di una parabola solo se è noto il vertice. Per calcolare quest'ultimo dovremo usare la nozione di retta tangente che verrà introdotta nel Paragrafo 4.6.

9.6 Coniche nel piano affine

In questo paragrafo, studieremo una generica conica C del piano affine reale $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. La sua equazione è sempre data da (9.1.4), ma qui la ripetiamo (con sua propria numerazione) in quanto l'ambiente geometrico non è più il piano euclideo. Sia dunque

$$C : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (9.6.1)$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Affrontiamo lo studio delle possibili intersezioni di una retta e una conica in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ (rispettivamente, in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$).

Consideriamo una retta del piano affine che, per comodità di calcolo, assumiamo non parallela all'asse y

$$r : y = mx + q.$$

I punti comuni a C ed r sono quelli le cui coordinate (x, y) soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \\ y = mx + q \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}x(mx + q) + a_{22}(mx + q)^2 + \\ \quad + 2a_{13}x + 2a_{23}(mx + q) + a_{33} = 0 \\ y = mx + q \end{cases} \quad (9.6.2)$$

La prima equazione di tale sistema è (in generale) di secondo grado nella sola variabile x , quindi ha al più due radici reali x_0, x_1 (distinte o no) che, sostituite nella seconda, forniscono le coordinate (x_0, y_0) e (x_1, y_1) (ove $y_i = mx_i + q$) dei punti di $C \cap r$.

Si osservi che, nel caso in cui la prima equazione abbia due soluzioni complesse (e coniugate in quanto i coefficienti sono reali) x_0, \bar{x}_0 , si può procedere egualmente con la sostituzione e si determinano due punti di coordinate complesse (x_0, y_0) e (\bar{x}_0, \bar{y}_0) , ove $y_0 = mx_0 + q$. Chiaramente, se r è parallela all'asse y , cioè di equazione $x = k$, si opera in modo del tutto analogo.

E' possibile che la prima equazione di (9.6.2) non sia di secondo grado: vedremo negli esempi seguenti che può essere di primo grado: in tal caso r e C si incontrano in un solo punto di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ (e anche di $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$).

Tuttavia la prima equazione di (9.6.2) può risultare anche di grado zero. Se è un'identità, e quindi $0 = 0$, significa che tutti i punti della retta soddisfano il sistema e dunque $r \subset C$; tale situazione si verifica solo se C è degenera ed r è una delle due rette che costituiscono C .

Infine si può verificare il caso in cui l'equazione (di grado zero) non ha soluzioni: questo accade se $r \cap C = \emptyset$ in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ (e anche in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$).

Abbiamo dunque provato la seguente:

Proposizione 9.6.1. Una conica non degenera e una retta (reali) hanno al più due punti di intersezione in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.

Esempio 9.6.2. Sia Γ la conica di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e sia r la retta $x = 1/2$. Allora $\Gamma \cap r$ è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 3/4 \\ x = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm \sqrt{3}/2 \\ x = 1/2 \end{cases}$$

cioè $\Gamma \cap r = \{(1/2, \sqrt{3}/2), (1/2, -\sqrt{3}/2)\}$.

Esempio 9.6.3. Siano date la conica e la retta

$$\Gamma : xy - 1 = 0 \quad \text{e} \quad r : x = 3$$

Chiaramente $\Gamma \cap r = \{P = (3, 1/3)\}$ sia in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ che in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.

Esempio 9.6.4. Siano

$$\Gamma : x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad r : x = 3.$$

Allora $\Gamma \cap r$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = -8 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 2i\sqrt{2} \\ x = 3 \end{cases}.$$

Quindi $\Gamma \cap r = \{(3, 2i\sqrt{2}), (3, -2i\sqrt{2})\}$ in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, mentre $\Gamma \cap r = \emptyset$ in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.

Osservazione 9.6.5. Dalla dimostrazione della Proposizione 9.6.1 segue comunque che non si può presentare il caso che una conica Γ e una retta r reali abbiano due punti in comune in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, di cui solo uno a coordinate reali; infatti se $(x_0, y_0) \in \Gamma \cap r$, allora anche $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \Gamma \cap r$.

Dalla Proposizione 9.6.1 e dall'Osservazione 9.6.5 segue immediatamente la descrizione della posizione reciproca di una retta e una conica che si incontrano in 2 punti.

Proposizione 9.6.6. Siano C ed r una conica e una retta reali aventi due punti in comune in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$; allora tali punti sono di uno e uno solo dei seguenti tipi:

- i) complessi e coniugati;
- ii) reali e distinti;
- iii) reali e coincidenti.

Definizione 9.6.7. Siano C ed r una conica e una retta reali come nella Proposizione precedente. In corrispondenza dei 3 casi, introduciamo le seguenti nozioni:

- i) diciamo che r è *esterna* a C ;
- ii) diciamo che r è *secante* C nei due punti reali e distinti;
- iii) diciamo che la retta r è *tangente* C nel punto di intersezione.

Esempio 9.6.8. La conica e la retta dell'Esempio 9.6.2 sono secanti nei punti $(1/2, \sqrt{3}/2)$ e $(1/2, -\sqrt{3}/2)$; quelle dell'Esempio 9.6.4 sono esterne. Infine, la conica $\Gamma : x^2 + y^2 = 1$ e la retta $r : x = 1$ sono tangenti nel punto $(1, 0)$. Infatti dal calcolo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

si vede che l'equazione di secondo grado in una variabile nel sistema (9.6.2) non si abbassa di grado, come nell'Esempio 9.6.3, ma ha una radice di molteplicità 2. Diciamo in tal caso che si ottiene il punto $(1, 0)$ "contato due volte" o che tale punto è intersezione *doppia* (o di *molteplicità 2*) della conica e della retta.

Definizione 9.6.9. Per denotare la *molteplicità di intersezione* di una conica non degenera C e di una retta r in un punto P_0 scriveremo

$$\begin{aligned} m_{P_0}(C, r) = 0 &\iff C \text{ e } r \text{ non si incontrano in } P_0 \\ m_{P_0}(C, r) = 1 &\iff r \text{ è secante } C \text{ in } P_0 \\ m_{P_0}(C, r) = 2 &\iff r \text{ è tangente a } C \text{ in } P_0. \end{aligned}$$

Proposizione 9.6.10. Sia C una conica non degenera passante per l'origine, dunque di equazione

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0.$$

Allora esiste ed è unica la retta tangente a C in $(0, 0)$ ed è data da:

$$T_O(C) : a_{13}x + a_{23}y = 0.$$

Consideriamo una generica retta per l'origine di giacitura $\langle(m, n)\rangle$, con $(m, n) \neq (0, 0)$, cioè di equazioni cartesiane e parametriche date rispettivamente da

$$r_{m,n} : \quad nx - my = 0 \quad , \quad \begin{cases} x = m\lambda \\ y = n\lambda \end{cases}.$$

Vogliamo provare che esiste un'unica (a meno di coefficiente di proporzionalità) coppia (m, n) tale che $r_{m,n}$ sia tangente a C in $(0, 0)$. Chiaramente l'intersezione $r_{m,n} \cap C$ è data dall'equazione

$$(a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2)\lambda^2 + 2(a_{13}m + a_{23}n)\lambda = 0$$

e $\lambda = 0$ è soluzione doppia se e solo se $a_{13}m + a_{23}n = 0$. Si osservi che non può essere $a_{13} = 0 = a_{23}$ altrimenti C avrebbe equazione $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ e quindi sarebbe degenera, in quanto il determinante della matrice associata risulta nullo. Dunque il polinomio $a_{13}x + a_{23}y$ non è identicamente nullo. Pertanto $r_{m,n}$ è tangente a C in $(0, 0)$ se e solo se

$$a_{13}m + a_{23}n = 0 \iff (m, n) = \rho(a_{23}, -a_{13}).$$

Tali coppie (m, n) , proporzionali tra loro, determinano dunque un'unica retta che è la retta tangente richiesta, avente equazione cartesiana data da $a_{13}x + a_{23}y = 0$.

Osservazione 9.6.11. Dalla proposizione precedente si ha immediatamente che, se C è una conica non degenera passante per l'origine, allora la retta $T_O(C)$ è definita dalla parte di primo grado dell'equazione di C .

Esempio 9.6.12. Sia C la conica di equazione

$$x^2 + 2xy - 7y^2 - x + 3y = 0.$$

Per la Proposizione 9.6.10, la retta tangente a C nell'origine è

$$T_O(C) : x - 3y = 0.$$

Il precedente risultato viene ora utilizzato per provare il caso generale.

Teorema 9.6.13. Se C è una conica non degenera di equazione (9.6.1) e $P_0 = (x_0, y_0) \in C$, allora esiste ed è unica la retta tangente a C in P_0 ed ha equazione

$$T_{P_0}(C) : (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0$$

Ci riconduciamo al caso della Proposizione 9.6.10 operando la traslazione che manda P_0 nell'origine:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}.$$

Nel sistema di riferimento $(O'; X, Y)$ la conica ha equazione:

$$a_{11}(X + x_0)^2 + 2a_{12}(X + x_0)(Y + y_0) + a_{22}(Y + y_0)^2 + 2a_{13}(X + x_0) + 2a_{23}(Y + y_0) + a_{33} = 0.$$

e dunque, per la Proposizione 9.6.10, la retta tangente a C in $O' = P_0$ è

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})X + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})Y = 0.$$

La tesi segue tenendo conto della traslazione precedente.

Osservazione 9.6.14. Ricordando le regole di derivazione, la retta tangente $T_{P_0}(C)$ a una conica non degenera C di equazione $f(x, y) = 0$ in un suo punto $P_0 = (x_0, y_0)$ è data da:

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)}(x - x_0) + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}(y - y_0) = 0. \quad (9.6.3)$$

Definizione 9.6.15. Si dice *vettore tangente* a C in P_0 , e si denota con $t_{P_0}(C)$, il vettore (parallelo alla retta $T_{P_0}(C)$)

$$t_{P_0}(C) := \left(-\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)}.$$

Chiaramente $t_P(C)$ è definito a meno di un fattore di proporzionalità.

Esempio 9.6.16. Si calcoli l'equazione della retta $T_{P_0}(C)$ tangente alla conica $C : x^2 - 2xy + 3y^2 - x - 1 = 0$ nel suo punto $P_0 = (2, 1)$. Per l'Osservazione 9.6.14 la retta richiesta è individuata da

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{P_0} = (2x - 2y - 1)_{P_0} = 1, \quad \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)_{P_0} = (-2x + 6y)_{P_0} = 2$$

dunque $T_{P_0}(C) : (x - 2) + 2(y - 1) = 0$, cioè $x + 2y - 4 = 0$.

Esempio 9.6.17. Determinare le rette tangenti alla conica $C : y - x^2 = 0$ passanti per punto $P_0 = (2, 3)$ (si noti che $P_0 \notin C$).

La generica retta per P_0 ha equazione $r : y - 3 = m(x - 2)$; basta imporre che r intersechi C in due punti reali e coincidenti:

$$r \cap C : \begin{cases} y = m(x - 2) + 3 \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = m(x - 2) + 3 \\ x^2 - mx + 2m - 3 = 0 \end{cases}.$$

Dobbiamo richiedere che il discriminante della seconda equazione sia nullo:

$$\Delta = m^2 - 8m + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 2, \quad m_2 = 6.$$

Pertanto le due rette tangenti richieste sono:

$$2x - y - 1 = 0, \quad 6x - y - 9 = 0.$$

Esempio 9.6.18. Si determinino le rette tangenti alla conica $C \subset \mathbb{E}^2$ (si osservi che in questo esercizio l'ambiente è il piano euclideo) di equazione $y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$ e ortogonali alla retta $r : x - 3y + 5 = 0$; si determinino inoltre i corrispondenti punti di tangenza. La generica retta ortogonale ad r ha un'equazione del tipo:

$$s_k : 3x + y + k = 0, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo per quali k la retta s_k è tangente a C :

$$s_k \cap C : \begin{cases} 3x + y + k = 0 \\ y^2 - 6x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-y - k}{3} \\ y^2 + 4y + 2k - 1 = 0 \end{cases}.$$

La seconda equazione ha due radici coincidenti se e solo se

$$\Delta/4 = 4 - (2k - 1) = 0 \iff k = 5/2.$$

Dunque esiste un'unica retta tangente a C e ortogonale ad r ed è

$$s : 6x + 2y + 5 = 0.$$

Inoltre il suo punto di tangenza $P := s \cap C$ si calcola sostituendo $k = 5/2$:

$$\begin{cases} x = \frac{-y - 5/2}{3} \\ y^2 + 4y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2y - 5}{6} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow P = (-1/6, -2).$$

Resta da studiare il caso della tangenza a una conica degenera: lo vedremo nel prossimo paragrafo.

9.7 Punti singolari di una conica

Esempio 9.7.1. Vogliamo determinare la retta tangente (se esiste) alla conica degenerata $C : (x + y)(x - y) = 0$ nel suo punto $(1, 1)$. Proviamo a utilizzare la formula (9.6.3). Poiché

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{(1,1)} = 2, \quad \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)_{(1,1)} = -2$$

si ottiene la retta

$$2(x - 1) - 2(y - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y = 0$$

che è proprio la retta, componente di C , cui appartiene il punto in questione. Si vede che, per ogni punto $P \neq O$ appartenente alla retta $x - y = 0$, la formula (9.6.3) fornisce la retta stessa; lo stesso accade per i punti della retta $x + y = 0$ diversi dall'origine. Se invece si applica tale formula nel punto $O = (0, 0)$ (che è il punto di intersezione delle due rette componenti di C), si vede che entrambe le derivate parziali si annullano; dunque bisogna procedere al calcolo in modo alternativo. Ad esempio, si consideri la generica retta per l'origine $(x, y) = \lambda(m, n)$ e si intersechi con C : si ottiene l'equazione

$$\lambda^2(m^2 - n^2) = 0.$$

Quindi quasi ogni retta per O interseca C con molteplicità due. Si noti che per $[m, n] = [1, \pm 1]$, le rette corrispondenti (cioè le componenti della conica) intersecano C con molteplicità di intersezione "infinita". Ciò accade (con un calcolo analogo) per ogni punto $P \neq O$ della conica: la molteplicità di intersezione tra C e la retta componente contenente P è "infinita".

Occorre quindi estendere la definizione di retta tangente in modo da includere le coniche degeneri.

Definizione 9.7.2. Diciamo che una retta r è tangente a una conica C in un suo punto P_0 se

$$m_{P_0}(C, r) \geq 2.$$

Si osservi che, se C è non degenera, allora in ogni suo punto esiste un'unica retta tangente (vedi Teorema 9.6.13), che abbiamo denotato con $T_{P_0}(C)$ e $m_{P_0}(C, T_{P_0}(C)) = 2$ (vedi Proposizione 9.6.1).

Definizione 9.7.3. Diremo che un punto $P = (x_0, y_0)$ di una conica C di equazione $f(x, y) = 0$ è *singolare* per C se

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} = (0, 0).$$

Altrimenti il punto $P \in C$ si dirà *semplice* o *non singolare*.

Proposizione 9.7.4. Sia $C \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ una conica degenera.

a) Se C è unione di due rette distinte passanti per un punto P_0 , allora:

- P_0 è il solo punto singolare di C ;
- ogni retta per P_0 è tangente a C in tale punto;
- se $P \neq P_0$, la retta tangente a C in P è la retta componente di C passante per P .

b) Se C è unione di due rette parallele e distinte allora C non ha punti singolari.

c) Se C è doppiamente degenera allora ogni punto di C è singolare e ogni retta per esso è tangente a C .

a) Possiamo assumere (a meno di rototraslazione) che P_0 sia l'origine $O = (0, 0)$ e che C abbia equazione

$$f(x, y) := x(ax + by) = 0$$

con $b \neq 0$, in quanto per ipotesi C è costituita da due rette distinte. -) Sia $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in C$; allora

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{(\bar{x}, \bar{y})} = 2a\bar{x} + b\bar{y}, \quad \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{(\bar{x}, \bar{y})} = b\bar{x}.$$

Il punto P è singolare se e solo se (\bar{x}, \bar{y}) è una una soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2ax + by = 0 \\ bx = 0 \end{cases}$$

quindi se e solo se $P = (0, 0)$. -) Se $r_{m,n} : (x, y) = \lambda(m, n)$ è una qualunque retta per l'origine,

$$r_{m,n} \cap C : \begin{cases} x = \lambda m \\ y = \lambda n \\ x(ax + by) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 m(am + bn) = 0.$$

Quindi, per ogni $[m, n] \neq [0, 1]$ e $[m, n] \neq [b, -a]$ si ha

$$m_O(C, r_{m,n}) = 2$$

e le $r_{0,1}$ e $r_{b,-a}$, che sono esattamente le due componenti di C , intersecano C in O infinite volte. Pertanto ogni retta per O è tangente a C in O . -) Per concludere, calcoliamo $T_P(C)$ dove $P \neq P_0$. Ora, invece, supponiamo che $P = (0, 0)$ e che C abbia equazione:

$$f(x, y) := x(ax + by + c) = 0$$

con $c \neq 0$, in quanto P è non singolare, per ipotesi. Una retta $r : (x, y) = \lambda(m, n)$ è tangente a C se e solo se $\lambda = 0$ è soluzione (almeno) doppia dell'equazione:

$$\lambda m(\lambda am + \lambda bn + c) = 0 \quad \Rightarrow \quad (am^2 + bmn)\lambda^2 + mc\lambda = 0$$

e ciò accade se e solo se $mc = 0$; tenendo conto che $c \neq 0$, deve essere $m = 0$ e quindi r è la retta $x = 0$, da cui la tesi.

b) Analoga all'ultima parte del caso (a).

c) Sia ora C l'unione di due rette coincidenti. Possiamo supporre che C abbia equazione

$$f(x, y) := x^2 = 0.$$

Poiché

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

le due derivate parziali sono entrambe nulle in tutti i punti della retta $x = 0$ e quindi in tutti i punti di C , che risultano dunque singolari. Infine si verifica facilmente che ogni retta che incontra C è tangente a C .

Valgono anche i viceversa della prima e della terza proprietà enunciate nella precedente proposizione.

Proposizione 9.7.5. Se C è una conica con un punto singolare allora è degenera. In particolare,

- a) se C ha un solo punto singolare P_0 , allora C è semplicemente degenera e precisamente è l'unione di due rette passanti per P_0 (eventualmente complesse e coniugate);
- b) se C ha due punti singolari, allora ogni suo punto è singolare e in tal caso C è doppiamente degenera.

Proviamo dapprima che, se C è una conica con (almeno) un punto singolare, allora C è degenera. Possiamo supporre (a meno di una traslazione) che C , avente equazione (9.6.1), sia singolare in $P_0 = (0, 0)$. Allora, per definizione, entrambe le derivate parziali si annullano in P_0 , cioè il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{13} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_{23} = 0 \end{cases} \quad (9.7.1)$$

ha per soluzione $(x_0, y_0) = (0, 0)$; pertanto $a_{13} = a_{23} = 0$. Sostituendo tali relazioni nell'equazione (9.6.1) di C e tenendo conto del fatto che $a_{33} = 0$, in quanto la conica passa per l'origine, si ha:

$$C : a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 = 0.$$

Chiaramente tale equazione rappresenta l'unione delle due rette

$$r : a_{11}y = \left(-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \right) x$$

$$s : a_{11}y = \left(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \right) x.$$

a) Se l'origine è il solo punto singolare di C , allora il sistema (9.7.1) ha come unica soluzione $(0, 0)$, dunque il determinante della matrice dei coefficienti $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ è non nullo. Pertanto le rette r ed s , determinate prima, sono distinte.

b) Se C ha due punti singolari, è degenera per quanto visto sopra, ma non può essere semplicemente degenera per la Proposizione 9.7.4-(a) – (b); pertanto deve essere doppiamente degenera e quindi ogni suo punto è singolare per la Proposizione 9.7.4-(c).

I risultati della Proposizione 9.7.4 e Proposizione 9.7.5 si possono riassumere immediatamente nel seguente:

Teorema 9.7.6. Sia $C \subset \mathbb{A}^2$ una conica. Valgono i seguenti fatti:

- a) se C è non degenera allora non ha punti singolari;
- b) C è unione di due rette incidenti se e solo se ha un solo punto singolare;
- c) C è doppiamente degenera se e solo se ha due (o, equivalentemente, infiniti) punti singolari.

Vedremo che nel piano proiettivo vale anche il viceversa dell'implicazione (a) e che il caso (b) comprenderà anche la configurazione di due rette parallele (e quindi descriverà tutte le coniche semplicemente degeneri).

Concludiamo questo paragrafo tornando nel piano euclideo per risolvere una questione posta alla fine del Paragrafo 4.5, cioè determinare asse e vertice di una parabola.

Precedentemente abbiamo osservato come è possibile determinare la direzione dell'asse di una parabola in forma generale (vedi Proposizione 9.5.9). Per determinare il vertice di una parabola è necessario tuttavia applicare la nozione di retta tangente, osservando preliminarmente che una parabola è una conica non degenera e quindi ammette un'unica retta tangente in ogni suo punto (vedi Teorema 9.7.6 e Teorema 9.6.13).

Lemma 9.7.7. *Si consideri una parabola $C \subset \mathbb{E}^2$ di vertice V . Allora V è l'unico punto di C in cui la retta tangente è ortogonale all'asse della parabola.*

Poiché si tratta di provare proprietà geometriche (euclidee), come al solito possiamo dimostrarle per una parabola in forma canonica. Sia dunque

$$C : f(x, y) := x^2 - 2py = 0.$$

È chiaro che il vertice di C è $V = (0, 0)$ e che $x = 0$ è l'asse. La retta tangente a C in un suo punto $P_0 = (x_0, y_0)$ è parallela al vettore

$$t_{P_0}(C) = \left(-\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{P_0} = (2p, 2x_0).$$

Si ha che $(2p, 2x_0)$ è ortogonale all'asse $x = 0$ se e solo se

$$\langle (2p, 2x_0), (0, 1) \rangle = 0 \iff x_0 = 0 \iff P_0 = (0, 0) = V.$$

Osservazione 9.7.8 *(Metodo per la determinazione dell'asse e del vertice di una parabola). Sia C una parabola e siano B ed A le matrici ad essa associate in un sistema di riferimento $(O; x, y)$. Ricordiamo che la matrice A ha un autovalore nullo e l'altro non nullo; sia questo α . Denotando i rispettivi autospazi con W_0 e W_α , essi sono ortogonali in quanto A è simmetrica reale. Abbiamo visto che l'asse di C ha per giacitura W_0 (per la Proposizione 9.5.9), dunque W_α è la giacitura della retta tangente a C nel vertice, per il Lemma 9.7.7.*

Procedura

- i) Si determinano gli autospazi W_0 e W_α ;*
- ii) sia r_h la generica retta di giacitura W_α con*

$$r_h : ax + by + h = 0.$$

Si impone che r_h sia tangente a C e si determina il valore h_0 per cui ciò accade.

- iii) Per il Lemma 9.7.7, la retta r_{h_0} è la tangente a C nel vertice. Dunque $V := C \cap r_{h_0}$ è il vertice di C .*

- iv) L'asse di C è dunque la retta $L = V + W_0$.*

Osservazione 9.7.9 *(Metodo alternativo). i') Come i).*

ii') Si calcola il vettore tangente $t_P(C)$ a C in un suo generico punto P .

iii') Si impone che $t_P(C)$ sia ortogonale a W_0 ; in tal modo si determina il punto in cui ciò accade: tale punto è il vertice.

iv') Infine si determina l'asse come prima.

Esempio 9.7.10. Vogliamo determinare l'asse e il vertice della parabola

$$C : 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0.$$

Poiché le matrici associate a C sono

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha: $\det(B) = -25 \neq 0$ e $\det(A) = 0$; quindi C è proprio una parabola.

Calcoliamo l'autospazio W_0 di A , cioè lo spazio delle soluzioni del sistema $AX = 0$; poiché tale sistema ha rango 1, in quanto $\det(A) = 0$, esso risulta equivalente ad una sola delle due equazioni, ad esempio: $2x + y = 0$. Pertanto $W_0 = \langle(1, -2)\rangle$. Consideriamo la generica retta ortogonale a $(1, -2)$ (e quindi parallela alla tangente nel vertice):

$$r_h : x - 2y + h = 0.$$

La retta r_h è tangente a C se e solo se i due punti che costituiscono $r_h \cap C$ coincidono se e solo se il sistema

$$r_h \cap C : \begin{cases} x = 2y - h \\ 4(2y - h)^2 + 4(2y - h)y + y^2 - 2(2y - h) + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

ha due soluzioni coincidenti. Si impone tale condizione alla seconda equazione (in y):

$$25y^2 - 20hy + 4h^2 + 2h - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta/4 = 25(1 - 2h).$$

Quindi $\Delta = 0$ se e solo se $h_0 = 1/2$; otteniamo dunque la retta tangente nel vertice:

$$r_{h_0} : x = 2y - 1/2.$$

Pertanto il vertice V è dato da

$$V = r_{h_0} \cap C : \begin{cases} x = 2y - 1/2 \\ 25y^2 - 10y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 1/2 \\ (5y - 1)^2 = 0 \end{cases}$$

e quindi il vertice è il punto $V = (-1/10, 1/5)$. Infine l'asse è la retta per V parallela all'autospazio $W_0 = \langle(1, -2)\rangle$:

$$2x + y = 0.$$

Esempio 9.7.11. Vogliamo determinare l'asse e il vertice della parabola nell'esempio precedente

$$C : 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

usando il secondo metodo proposto nell'Osservazione 9.7.8. Come prima, si determina $W_0 = \langle(1, -2)\rangle$. Si calcola poi il vettore tangente a C nel suo generico punto $P_0 = (x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} t_{P_0}(C) &= \left(-\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{P_0} = \\ &= (-4x - 2y - 4, 8x + 4y - 2)_{P_0} = \\ &= 2(-2x_0 - y_0 - 2, 4x_0 + 2y_0 - 1). \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione $t_{P_0}(C) \perp W_0$, cioè

$$\langle(-2x_0 - y_0 - 2, 4x_0 + 2y_0 - 1), (1, -2)\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_0 + y_0 = 0.$$

Inoltre P_0 deve appartenere a C , quindi essere soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 = 0 \\ 4x_0^2 + 4x_0y_0 + y_0^2 - 2x_0 + 4y_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y_0 = -2x_0 \\ -10x_0 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_0 = -1/10, \quad y_0 = 1/5.$$

L'asse si determina come nell'esempio precedente.

9.8 Classificazione delle coniche affini

Al fine di classificare le coniche del piano affine (reale o complesso), dobbiamo usare alcuni risultati analoghi a quelli visti per le coniche del piano euclideo. Qui denotiamo con \mathbb{A}^2 il piano affine \mathbb{A}_K^2 , dove $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

Ricordiamo brevemente il Teorema ??, Capitolo 1, dove viene descritta la variazione delle coordinate di un punto di \mathbb{A}^2 rispetto a 2 sistemi di riferimento (O, \mathcal{B}) e (O', \mathcal{B}') . Se $X = {}^t(x, y)$, $X' = {}^t(x', y')$, $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ e $C = {}^t(c_1, c_2)$ è la colonna delle coordinate di O rispetto a (O', \mathcal{B}') , allora si ha

$$X' = PX + C.$$

Si osservi che, in questo caso, P non è necessariamente una matrice ortogonale (come nel caso del piano euclideo \mathbb{E}^2) ma semplicemente invertibile. Denotiamo i suoi elementi con $P = (p_{ij})$. Utilizzando la notazione – introdotta in (2.1.4), Capitolo 1 – si ponga

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & c_1 \\ p_{21} & p_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Come ricordato, $P \in GL(2, K)$ e quindi $\tilde{Q} \in GL(3, K)$.

Con tali notazioni, vale l'analogo del Teorema 9.3.2, dove veniva descritto come varia l'equazione di una conica rispetto a 2 riferimenti cartesiani di \mathbb{E}^2 . Omettiamo la dimostrazione in quanto identica a quella del teorema citato.

Teorema 9.8.1. Siano $(O; x, y)$ e $(O'; x', y')$ due riferimenti affini di \mathbb{A}^2 e siano P e \tilde{Q} come sopra. Sia $C \subset \mathbb{A}^2$ una conica e siano B e A le matrici di C nel riferimento $(O; x, y)$. Poste

$$B' := {}^t\tilde{Q} B \tilde{Q} \quad e \quad A' := {}^tP A P$$

allora B' e A' sono matrici associate a C nel riferimento $(O'; x', y')$. In particolare A e A' sono congruenti e B e B' sono congruenti.

Corollario 9.8.2. Il rango della matrice completa B di una conica è un invariante affine. Se $K = \mathbb{R}$, anche il segno di $\det(A)$ è un'invariante affine.

Dimostrazione. Immediata conseguenza della Proposizione ??.

□

Possiamo dimostrare il risultato fondamentale di questa sezione.

Teorema 9.8.3 (Classificazione delle coniche nel piano affine reale). Ogni conica del piano affine reale $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ (costituita da almeno un punto) è affinemente equivalente a una delle seguenti:

$1_{\mathbb{R}}$	$x^2 = y$	parabola
$2_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 1$	parabola degenere
$3_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 1$	ellisse
$4_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 0$	ellisse degenere
$5_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 1$	iperbole
$6_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 0$	iperbole degenere
$7_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 0$	conica doppiamente degenere

Inoltre le precedenti coniche sono, a due a due, non affinemente equivalenti.

Utilizziamo il Teorema 9.4.6 di classificazione delle coniche in $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ e mostriamo che le famiglie ivi elencate sono equivalenti a una delle coniche di questo enunciato. Come al solito, denoteremo con B la matrice associata a una conica della lista del Teorema 9.4.6. Per ognuna di esse, individueremo una matrice $\tilde{Q} \in GL(3, \mathbb{R})$ tale che ${}^t\tilde{Q}B\tilde{Q}$ risulti la matrice associata a una conica nella lista $1_{\mathbb{R}}, \dots, 7_{\mathbb{R}}$.

(P) Vediamo in dettaglio la prima famiglia parabolica cioè

$$x^2 = qy, \quad q \neq 0$$

la cui matrice associata è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q/2 \\ 0 & -q/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$${}^t\tilde{Q}B\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

che è associata alla conica $x^2 = y$.

Per le prossime famiglie, citiamo solo la matrice \tilde{Q} . La seconda famiglia parabolica è $x^2 = q^2$; qui occorre considerare la matrice

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con un semplice calcolo si vede che ${}^t\tilde{Q}B\tilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 = 1$.

(E) La prima famiglia ellittica è $x^2 + p^2y^2 = q^2$. Usando la matrice

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q/p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

si vede che ${}^t\tilde{Q}B\tilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 + y^2 = 1$. La seconda famiglia ellittica è $x^2 + p^2y^2 = 0$. Usando la matrice

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

si vede che ${}^t\tilde{Q}B\tilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 + y^2 = 0$.

(I) Le matrici \tilde{Q} necessarie sono le stesse del caso (E) e trasformano le coniche delle famiglie $x^2 - p^2y^2 = q^2$ e $x^2 - p^2y^2 = 0$, rispettivamente, nelle coniche $5_{\mathbb{R}}$ e $6_{\mathbb{R}}$.

(D) La conica doppiamente degenera è esattamente $7_{\mathbb{R}}$.

Per provare che le coniche dell'enunciato sono a due a due non affinementemente equivalenti, consideriamo la seguente tabella

		$\text{rg}(B)$	$\det(A)$
$1_{\mathbb{R}}$	$x^2 = y$	3	0
$2_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 1$	2	0
$3_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 1$	3	+
$4_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 0$	2	+
$5_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 1$	3	-
$6_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 0$	2	-
$7_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 0$	1	0

Per il Corollario 9.8.2 si ha la tesi.

Vediamo l'analogo risultato nel caso complesso.

Teorema 9.8.4 (Classificazione delle coniche nel piano affine complesso). Ogni conica del piano $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ è affinementemente equivalente a una delle seguenti:

$I_{\mathbb{C}}$	$x^2 = y$	parabola
$II_{\mathbb{C}}$	$x^2 = 1$	parabola degenera
$III_{\mathbb{C}}$	$x^2 + y^2 = 1$	conica a centro
$IV_{\mathbb{C}}$	$x^2 + y^2 = 0$	conica a centro degenera
$V_{\mathbb{C}}$	$x^2 = 0$	conica doppiamente degenera

Inoltre le precedenti coniche sono, a due a due, non affinementemente equivalenti.

Basta mostrare che le seguenti coniche sono affinementemente equivalenti a una di questo enunciato:

(a) quelle elencate nel Teorema 9.8.3: $1_{\mathbb{R}}, \dots, 7_{\mathbb{R}}$;

(b) quelle considerate nell'Osservazione 9.4.7, cioè le famiglie

$$x^2 = \gamma, \quad \gamma < 0 \quad e \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

(a) Chiaramente basta esaminare le coniche $5_{\mathbb{R}}$ e $6_{\mathbb{R}}$. La prima ha equazione $x^2 - y^2 = 1$ e sia B la matrice associata. Basta scegliere come matrice $\tilde{Q} \in GL(3, \mathbb{C})$ la seguente

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In tal modo, ${}^t\tilde{Q}B\tilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 + y^2 = 1$. Del tutto analogo il caso della conica $6_{\mathbb{R}}$.

(b) La famiglia $x^2 = \gamma$, $\gamma < 0$ va trattata come la seconda famiglia (P) nella dimostrazione del Teorema 9.8.3: basta scegliere la matrice

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{C})$$

e si prova che è affinemente equivalente alla conica $II_{\mathbb{C}}$.

Infine l'ellisse immaginaria è affinemente equivalente alla conica $III_{\mathbb{C}}$ attraverso la matrice

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} ia & 0 & 0 \\ 0 & ib & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{C}).$$

L'ultima affermazione si prova come nel Teorema 9.8.3: qui è sufficiente esaminare il rango di B e la nullità di $\det(A)$.

Dallo studio precedente, si ha il seguente risultato che caratterizza le coniche affini degeneri e non degeneri e che è analogo a quello visto per le coniche euclidee (Teorema 9.4.2).

Corollario 9.8.5. Sia $C \subset \mathbb{A}_K^2$ con $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Allora $-C$ è non degenera se e solo se $\text{rg}(B) = 3$; $-C$ è semplicemente degenera se e solo se $\text{rg}(B) = 2$; $-C$ è doppiamente degenera se e solo se $\text{rg}(B) = 1$.

Per il Corollario 9.8.2, il rango di B è un invariante affine. Quindi basta provare la tesi per le coniche dell'enunciato del Teorema 9.8.3 (nel caso reale) o del Teorema 9.8.4 (nel caso complesso). La tesi segue immediatamente dal calcolo dei ranghi nella parte finale delle rispettive dimostrazioni dei due teoremi citati.

In analogia a quanto visto nel Capitolo 3 sulla chiusura proiettiva di un sottospazio affine di \mathbb{A}^n , introduciamo l'analogia nozione per le coniche del piano affine.

Definizione 9.8.6. Si consideri un polinomio in due variabili a coefficienti in un campo K e di grado d :

$$f(x, y) \in K[x, y].$$

Diciamo *polinomio omogeneizzato di f rispetto a x_0* , e lo denotiamo con $F = {}^h f$, quello definito da

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right).$$

Esempio 9.8.7. Se $f(x, y) = x^2 + y - 1$ e $F = {}^h f$, allora

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 \left(\frac{x_1^2}{x_0^2} + \frac{x_2}{x_0} - 1 \right) = x_1^2 + x_0 x_2 - x_0^2.$$

Ricordiamo l'immersione del piano affine nel piano proiettivo (vedi Paragrafo 3.5)

$$j_0 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

definita da

$$(x, y) \mapsto [1, x, y] = [x_0, x_1, x_2], \quad \text{dove } x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}.$$

È chiaro dunque che, se $C \subset \mathbb{A}^2$ è una conica di equazione $f(x, y) = 0$, allora

$$j_0(C) = \left\{ [x_0, x_1, x_2] \mid {}^h f(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = 0, x_0 \neq 0 \right\}.$$

Se togliamo la limitazione $x_0 \neq 0$, otteniamo il seguente sottoinsieme di \mathbb{P}^2 .

Definizione 9.8.8. Se $C \subset \mathbb{A}^2$ è una conica di equazione $f(x, y) = 0$, diciamo *chiusura proiettiva di C* , e la indichiamo con \overline{C} , il sottoinsieme di \mathbb{P}^2 definito da

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = 0.$$

Inoltre, diciamo *punti impropri di C* i punti del piano proiettivo dati da $\overline{C} \cap \{x_0 = 0\}$, cioè quelli le cui coordinate omogenee soddisfano il sistema

$$\begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

Come vedremo nel prossimo risultato, i punti impropri di una conica affine sono utili per classificarla facilmente. Prima di procedere, cambiamo la notazione (vedi (9.6.1)) usata fino ad ora per la generica conica affine.

Definizione 9.8.9. La generica conica di \mathbb{A}_K^2 è data da

$$f(x, y) = a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{01} x + 2 a_{02} y + a_{00} = 0 \quad (9.8.1)$$

dove $a_{ij} \in K$, e dunque la sua *matrice completa* e la sua *matrice della forma quadratica* risultano, rispettivamente,

$$B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Teorema 9.8.10 (Classificazione delle coniche affini via i punti impropri). Sia $C \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ una conica non degenera. Allora

- C è una parabola \iff ha 2 punti impropri reali e coincidenti;
- C è un'ellisse \iff ha 2 punti impropri complessi e coniugati;
- C è una iperbole \iff ha 2 punti impropri reali e distinti.

Per definizione, i punti impropri di C sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2 a_{01} x_0 x_1 + 2 a_{02} x_0 x_2 + a_{00} x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

o, equivalentemente, del sistema

$$\begin{cases} a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

Poichè la prima equazione ha come discriminante $-\det(A)$, si conclude con il Teorema 9.4.2.

Concludiamo con una nota nozione sulle iperboli nel piano euclideo.

Definizione 9.8.11. Sia $C \subset \mathbb{E}^2$ un'iperbole. Si dicono *asintoti* di C le due rette (reali e distinte) passanti per il centro di C e per i suoi punti impropri.

Osservazione 9.8.12. Se l'iperbole C è data in forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{cioè in coordinate omogenee} \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = x_0^2$$

i suoi punti impropri sono $P_\infty = [0, a, b]$ e $Q_\infty = [0, a, -b]$ e il centro è l'origine ovvero $[1, 0, 0]$. Pertanto gli asintoti sono

$$r_{P_\infty} : bx_1 - ax_2 = 0, \quad r_{Q_\infty} : bx_1 + ax_2 = 0.$$

Esercizio C2. Gli asintoti sono le rette tangenti all'iperbole nei suoi punti impropri (estendendo in modo naturale la Definizione 4.6.1 di retta tangente a una conica in un suo punto al piano proiettivo...).

9.9 Coniche proiettive

Quanto visto alla fine del precedente paragrafo induce a introdurre la seguente nozione.

Definizione 9.9.1. Si dice *conica* del piano proiettivo \mathbb{P}_K^2 il luogo C dei punti le cui coordinate omogenee soddisfano un'equazione di secondo grado omogenea del tipo

$$C : a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2 a_{01} x_0 x_1 + 2 a_{02} x_0 x_2 + a_{00} x_0^2 = 0$$

dove $a_{ij} \in K$ o, sinteticamente,

$$C : \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x_i x_j = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j.$$

Si dice *matrice associata* a C

$$B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e quindi si dice *equazione matriciale* di C quella espressa come

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) B \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

In analogia con quanto visto per le coniche affini, si prova in modo del tutto simile il seguente risultato.

Teorema 9.9.2. Siano $[x_0, x_1, x_2]$ e $[x'_0, x'_1, x'_2]$ due sistemi di coordinate omogenee di \mathbb{P}_K^2 e sia $\alpha : \mathbb{P}_K^2 \rightarrow \mathbb{P}_K^2$ il cambio di coordinate omogenee associato a una matrice $Q \in GL(3, K)$ dove

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Sia $C \subset \mathbb{P}_K^2$ una conica di matrice B rispetto alle coordinate $[x_0, x_1, x_2]$ e matrice B' rispetto alle coordinate $[x'_0, x'_1, x'_2]$. Allora

$$B' = {}^t Q B Q.$$

Definizione 9.9.3. Due coniche C e C' di \mathbb{P}_K^2 si dicono *proiettivamente equivalenti* se esiste una proiettività $\alpha : \mathbb{P}_K^2 \rightarrow \mathbb{P}_K^2$ tale che $\alpha(C) = C'$.

Corollario 9.9.4. Le matrici associate a due coniche proiettivamente equivalenti sono congruenti.

Ricordando che matrici congruenti hanno lo stesso rango (vedi Proposizione ??), si ottiene immediatamente il seguente fatto.

Corollario 9.9.5. *Il rango di una matrice associata a una conica è un invariante proiettivo.*

Per questo, se C è una conica proiettiva di matrice B , denoteremo il rango di B anche con $\text{rg}(C)$.

Definizione 9.9.6. Una conica $C \subset \mathbb{P}_K^2$ si dice *semplicemente degenera* se è unione di due rette distinte e *doppiamente degenera* se è unione di due rette coincidenti. Altrimenti, diremo che C è *non degenera*.

Il seguente risultato, che caratterizza le coniche proiettive degeneri e non degeneri, è analogo a quello visto per le coniche euclidee (Teorema 9.4.2) e a quello relativo alle coniche affini (Corollario 9.8.5).

Partiamo da un semplice fatto.

Osservazione 9.9.7. La matrice completa B di una conica $C \subset \mathbb{A}_K^2$, con la notazione introdotta in (9.8.1), è esattamente la stessa della sua chiusura proiettiva $\overline{C} \subset \mathbb{P}_K^2$.

Teorema 9.9.8. *Sia $C \subset \mathbb{P}_K^2$ una conica di matrice associata B . Allora:*

1. $\text{rg}(B) = 3 \iff C$ è non degenera;
2. $\text{rg}(B) = 2 \iff C$ è semplicemente degenera;
3. $\text{rg}(B) = 1 \iff C$ è doppiamente degenera.

Ci sono due possibilità: o C è la chiusura proiettiva di una conica affine o C è degenera e una sua componente è la retta impropria. Nel primo caso, per l'Osservazione precedente, si conclude con il Corollario 9.8.5 che stabilisce l'analogo risultato per le coniche affini. Nel secondo caso, la conica $C \subset \mathbb{P}_K^2$ deve essere di uno dei seguenti tipi:

$$x_0(ax_0 + bx_1 + cx_2) = 0 \quad \text{o} \quad x_0^2 = 0.$$

Con un calcolo immediato, si vede che nel primo caso $\text{rg}(B) = 2$ e nel secondo $\text{rg}(B) = 1$.

Ricordiamo il seguente importante risultato di Algebra lineare.

Teorema 9.9.9 (Teorema di Sylvester). *Sia K il campo complesso o quello reale e si consideri una forma bilineare simmetrica*

$$\beta : K^n \times K^n \longrightarrow K.$$

Allora esiste una base C di K^n tale che la matrice $M_{C,C}(\beta)$ è diagonale. Equivalentemente, ogni matrice simmetrica è congruente a una diagonale.

Vediamo le conseguenze nei casi complesso e reale, rispettivamente.

Teorema 9.9.10 (Trasformazione ad assi principali su \mathbb{C}). Si consideri una forma bilineare simmetrica

$$\beta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Allora esiste una base \mathcal{B} di \mathbb{C}^n tale che la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\beta)$ è

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(dove gli zeri rappresentano matrici nulle di ordini opportuni). Equivalentemente, per ogni matrice simmetrica $B \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ esiste una matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tale che

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per il Teorema 9.9.9, sia $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di \mathbb{C}^n tale che $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\beta)$ è diagonale. A meno di riordinare i vettori di \mathcal{C} , possiamo supporre

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_i \neq 0$ per $i = 1, \dots, r$. Si considerino ora gli scalari (che esistono in \mathbb{C})

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r \quad \text{tali che} \quad \alpha_i^2 = \lambda_i, \quad \forall i = 1, \dots, r$$

e i vettori

$$w_1 := \frac{v_1}{\alpha_1}, \dots, w_r := \frac{v_r}{\alpha_r}, w_{r+1} := v_{r+1}, \dots, w_n := v_n.$$

E' immediato calcolare, per $i = 1, \dots, r$:

$$\beta(w_i, w_i) = \beta\left(\frac{v_i}{\alpha_i}, \frac{v_i}{\alpha_i}\right) = \frac{\beta(v_i, v_i)}{\alpha_i^2} = 1.$$

Mentre, per $i = r + 1, \dots, n$ si ha

$$\beta(w_i, w_i) = \beta(v_i, v_i) = 0.$$

Dunque, posta $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$, si ha che $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\beta)$ è come richiesta nell'enunciato.

Teorema 9.9.11 (*Trasformazione ad assi principali su \mathbb{R}*). Si consideri una forma bilineare simmetrica

$$\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Allora esiste una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^n tale che la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\beta)$ è

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(dove gli zeri rappresentano matrici nulle di ordini opportuni). Equivalentemente, per ogni matrice simmetrica $B \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ esiste una matrice $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente alla precedente, ma in questo caso si riordinano gli elementi della diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}, 0$, in modo che

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, p; \quad \lambda_i < 0, \quad i = p+1, \dots, p+q.$$

Infine, si scelgono gli α_i in modo che $\alpha_i^2 = \lambda_i$, per $i = 1, \dots, p$, e $\alpha_i^2 = -\lambda_i$, per $i = p+1, \dots, p+q$.

Definizione 9.9.12. Se $B \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica congruente alla matrice

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diciamo che la coppia di interi (p, q) è la *segnatura* di B .

Definizione 9.9.13. Diciamo *segnatura di una conica* $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la segnatura (p, q) di una sua matrice associata B , supponendo $p \geq q$ (non è restrittivo, in quanto anche $-B$ è associata alla stessa conica).

Osservazione 9.9.14. Per il Teorema 9.9.11, la segnatura (p, q) di una conica $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ è un invariante proiettivo (con $p \geq q$). Inoltre $p + q = \text{rg}(C)$.

Osservazione 9.9.15. Si noti che un cambio di nome delle coordinate omogenee nell'equazione di una conica C corrisponde ad applicare un cambio Q di riferimento proiettivo, e

quindi non si influenza né il rango né la segnatura di C . Ad esempio, lo scambio $x_0 \leftrightarrow x_2$ corrisponde alla matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}).$$

Osservazione 9.9.16. Il Corollario 9.9.5 e i Teoremi 9.9.10 (nel caso complesso) e 9.9.11 (nel caso reale) di *Trasformazione ad assi principali* forniscono immediatamente la lista delle possibili equazioni delle coniche del piano proiettivo e quindi la classificazione delle coniche proiettive.

Tuttavia, nelle dimostrazioni dei prossimi teoremi, si costruiscono esplicitamente i cambi di coordinate proiettive che “unificano” alcuni tipi di coniche affini. Le dimostrazioni risultano in tal modo costruttive (anche se ridondanti). Inoltre si verifica, nel caso reale, che due coniche sono proiettivamente equivalenti *se e solo se* hanno la stessa segnatura.

Teorema 9.9.17 (*Classificazione delle coniche proiettive reali*). Ogni conica di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:

$$(I)_{\mathbb{R}} \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$$(II)_{\mathbb{R}} \quad x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$(III)_{\mathbb{R}} \quad x_0^2 + x_1^2 = 0$$

$$(IV)_{\mathbb{R}} \quad x_0^2 - x_1^2 = 0$$

$$(V)_{\mathbb{R}} \quad x_0^2 = 0.$$

Utilizziamo la tabella compilata alla fine della dimostrazione del Teorema 9.8.3 sulla classificazione delle coniche di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, riscrivendo (i polinomi che definiscono) le coniche in coordinate omogenee e aggiungendo due coniche degeneri (che denotiamo con S e D , semplicemente e doppiamente) aventi la retta impropria come componente. Inoltre aggiungiamo l'ellisse immaginaria (che denotiamo con E) che si era omessa nella classificazione affine in quanto priva di punti reali. Invece della colonna che riportava il determinante di A , consideriamo la colonna della segnatura (p, q) , avendo osservato

che $p + q = \text{rg}(C)$ e $p \geq q$.

		$\text{rg}(C)$	(p, q)
$1_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_0x_2$	3	(2, 1)
$2_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_0^2$	2	(1, 1)
$3_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2$	3	(2, 1)
$4_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 + x_2^2$	2	(2, 0)
$5_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_2^2 - x_0^2$	3	(2, 1)
$6_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_2^2$	2	(1, 1)
$7_{\mathbb{R}}$	x_1^2	1	(1)
E	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2$	3	(3, 0)
D	x_0^2	1	(1)
S	x_0x_1	2	(1, 1)

Proviamo ora che le seguenti coniche sono proiettivamente equivalenti:

-) $1_{\mathbb{R}} \sim 3_{\mathbb{R}} \sim 5_{\mathbb{R}} \sim (II)_{\mathbb{R}}$ Cambiando segno e nome alle variabili ($x_0 \leftrightarrow x_1$), $5_{\mathbb{R}}$ diventa $3_{\mathbb{R}}$. A sua volta, quest'ultima è congruente a $(II)_{\mathbb{R}}$, cambiando nome alle variabili. Infine, il cambio di coordinate Q applicato alla conica $1_{\mathbb{R}}$, dove

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene la matrice

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

associata alla conica $(II)_{\mathbb{R}}$.

-) $2_{\mathbb{R}} \sim 6_{\mathbb{R}} \sim S \sim (IV)_{\mathbb{R}}$: analogo.

-) $7_{\mathbb{R}} \sim D \sim (V)_{\mathbb{R}}$: immediato.

-) Infine si osservi che E è la conica $(I)_{\mathbb{R}}$ e che $4_{\mathbb{R}} \sim (III)_{\mathbb{R}}$ con un semplice cambio di variabili.

Teorema 9.9.18 (Classificazione delle coniche proiettive complesse). Ogni conica di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:

$$(ND)_{\mathbb{C}} \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$$(SD)_{\mathbb{C}} \quad x_0^2 + x_1^2 = 0$$

$$(DD)_{\mathbb{C}} \quad x_0^2 = 0$$

dove le precedenti sigle significano, rispettivamente, non degenerare, semplicemente degenerare, doppiamente degenerare.

Per il Teorema 9.9.17, è sufficiente mostrare che:

-) $(I)_{\mathbb{R}} \sim (II)_{\mathbb{R}}$ attraverso una matrice $Q \in GL(3, \mathbb{C})$;

-) $(III)_{\mathbb{R}} \sim (IV)_{\mathbb{R}}$ attraverso una matrice $Q' \in GL(3, \mathbb{C})$. Immediatamente si verifica che

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad e \quad Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soddisfano i precedenti requisiti.

Concludiamo questo paragrafo sulle coniche nel piano proiettivo studiando le intersezioni di una conica e una retta in \mathbb{P}_K^2 , quando $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, completando e generalizzando i risultati riguardo alle coniche affini (vedi Proposizione 9.6.1, Proposizione 9.6.6 e Definizione 9.6.7).

Proposizione 9.9.19. Una conica non degenerare e una retta hanno esattamente due punti di intersezione in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, eventualmente coincidenti.

Siano C la generica conica e r la generica retta di \mathbb{P}^2 di equazioni

$$C : \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}x_i x_j = 0, \quad r : b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0.$$

Non è restrittivo supporre $b_0 \neq 0$; posti $c_1 := -b_1/b_0$ e $c_2 := -b_2/b_0$, si ha $r : x_0 = c_1x_1 + c_2x_2$. Quindi

$$C \cap r : \begin{cases} \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}x_i x_j = 0 \\ x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 \end{cases}$$

e sostituendo si ottiene, con opportuno cambio di nomi dei coefficienti,

$$C \cap r : \begin{cases} \alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 = 0 \\ x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 \end{cases}$$

Se la prima equazione è di secondo grado, avendo i coefficienti complessi ed essendo omogenea, ammette 2 radici in \mathbb{C}^2 (e tutte quelle proporzionali), che denotiamo con (y_1, y_2) e (z_1, z_2) . Tali soluzioni possono essere coincidenti. Sostituendole, rispettivamente, nella seconda equazione, otteniamo i due punti di intersezione di C e r :

$$[c_1y_1 + c_2y_2, y_1, y_2], \quad [c_1z_1 + c_2z_2, z_1, z_2].$$

Altrimenti l'equazione suddetta diventa l'identità $0 = 0$ e quindi sono soluzioni del sistema tutti i punti tali che $x_0 = c_1x_1 + c_2x_2$. In altre parole, $C \cap r = r$, quindi C sarebbe degenerare, contro l'ipotesi.

Definizione 9.9.20. In $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ siano C una conica non degenera, r una retta e $C \cap r = \{P, Q\}$. Se $P \neq Q$, diciamo che C e r sono *secanti in P e Q* e che la *molteplicità di intersezione* di C e r in P (rispettivamente, in Q) è 1; scriveremo $m_P(C, r) = 1$ (rispettivamente, $m_Q(C, r) = 1$). Invece, se $P = Q$, diciamo che C e r sono *tangenti in P* e scriveremo $m_P(C, r) = 2$ o anche $C \cap r = \{P^2\}$.

Osservazione 9.9.21. Si può provare che, se $P \in C$ sono una conica non degenera e un suo punto del piano affine \mathbb{A}^2 e $t = T_P(C)$ è la retta tangente a C in P , allora (attraverso l'immersione $j_0 : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$) la chiusura proiettiva \bar{t} è la retta tangente a \bar{C} in P , nel senso della definizione precedente.

Esempio 9.9.22. Nel piano euclideo complesso una parabola e il suo asse si incontrano in un solo punto (il vertice). Nel piano proiettivo, hanno invece due punti in comune, secondo quanto visto nella precedente Proposizione. Vediamo un caso numerico. Siano $C : y = x^2$ e $r : x = 0$. La loro intersezione in \mathbb{P}^2 è data da

$$C \cap r : \begin{cases} x_1^2 - x_0x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_0x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} [0, 0, 1] = r_\infty \\ [1, 0, 0] = V \end{matrix}.$$

Il primo dei due è un punto improprio (non rilevabile in \mathbb{E}^2), e precisamente è il punto improprio dell'asse r .

9.10 Dualità e sistemi lineari

Nel Capitolo 3 abbiamo introdotto l'equazione cartesiana di un iperpiano $H : a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$ nello spazio proiettivo \mathbb{P}_K^n . Chiaramente questa non è unica: più precisamente, i suoi coefficienti sono determinati a meno di una costante moltiplicativa non nulla. Dunque un iperpiano non individua una $(n+1)$ -upla di K^{n+1} bensì infinite $(n+1)$ -uple proporzionali, cioè un punto di \mathbb{P}_K^n .

Ad esempio, se r è una retta di \mathbb{P}^2 di equazione cartesiana

$$r : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

essa individua univocamente il punto di \mathbb{P}^2 dato da $[a_0, a_1, a_2]$.

È chiaro, inoltre, che le coordinate omogenee del punto $[a_0, a_1, a_2]$ dipendono dall'equazione di r e dunque dal riferimento proiettivo che si è fissato nel piano contenente r .

Per evitare confusione, useremo una notazione e una denominazione diversa per lo spazio proiettivo di dimensione 2 a cui appartiene $[a_0, a_1, a_2]$.

Definizione 9.10.1. Il piano proiettivo i cui punti rappresentano, come sopra, tutte le rette di \mathbb{P}_K^2 si dice *piano proiettivo duale* e si denota con $(\mathbb{P}_K^2)^*$ (equivalentemente, si può definire come $\mathbb{P}((K^3)^*)$).

Esplicitamente: se \mathbb{P}_K^2 è dotato di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, a una retta r di \mathbb{P}_K^2 corrisponde il punto r^* di $(\mathbb{P}_K^2)^*$ secondo la seguente corrispondenza biunivoca

$$\delta : \{ \text{rette di } \mathbb{P}_K^2 \} \longleftrightarrow (\mathbb{P}_K^2)^*$$

definita da

$$r : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \longleftrightarrow r^* = [a_0, a_1, a_2].$$

Scambiando i ruoli di \mathbb{P}_K^2 e $(\mathbb{P}_K^2)^*$ (o, equivalentemente, di punti e rette), è naturale definire un'altra corrispondenza, anch'essa biunivoca,

$$\delta^* : \mathbb{P}_K^2 \longleftrightarrow \{ \text{rette di } (\mathbb{P}_K^2)^* \}$$

definita da (rispetto alle coordinate omogenee $[z_0, z_1, z_2]$ di $(\mathbb{P}_K^2)^*$)

$$P = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \longleftrightarrow P^* : \alpha_0z_0 + \alpha_1z_1 + \alpha_2z_2 = 0$$

Definizione 9.10.2. Le due corrispondenze δ e δ^* sopra definite costituiscono la *relazione di dualità* fra \mathbb{P}_K^2 e $(\mathbb{P}_K^2)^*$.

Esempio 9.10.3. Il punto che rappresenta la retta $r : 2x_0 - x_1 + 5x_2 = 0$ è $r^* = [2, -1, 5] \in (\mathbb{P}^2)^*$. La retta che rappresenta il punto $P = [3, 0, 1]$ è la retta di $(\mathbb{P}^2)^*$ di equazione $P^* : 3z_0 + z_2 = 0$.

Nella relazione di dualità si mantengono la relazione di appartenenza e quella di inclusione, ma i "soggetti" vengono scambiati. Lasciamo per esercizio la dimostrazione delle semplici proprietà elencate qui di seguito.

Proposizione 9.10.4. Se P è un punto e r una retta di \mathbb{P}_K^2 allora

$$P \in r \iff r^* \in P^*.$$

Se A e B sono due punti distinti e r è una retta di \mathbb{P}_K^2 allora

$$A, B \in r \iff r^* = A^* \cap B^*.$$

Se P è un punto e r e s sono due rette distinte di \mathbb{P}_K^2 allora

$$P = r \cap s \iff r^*, s^* \in P^*.$$

Dalla prima proprietà segue immediatamente che le rette di un fascio di rette di centro P sono rappresentate da tutti e soli i punti della retta P^* di $(\mathbb{P}^2)^*$.

Osservazione 9.10.5. Dalla terza proprietà segue che le rette del fascio \mathcal{F}_P , generato da r e s , corrispondono ai punti della retta P^* di $(\mathbb{P}^2)^*$ passante per i punti r^* e s^* . Esplicitamente: si consideri il fascio di rette di centro P in \mathbb{P}^2

$$\mathcal{F}_P : \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) = 0.$$

Allora tutte e sole le rette di \mathcal{F}_P sono rappresentate dai punti di $(\mathbb{P}^2)^*$ appartenenti alla retta P^* passante per i punti $[a_0, a_1, a_2]$ e $[b_0, b_1, b_2]$. Più precisamente, se $r_{\lambda, \mu} \in \mathcal{F}_P$ il punto corrispondente nel piano duale è $\lambda[a_0, a_1, a_2] + \mu[b_0, b_1, b_2]$.

Esempio 9.10.6. Vogliamo rappresentare in $(\mathbb{P}^2)^*$ le rette del fascio di centro $P = [1, 2, 3]$, sia in forma cartesiana che in forma parametrica. Come visto, l'insieme richiesto è una retta del piano duale. Per ottenere la sua equazione cartesiana basta osservare che tale retta è

$$P^* : z_0 + 2z_1 + 3z_2 = 0.$$

D'altro canto, due rette passanti per P sono, ad esempio $x_1 - 2x_0 = 0$ e $x_2 - 3x_0 = 0$. Prendendo tali rette come generatori del fascio, abbiamo

$$\mathcal{F}_P : \lambda(x_1 - 2x_0) + \mu(x_2 - 3x_0) = 0.$$

Quindi P^* è la retta passante per $[-2, 1, 0]$ e $[-3, 0, 1]$, cioè

$$P^* : [z_0, z_1, z_2] = \lambda[-2, 1, 0] + \mu[-3, 0, 1]$$

e questa è l'equazione parametrica richiesta.

Infine osserviamo che le rette di \mathcal{F}_P si ottengono da tutte le rette di \mathbb{P}^2 imponendo la condizione lineare di passaggio per P . Nell'esempio precedente $P = [1, 2, 3]$ e si impone alla generica retta del piano

$$r : z_0x_0 + z_1x_1 + z_2x_2 = 0$$

la condizione lineare

$$z_0 + 2z_1 + 3z_2 = 0,$$

che, come visto, è l'equazione cartesiana di P^* . Quindi i parametri omogenei $[z_0, z_1, z_2]$ devono soddisfare un'equazione lineare omogenea. Risolvendo tale equazione, ad esempio ricavando $z_0 = -2z_1 - 3z_2$, si ottiene la generica retta del fascio di centro P (avendo posto $\lambda := z_1$ e $\mu := z_2$):

$$r_{\lambda, \mu} : (-2\lambda - 3\mu)x_0 + \lambda x_1 + \mu x_2 = 0.$$

In modo del tutto analogo, si definisce lo spazio proiettivo duale di \mathbb{P}_K^n e si denota con $(\mathbb{P}_K^n)^*$. Come prima, si pone la relazione di dualità fra \mathbb{P}_K^n e $(\mathbb{P}_K^n)^*$ stabilita da δ e δ^* , dove

$$\delta : \{ \text{iperpiani di } \mathbb{P}_K^n \} \longleftrightarrow (\mathbb{P}_K^n)^*$$

è definita da

$$H : a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0 \longleftrightarrow H^* = [a_0, \dots, a_n].$$

e

$$\delta^* : \mathbb{P}_K^n \longleftrightarrow \{ \text{iperpiani di } (\mathbb{P}_K^n)^* \}$$

è definita da (rispetto alle coordinate omogenee $[z_0, \dots, z_n]$ di $(\mathbb{P}_K^n)^*$)

$$P = [\alpha_0, \dots, \alpha_n] \longleftrightarrow P^* : \alpha_0z_0 + \cdots + \alpha_nz_n = 0$$

Anche in questo caso, vale la proprietà analoga a quella vista prima: se P è un punto e H un iperpiano di \mathbb{P}_K^n allora

$$P \in H \iff H^* \in P^*.$$

Pertanto l'insieme degli iperpiani di \mathbb{P}_K^n passanti per un fissato punto P è parametrizzato dai punti dell'iperpiano P^* di $(\mathbb{P}_K^n)^*$. Come nel caso precedente, il passaggio per un punto è un esempio di condizione lineare.

Definizione 9.10.7. Si dice *sistema lineare di iperpiani di dimensione r* una famiglia di iperpiani di \mathbb{P}_K^n i cui coefficienti sono parametrizzati da un sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}_K^n)^*$ di dimensione r .

Esempio 9.10.8. Consideriamo il sistema lineare dei piani di \mathbb{P}^3 :

$$\mathcal{S} : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

e imponiamo la condizione lineare di passaggio per il punto $P = [-1, 2, 3, 4]$. Quest'ultima è

$$-a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 0.$$

Pertanto $a_0 = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3$ e il sistema lineare dei piani passanti per P risulta dunque

$$\mathcal{S}_P : (2a_1 + 3a_2 + 4a_3)x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

ed è di dimensione 2: infatti è parametrizzato dal piano di $(\mathbb{P}^3)^*$ di equazione $-z_0 + 2z_1 + 3z_2 + 4z_3 = 0$. Richiedendo anche il passaggio per $Q = [0, 2, 1, 1]$, si ha l'ulteriore condizione lineare

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

quindi, complessivamente, si ottiene un sistema lineare omogeneo di rango 2:

$$\begin{cases} -a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 0 \\ 2a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -6a_1 - a_2 \\ a_3 = -2a_1 - a_2 \end{cases}.$$

Il sistema lineare dei piani passanti per P e Q risulta dunque

$$\mathcal{S}_{P,Q} : (-6a_1 - a_2)x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + (-2a_1 - a_2)x_3 = 0$$

e chiaramente ha dimensione 1: è un fascio di piani. Infine, imponendo il passaggio per un terzo punto $R = [1, 0, 0, 0]$ si ottiene un sistema lineare omogeneo di rango 3 e, di conseguenza, un sistema lineare di piani di dimensione 0, cioè un unico piano. Determinarlo per esercizio.

Definizione 9.10.9. Diciamo che ρ condizioni lineari omogenee sui coefficienti degli iperpiani di \mathbb{P}^n , con $1 \leq \rho \leq n$, sono *indipendenti* se il rango del sistema lineare omogeneo costituito da tali equazioni è uguale a ρ .

Osservazione 9.10.10. Il sistema lineare degli iperpiani di \mathbb{P}^n che soddisfano ρ condizioni lineari indipendenti ha dimensione $n - \rho$. Infatti è parametrizzato dal sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}^n)^*$ che è intersezione dei ρ iperpiani indipendenti corrispondenti ciascuno a una delle condizioni lineari.

Abbiamo visto prima che un esempio di condizione lineare è il passaggio per un punto fissato. Dall'Osservazione precedente segue dunque immediatamente il seguente risultato.

Proposizione 9.10.11. Sia $1 \leq \rho \leq n$ e siano P_1, \dots, P_ρ punti proiettivamente indipendenti di \mathbb{P}^n . Allora il passaggio per tali punti impone agli iperpiani di \mathbb{P}^n esattamente ρ condizioni lineari indipendenti. Dunque il sistema lineare degli iperpiani passanti per P_1, \dots, P_ρ ha dimensione $n - \rho$.

Si considerino le coordinate omogenee dei punti

$$P_i = [\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}], \quad i = 1, \dots, \rho.$$

Per ipotesi, tali punti sono indipendenti e quindi (vedi il Corollario 7.3.9 e la Definizione 7.3.10) la matrice $A \in K^{\rho, n+1}$, avente per righe le loro coordinate, ha rango ρ . D'altra parte, il passaggio per P_1, \dots, P_ρ impone ai coefficienti z_i del generico iperpiano $z_0x_0 + \dots + z_nx_n = 0$ di \mathbb{P}^n di soddisfare il sistema lineare omogeneo

$$AZ = 0, \quad \text{dove } Z := {}^t(z_0, \dots, z_n).$$

Pertanto $AZ = 0$ è costituito da ρ equazioni indipendenti e il suo spazio delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di K^{n+1} di dimensione $n + 1 - \rho$. Il suo proiettivizzato è quindi un sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}^n)^$ di dimensione $n - \rho$, come volevamo.*

9.11 Fasci di coniche

Introduciamo ora una costruzione come quella precedente, ma nell'ambito delle coniche del piano proiettivo. A una conica di $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}_K^2$ (con $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}) di equazione

$$C : a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \quad (9.11.1)$$

si può associare l'insieme dei suoi possibili coefficienti

$$\{k(a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}) \mid k \in K^*\}$$

che è un punto dello spazio proiettivo \mathbb{P}^5 . In tal modo, si individua una corrispondenza biunivoca:

$$\psi : \{\text{coniche di } \mathbb{P}^2\} \longleftrightarrow \mathbb{P}^5$$

definita da

$$C \mapsto [a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}].$$

Tale applicazione è ben definita. Nel seguito denoteremo quindi, i coefficienti $[a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}]$ della generica conica anche con le coordinate omogenee $[z_0, \dots, z_5]$ di \mathbb{P}^5 .

Esempio 9.11.1. Il punto di \mathbb{P}^5 associato alla conica $y = 3x^2$, secondo la corrispondenza ψ sopra definita, è $[0, 0, -1/2, 3, 0, 0]$.

Diciamo dunque che le coniche del piano sono parametrizzate da \mathbb{P}^5 .

Definizione 9.11.2. Si dice *sistema lineare di coniche di dimensione r* una famiglia di coniche di \mathbb{P}^2 i cui coefficienti sono parametrizzati da un sottospazio proiettivo di \mathbb{P}^5 di dimensione r , con $0 \leq r \leq 5$.

In particolare, le coniche del piano costituiscono un sistema lineare di dimensione 5, che è l'intero \mathbb{P}^5 . E una sola conica è un sistema lineare di dimensione 0.

In analogia con quanto visto nel paragrafo precedente, introduciamo la seguente nozione.

Definizione 9.11.3. Si dice *condizione lineare* sulle coniche di \mathbb{P}^2 un'equazione lineare omogenea nei coefficienti della generica conica. In altri termini, è l'equazione di un iperpiano di \mathbb{P}^5 , dove quest'ultimo parametrizza (tramite ψ) le coniche di \mathbb{P}^2 , dunque è della forma

$$m_0z_0 + \dots + m_5z_5 = 0,$$

dove $m_i \in K$ per ogni i .

Esempio 9.11.4. Sono condizioni lineari sulle coniche di \mathbb{P}^2 le equazioni $a_{11} + a_{22} = 0$ (o, equivalentemente, $z_3 + z_5 = 0$), $2a_{12} - 3a_{02} = 0$ (o, equivalentemente, $2z_4 - 3z_2 = 0$), ecc.

Definizione 9.11.5. Diciamo che s condizioni lineari sulle coniche sono *indipendenti* se il sistema lineare omogeneo costituito da tali equazioni ha rango s , i.e. è del tipo

$$MZ = 0, \quad \text{dove } M \in K^{s,6}, \quad \text{rg}(M) = s$$

avendo posto

$$Z = {}^t[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5] = {}^t[a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}].$$

In altri termini, se il sistema lineare omogeneo $MZ = 0$ è l'equazione cartesiana di un sottospazio proiettivo di \mathbb{P}^5 avente codimensione s .

Da questa definizione segue che il numero s di condizioni indipendenti deve verificare $1 \leq s \leq 5$. Si ha immediatamente il seguente fatto.

Proposizione 9.11.6. *Le coniche di \mathbb{P}^2 che soddisfano s condizioni lineari indipendenti costituiscono un sistema lineare di coniche di dimensione $5 - s$.*

L'esempio più semplice di condizione lineare è il passaggio per un punto.

Esempio 9.11.7. Determinare la condizione lineare che esprime il passaggio per $P = [1, 0, 0]$ e l'equazione del sistema lineare \mathcal{S}_P (di dimensione 4) di tutte le coniche per P .

Imponiamo il passaggio per P alla generica conica di equazione (9.11.1), ottenendo $a_{00} = 0$. Pertanto

$$\mathcal{S}_P : 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Si noti che ha dimensione 4 in quanto parametrizzato dall'iperpiano di \mathbb{P}^5 di equazione $z_0 = 0$. Infatti, nell'equazione di \mathcal{S}_P compaiono 5 parametri omogenei indipendenti.

Vogliamo trovare un risultato analogo a quello della Proposizione 9.10.11, cioè determinare il numero e la posizione reciproca di punti che impongano condizioni indipendenti al sistema lineare delle coniche.

Ricordiamo che, in \mathbb{P}^2 il numero massimo di punti proiettivamente indipendenti è 3 (vedi Definizione 7.3.10), quindi dovremo utilizzare la nozione più ampia di punti in posizione generale.

Lemma 9.11.8. *Si consideri un sistema di s condizioni lineari indipendenti sui coefficienti (con $1 \leq s \leq 4$)*

$$MZ = 0, \quad M = (m_{ij}) \in K^{s,6} \tag{9.11.2}$$

e si consideri una ulteriore condizione lineare

$$h_0z_0 + \cdots + h_5z_5 = 0. \tag{9.11.3}$$

Allora le $s + 1$ condizioni

$$\Sigma : \begin{cases} MZ & = 0 \\ h_0 z_0 + \cdots + h_5 z_5 & = 0 \end{cases}$$

sono indipendenti se e solo se esiste almeno una conica che soddisfa (9.11.2) ma non soddisfa (9.11.3).

Per ipotesi $\text{rg}(M) = s$, equivalentemente, per la Proposizione 9.11.6, $\dim \mathcal{S}_M = 5 - s$, dove \mathcal{S}_M è il sistema lineare delle coniche che soddisfano la (9.11.2).

Inoltre, per lo stesso motivo, le $s + 1$ condizioni in Σ sono indipendenti se e solo se

$$\text{rg} \begin{pmatrix} & & M & & & & \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & \end{pmatrix} = s + 1$$

e questo equivale a $\dim \mathcal{S}_\Sigma = 5 - (s + 1)$. Poiché si hanno le inclusioni di sottospazi proiettivi

$$\mathcal{S}_\Sigma \subseteq \mathcal{S}_M \subset \mathbb{P}^5$$

è chiaro che $\dim \mathcal{S}_\Sigma = 5 - (s + 1)$ se e solo se la precedente inclusione è stretta se e solo se se esiste almeno una conica che soddisfa (9.11.2) ma non soddisfa (9.11.3).

Teorema 9.11.9. *Si consideri il sistema lineare di equazione (9.11.1) costituito da tutte le coniche di \mathbb{P}^2 e si imponga ad esso il passaggio per i punti P_1, \dots, P_s , dove $1 \leq s \leq 5$. Se tali punti sono in posizione generale, allora le s condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti.*

Proviamo l'affermazione nei vari casi.

(a) Se $s = 1$, l'affermazione è immediata.

(b) Se $s = 2$ e P_1, P_2 sono distinti, allora le 2 condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti. Infatti, per il Lemma 9.11.8, basta trovare una conica che contiene P_1 ma non P_2 . Poiché i punti sono distinti, esiste una retta r per P_1 e non per P_2 ; basta considerare la conica doppiamente degenera r^2 .

(c) Se $s = 3$ e P_1, P_2, P_3 non sono allineati (e in particolare sono distinti), allora le 3 condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti. Infatti, per il punto (b) le 2 condizioni di passaggio per P_1 e P_2 sono indipendenti. Dunque, per il Lemma 9.11.8, basta trovare una conica che contiene P_1 e P_2 ma non P_3 . Poiché i 3 punti non sono allineati, se r è la retta per P_1 e P_2 , allora $P_3 \notin r$. Dunque r^2 è una conica che prova la tesi.

(d) Se $s = 4$ e P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale (e in particolare sono distinti), allora le 4 condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti. Infatti, per il punto (c) le 3 condizioni di passaggio per P_1, P_2, P_3 sono indipendenti. Dunque, per il Lemma 9.11.8, basta trovare una conica che contiene P_1, P_2, P_3 ma non P_4 . Sia r è la retta per P_1 e P_2 e s è la retta per P_2 e P_3 , dall'ipotesi si ha che $P_4 \notin (r \cup s)$ e quindi $r \cup s$ è una conica che prova la tesi.

(e) Analogamente: concludere per esercizio.

Tale risultato, con la Proposizione 9.11.6, ha due immediate conseguenze.

Corollario 9.11.10. Per 5 punti in posizione generale passa una ed una sola conica.

Esercizio C3. Si provi che per 5 punti, dei quali al massimo 3 sono allineati, passa una ed una sola conica.

Corollario 9.11.11. Le coniche del piano passanti per 4 punti in posizione generale costituiscono un sistema lineare di dimensione 1.

Tali sistemi lineari saranno l'oggetto di studio di quest'ultima parte del corso: vedremo come descriverli e come classificarli.

Definizione 9.11.12. Un sistema lineare di coniche di dimensione 1 si dice *fascio di coniche*.

Un fascio è parametrizzato da una retta di \mathbb{P}^5 del tipo

$$[z_0, \dots, z_5] = \lambda[\alpha_0, \dots, \alpha_5] + \mu[\beta_0, \dots, \beta_5].$$

Mediante la corrispondenza biunivoca ψ , al punto $[z_0, \dots, z_5]$ corrisponde la conica $\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j = 0$, mentre ai punti $[\alpha_0, \dots, \alpha_5]$ e $[\beta_0, \dots, \beta_5]$ corrispondono, rispettivamente, due specifiche coniche C e D di equazioni

$$C : f(x_0, x_1, x_2) = 0 \quad e \quad D : g(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Pertanto ogni conica del fascio è descritta da un polinomio omogeneo di secondo grado del tipo

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j = \lambda f(x_0, x_1, x_2) + \mu g(x_0, x_1, x_2).$$

Definizione 9.11.13. L'equazione

$$\mathcal{F} : \lambda f(x_0, x_1, x_2) + \mu g(x_0, x_1, x_2) = 0, \tag{9.11.4}$$

con $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$, si dice *equazione cartesiana del fascio* \mathcal{F} . Inoltre le coniche $C : f(x_0, x_1, x_2) = 0$ e $D : g(x_0, x_1, x_2) = 0$ si dicono *generatori* di \mathcal{F} .

Anche in questo contesto (come accadeva per i fasci di rette nel piano o i fasci di piani nello spazio), i generatori di un fascio di coniche non sono univocamente individuati. Anzi, una qualunque coppia di coniche distinte del fascio può generare il fascio stesso. Inoltre, dall'equazione (9.11.4) è chiaro che un punto è comune a tutte le coniche di un fascio se e solo se appartiene a entrambi i generatori.

Definizione 9.11.14. Un punto P del piano si dice *punto base* di un fascio \mathcal{F} se appartiene a tutte le coniche di \mathcal{F} .

Esempio 9.11.15. Calcoliamo i punti base del fascio

$$\mathcal{F} : \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu xy = 0.$$

Come osservato, sono i punti comuni ai due generatori e quindi corrispondono alle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, \pm 1), (\pm 1, 0).$$

Nel prossimo paragrafo classificheremo i vari tipi di fasci a seconda dei loro punti base. Iniziamo qui con una prima suddivisione relativa alle coniche degeneri e non degeneri.

Proposizione 9.11.16. Sia \mathcal{F} un fascio di coniche in \mathbb{P}^2 . Allora si presenta uno e uno solo dei due casi:

- i) \mathcal{F} contiene esattamente 3 coniche degeneri, eventualmente coincidenti;
- ii) \mathcal{F} è costituito solo da coniche degeneri.

Sia $C_{\lambda, \mu}$ la generica conica di \mathcal{F} della forma

$$C_{\lambda, \mu} : \lambda f(x_0, x_1, x_2) + \mu g(x_0, x_1, x_2) = 0$$

dove

$$f(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j, \quad g(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j$$

sono due polinomi omogenei di secondo grado che definiscono i due generatori di \mathcal{F} , rispettivamente. La matrice associata alla conica $C_{\lambda, \mu}$ è

$$B_{\lambda, \mu} = \begin{pmatrix} \lambda a_{00} + \mu b_{00} & \lambda a_{01} + \mu b_{01} & \lambda a_{02} + \mu b_{02} \\ \lambda a_{01} + \mu b_{01} & \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} \\ \lambda a_{02} + \mu b_{02} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} \end{pmatrix}.$$

Per il Teorema 9.9.8, la conica $C_{\lambda, \mu}$ è degenera se e solo se $\det(B_{\lambda, \mu}) = 0$. Chiaramente, $\det(B_{\lambda, \mu})$ è un polinomio omogeneo in λ e μ . Se è non nullo, tale polinomio ha grado 3 e quindi ha 3 radici (e tutte quelle proporzionali), non necessariamente distinte, che denotiamo con

$$[\lambda_1, \mu_1], \quad [\lambda_2, \mu_2], \quad [\lambda_3, \mu_3].$$

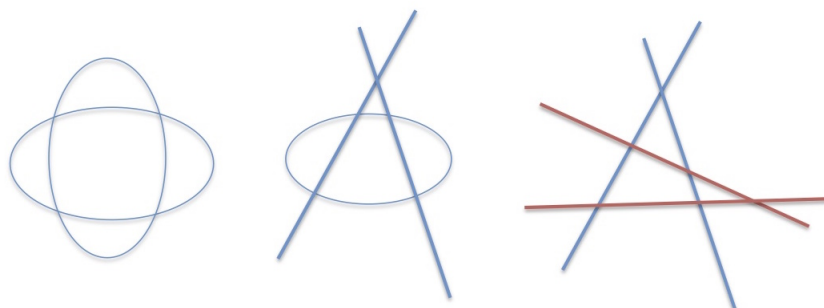
Dunque C_{λ_i, μ_i} , per $i = 1, 2, 3$, sono tutte e sole le coniche degeneri di \mathcal{F} . Se invece $\det(B_{\lambda, \mu})$ è il polinomio nullo allora ogni conica $C_{\lambda, \mu}$ è degenera.

Definizione 9.11.17. Un fascio di coniche si dice *degenere* se tutte le sue coniche sono degeneri. Si dice *non degenera* altrimenti.

Nella ricerca dei punti base di un fascio si può procedere determinando i punti comuni a due generatori del fascio stesso. È naturale dunque chiedersi in quanti punti si incontrano due coniche.

Teorema 9.11.18. Due coniche in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ senza componenti comuni si intersecano esattamente in 4 punti, eventualmente coincidenti.

Siano C e D due coniche di \mathbb{P}^2 . Ci sono 3 possibilità: I) entrambe sono degeneri; in tal caso, poiché non hanno componenti in comune, la tesi segue banalmente. II) Una è degenera e l'altra no. In tal caso, sia C non degenera e $D = r \cup s$ (con r e s coincidenti o meno). Allora $C \cap D = C \cap (r \cup s) = (C \cap r) \cup (C \cap s)$ e si conclude con la Proposizione 9.9.19. III) Entrambe sono non degeneri. I punti di intersezione di C e D sono i punti base del fascio (non degenera) \mathcal{F} generato da C e D . Ma, per la Proposizione 9.11.16, \mathcal{F} contiene almeno una conica degenera D' ; si ha $C \cap D = C \cap D'$ e si conclude con quanto visto nella parte (II).



Definizione 9.11.19. Siano C e D due coniche di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ senza componenti comuni. Definiamo la *molteplicità di intersezione* di C e D in un punto comune P , e la denotiamo con $m_P(C, D)$, come segue:

- i) Se $C \cap D = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ allora $m_{P_i}(C, D) = 1$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4$;
- ii) Se $C \cap D = \{P_1, P_2, P_3\}$ e $T_{P_1}(C) = T_{P_1}(D)$ allora $m_{P_1}(C, D) = 2$ (e $m_{P_2}(C, D) = 1 = m_{P_3}(C, D)$). Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^2, P_2, P_3\}$. In tal caso, diremo che C e D sono *tangenti in P_1* .
- iii) Se $C \cap D = \{P_1, P_2\}$ e $T_{P_i}(C) = T_{P_i}(D)$, per $i = 1, 2$, allora $m_{P_i}(C, D) = 2$, per $i = 1, 2$. Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^2, P_2^2\}$. In tal caso, diremo che C e D sono *tangenti sia in P_1 che in P_2* .

- iv) Se $C \cap D = \{P_1, P_2\}$ e $T_{P_1}(C) = T_{P_1}(D)$, ma $T_{P_2}(C) \neq T_{P_2}(D)$ allora $m_{P_1}(C, D) = 3$. Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^3, P_2\}$. In tal caso, diremo che C e D sono *osculanti* in P_1 .
- v) Se $C \cap D = \{P_1\}$ allora $m_{P_1}(C, D) = 4$. Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^4\}$. In tal caso, diremo che C e D sono *iperosculanti* in P_1 .

Corollario 9.11.20. *Un fascio non degenerato di coniche ha esattamente 4 punti base in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, eventualmente coincidenti.*

Per definizione, in un fascio non degenerato \mathcal{F} c'è (almeno) una conica non degenerata C . Se D è un'ulteriore conica di \mathcal{F} , possiamo considerarle come generatori del fascio. Pertanto i punti base di \mathcal{F} , come osservato in precedenza, sono esattamente i punti di $C \cap D$. Essendo C non degenerata, non ha componenti in comune con D e quindi, per il Teorema 9.11.18, $C \cap D$ è costituita da 4 punti, eventualmente coincidenti.

Tale risultato e il Corollario 9.11.11 suggeriscono che la "configurazione" dei punti base di un fascio di coniche ne determina la struttura.

Quanto visto finora per i fasci di coniche proiettive, può essere espresso in modo analogo nel piano affine o euclideo, come mostra il seguente esempio.

Esempio 9.11.21. Determinare il fascio \mathcal{F} generato dalla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e dall'unione degli assi cartesiani di \mathbb{E}^2 . Il fascio richiesto ha equazione, in \mathbb{E}^2 ,

$$\mathcal{F} : \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu xy = 0.$$

Lo stesso fascio è descritto in \mathbb{P}^2 dall'equazione

$$\mathcal{F} : \lambda(x_1^2 + x_2^2 - x_0^2) + \mu x_1 x_2 = 0.$$

9.12 Classificazione dei fasci di coniche

Abbiamo visto nel Paragrafo 11 che l'esempio più semplice di condizione lineare sulle coniche è il passaggio per un punto. Ma non è l'unico. Infatti, anche se la tangenza a una retta data impone una condizione quadratica sui coefficienti della generica conica, la tangenza a una retta in un suo punto equivale a due condizioni lineari, come mostra il seguente risultato.

Lemma 9.12.1. *In $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ la tangenza a una retta t in un suo punto P impone al sistema lineare delle coniche due condizioni lineari indipendenti.*

Si verifica (per esercizio) che non è restrittivo supporre che $t : x_2 = 0$ e $P = [1, 0, 0]$. Come al solito, consideriamo l'equazione (9.11.1)

$$C : a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Imponiamo il passaggio per P , ottenendo $a_{00} = 0$. Intersecando C e t si ha

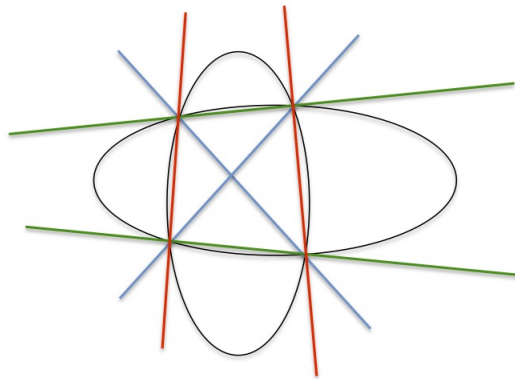
$$\begin{cases} 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(2a_{01}x_0 + a_{11}x_1) = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

e quest'ultimo sistema ha per soluzione P^2 se e solo se $a_{01} = 0$. Si osservi, infine, che le condizioni $a_{00} = 0$ e $a_{01} = 0$ sono indipendenti.

Nel seguito, siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ e r_{ij} la retta per P_i e P_j , per $i, j = 1, 2, 3, 4$. Si prova (usando il Teorema fondamentale delle proiettività) che non è restrittivo fissare i punti e le rette in gioco e operare nel piano euclideo.

Proposizione 9.12.2. Siano P_1, P_2, P_3, P_4 punti distinti e in posizione generale e sia \mathcal{F} la famiglia delle coniche avente tali punti come punti base. Allora \mathcal{F} è un fascio non degenere e le sue 3 coniche degeneri sono $C_1 := r_{12} \cup r_{34}$, $C_2 := r_{23} \cup r_{14}$, $C_3 := r_{24} \cup r_{13}$.

La famiglia \mathcal{F} è un fascio per il Corollario 9.11.11. Inoltre $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{F}$ e sono le uniche degeneri contenenti i 4 punti.



Proposizione 9.12.3. Siano P_1, P_2, P_3 punti distinti e in posizione generale (cioè non allineati) e sia t una retta contenente P_3 ma non P_1 e P_2 . Sia \mathcal{F} la famiglia delle coniche passanti per i 3 punti e tangenti a t in P_3 . Allora \mathcal{F} è un fascio non degenere, le sue 3 coniche degeneri sono $r_{13} \cup r_{23}$ (contata due volte) e $t \cup r_{12}$ e i suoi punti base sono P_1, P_2, P_3^2 .

Possiamo scegliere $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = (0, 0)$ e $t : x + y = 0$. La generica conica tangente a t in P_3 ha equazione

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 - \delta(x + y) = 0.$$

Imponendo il passaggio per P_1 e P_2 si ottengono, rispettivamente, le condizioni $\delta = \alpha$ e $\gamma = \alpha$. La famiglia richiesta è dunque

$$\mathcal{F} : \alpha(x^2 + y^2 - x - y) + \beta xy = 0$$

che risulta un fascio di coniche. La generica conica di \mathcal{F} è

$$C_{\alpha,\beta} : 2\alpha(x^2 + y^2 - x - y) + 2\beta xy = 0$$

e la sua matrice associata è

$$B_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & \beta \\ -\alpha & \beta & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

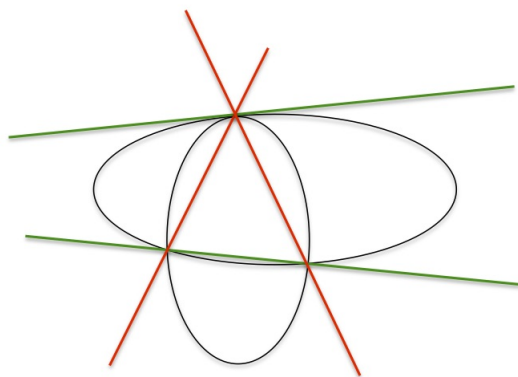
Essendo $\det(B_{\alpha,\beta}) = -2\alpha^2(2\alpha - \beta)$, si deduce che \mathcal{F} contiene esattamente 3 coniche degeneri (dunque è un fascio non degenere) ottenute per $\alpha^2 = 0$ e per $\beta = 2\alpha$. Esse sono $xy = 0$ (contata 2 volte), cioè $r_{13} \cup r_{23}$, e la conica

$$x^2 + y^2 - x - y + 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + y)(x + y - 1) = 0$$

che risulta essere $t \cup r_{12}$. Infine, i punti base di \mathcal{F} si ottengono intersecando, ad esempio, le due coniche degeneri:

$$\begin{cases} xy = 0 \\ (x + y)(x + y - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 = y(y - 1) \\ y = 0 = x(x - 1) \end{cases}$$

ottenendo $(0, 0)^2$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.



Proposizione 9.12.4. Siano P_1 e P_2 due punti distinti e s e t due rette distinte tali che $P_1 \in s$, $P_1 \notin t$, $P_2 \in t$, $P_2 \notin s$. Sia \mathcal{F} la famiglia delle coniche tangenti a s in P_1 e a t in P_2 . Allora \mathcal{F} è un fascio non degenere, le sue 3 coniche degeneri sono r_{12}^2 (contata due volte) e $s \cup t$ e i suoi punti base sono P_1^2, P_2^2 .

Come prima, si possono scegliere (nel piano euclideo) i punti $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$ e le rette $s : x = 0$, $t : x - 1 = 0$. La generica conica tangente a s in P_1 ha equazione

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 - \delta x = 0.$$

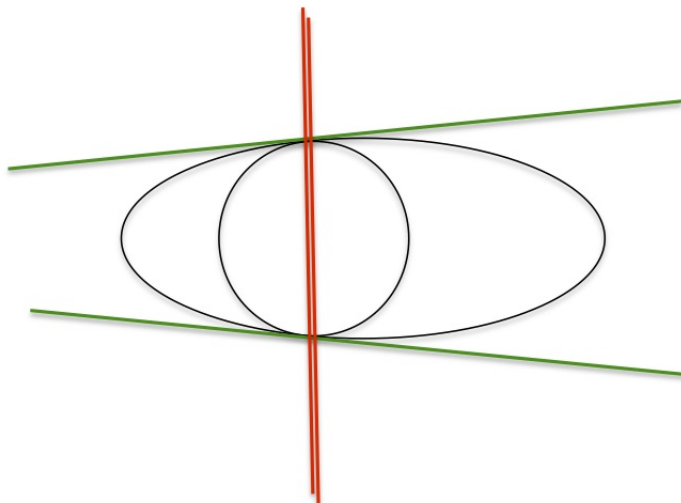
Imponendo la tangenza a t in P_2 si ottengono le ulteriori condizioni $\delta = \alpha$ e $\beta = 0$. La famiglia richiesta è dunque

$$\mathcal{F} : \alpha(x^2 - x) + \gamma y^2 = 0.$$

che è chiaramente un fascio di coniche. I generatori sono coniche degeneri e precisamente $x(x - 1) = 0$ è l'equazione di $s \cup t$, mentre $y^2 = 0$ è la conica doppiamente degenera r_{12}^2 . Per verificare che quest'ultima è contata due volte, basta calcolare il determinante della matrice della generica conica $C_{\alpha,\gamma}$ del fascio \mathcal{F} , come nella Proposizione precedente. Analogamente, per il calcolo dei punti base si possono intersecare le due coniche degeneri ottenendo

$$\begin{cases} x(x - 1) = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)^2, (1,0)^2$$

come volevamo.



Proposizione 9.12.5. Siano C una conica non degenera, P_1 e P_2 due punti distinti di C e $t := T_{P_1}(C)$ la retta tangente a C in P_1 . Sia \mathcal{F} la famiglia di coniche Γ tangenti a t in P_1 , passanti per P_2 e tali che $m_{P_1}(\Gamma, C) = 3$. Allora:

- i) \mathcal{F} è un fascio non degenera;
- ii) l'unica conica degenera di \mathcal{F} è $r_{12} \cup t$ (contata 3 volte);
- iii) i punti base di \mathcal{F} sono P_1^3 e P_2 ;
- iv) comunque scelte due coniche $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{F}$, si ha $m_{P_1}(\Gamma_1, \Gamma_2) = 3$.

i) – ii) Si possono scegliere, come al solito, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$ e $t : x = 0$. Si osservi anzitutto che le 3 condizioni (tangenza a t in P_1 e passaggio per P_2) determinano un sistema lineare di coniche di dimensione 2. Si vede facilmente che il suo elemento generale è del tipo

$$\Gamma : \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 - \alpha x = 0.$$

Una di esse è la conica C , la cui equazione si ottiene scegliendo opportuni valori dei parametri:

$$C : ax^2 + 2bxy + cy^2 - ax = 0.$$

Si verifica facilmente che C è non degenera se e solo se $ac \neq 0$. Ora imponiamo che Γ sia osculante C in P_1 : posti $C \cap \Gamma = \{P_1^2, P_2, Q\}$, imponiamo cioè che Q coincida con P_1 . Ponendo a sistema le equazioni di C e Γ , questo è equivalente al sistema tra l'equazione di C e

$$\gamma(ax^2 + 2bxy + cy^2 - ax) - c(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 - \alpha x) = 0$$

da cui

$$x[(\gamma a - \alpha c)x + 2(\gamma b - \beta c)y - (\gamma a - \alpha c)] = 0.$$

Si ottengono dunque due sistemi: dal primo si ha $C \cap \{x = 0\}$ e quindi P_1^2 . Il secondo fornisce le due intersezioni fra C e la retta

$$r : (\gamma a - \alpha c)x + 2(\gamma b - \beta c)y - (\gamma a - \alpha c) = 0$$

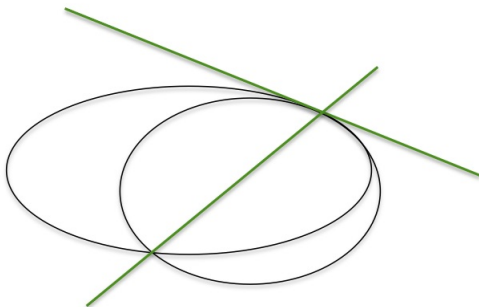
cioè il punto $P_2 = (1, 0)$ e l'ulteriore punto Q . È evidente che $Q = P_1$ se e solo se $P_1 \in r$ se e solo se $\gamma a - \alpha c = 0$. Imponendo tale condizione a Γ si ottiene dunque un'equazione per la famiglia \mathcal{F} che risulta essere

$$\mathcal{F} : \alpha x^2 + 2\beta xy + \alpha(c/a)y^2 - \alpha x = 0$$

o anche, denotando con h il coefficiente numerico c/a ,

$$\mathcal{F} : \alpha(x^2 + hy^2 - x) + 2\beta xy = 0.$$

Quindi \mathcal{F} è un fascio. Considerando la matrice della generica conica di \mathcal{F} , il suo determinante risulta $-h\alpha^3/2$, che risulta nullo se e solo se $\alpha = 0$. Infatti $h = c/a \neq 0$ in quanto C è non degenere per ipotesi. Pertanto l'unica conica degenere di \mathcal{F} è $xy = 0$ contata 3 volte. Le affermazioni successive sono lasciate per esercizio.



Proposizione 9.12.6. Siano C una conica non degenere, $P_1 \in C$ e $t := T_{P_1}(C)$ la retta tangente a C in P_1 . Sia \mathcal{F} la famiglia di coniche Γ tangenti a t in P_1 e tali che $m_{P_1}(\Gamma, C) = 4$. Allora:

- i) \mathcal{F} è un fascio non degenere;
- ii) l'unica conica degenere di \mathcal{F} è t^2 (contata 3 volte);
- iii) \mathcal{F} ha P_1^4 come unico punto base;
- iv) comunque scelte due coniche $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{F}$, si ha

$$m_{P_1}(\Gamma_1, \Gamma_2) = 4.$$

i) – ii) Per il Teorema 9.9.18 (Classificazione delle coniche proiettive complesse), la conica C è proiettivamente equivalente a $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$, che può essere ricondotta, nel piano affine, alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Con una opportuna rototraslazione possiamo dunque supporre che

$$C : x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad P_1 = (0, 0).$$

Dunque $t : x = 0$. Imponendo le due condizioni lineari di tangenza a t in P_1 alle coniche del piano si ottiene la famiglia

$$\Gamma : \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x = 0.$$

Consideriamo $\Gamma \cap C$:

$$\begin{cases} \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x = 0 \\ y^2 = -x^2 + 2x \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y^2 & = -x^2 + 2x \\ (\alpha - \gamma)x^2 + 2\beta xy + (\delta + 2\gamma)x & = 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$(I) : \begin{cases} y^2 & = -x^2 + 2x \\ x & = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)^2$$

$$(II) : \begin{cases} y^2 & = -x^2 + 2x \\ (\alpha - \gamma)x + 2\beta y + \delta + 2\gamma & = 0 \end{cases}$$

Affinché $(x, y) = (0, 0)$ sia soluzione, deve essere $\delta + 2\gamma = 0$. Supponiamo $\beta \neq 0$; allora il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} y^2 & = -x^2 + 2x \\ y & = (\gamma - \alpha)x/2\beta \end{cases}$$

da cui

$$(\gamma - \alpha)^2 x^2 = -4\beta^2 x^2 + 8\beta^2 x.$$

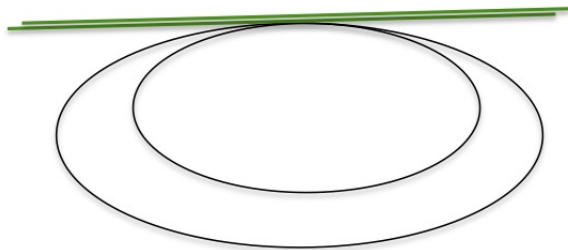
Tale equazione ha $x = 0$ come radice doppia se $\beta = 0$. Dunque, sostituendo nel sistema (II), si ha

$$(II) : \begin{cases} y^2 & = -x^2 + 2x \\ (\alpha - \gamma)x & = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)^2.$$

Sostituendo le condizioni trovate ($\delta + 2\gamma = 0$ e $\beta = 0$) nell'equazione di Γ , si determina infine la famiglia richiesta

$$\mathcal{F} : \alpha x^2 + \gamma y^2 - 2\gamma x = 0$$

che risulta chiaramente un fascio. Considerando la matrice della generica conica di \mathcal{F} , il suo determinante risulta γ^3 , che è nullo se e solo se $\gamma = 0$. Pertanto l'unica conica degenera di \mathcal{F} è $x^2 = 0$ (contata 3 volte). Le affermazioni successive sono lasciate per esercizio.



Teorema 9.12.7 (Classificazione dei fasci non degeneri di coniche). *Sia \mathcal{F} un fascio non degeneri di coniche di punti base P_1, P_2, P_3, P_4 .*

Allora \mathcal{F} è di uno dei seguenti tipi:

- i) fascio generale di coniche se P_1, P_2, P_3, P_4 sono distinti e in posizione generale;*
- ii) fascio tangente di coniche se $P_1 = P_2, P_3, P_4$ sono distinti e non allineati; in tal caso le coniche di \mathcal{F} hanno la stessa tangente in P_1 ;*
- iii) fascio bitangente di coniche se $P_1 = P_2$ e $P_3 = P_4$ sono distinti; in tal caso le coniche di \mathcal{F} hanno le stesse rette tangenti in P_1 e in P_3 ;*
- iv) fascio osculante di coniche se $P_1 = P_2 = P_3$ e P_4 sono distinti; in tal caso due coniche di \mathcal{F} hanno molteplicità di intersezione 3 in P_1 ;*
- v) fascio iperosculante di coniche se $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$; in tal caso due coniche di \mathcal{F} hanno molteplicità di intersezione 4 in P_1 .*

Dalle Proposizioni 9.12.2, 9.12.3, 9.12.4, 9.12.5, 9.12.6 segue la descrizione dei tipi di fasci (i), ..., (v). Resta da provare che ogni fascio non degeneri \mathcal{F} è di uno di questi tipi. Per la Proposizione 9.11.16, \mathcal{F} contiene necessariamente una conica non degeneri e una degeneri, che indichiamo, rispettivamente, con C e D . Esaminiamo tutte le possibilità.

1. $D = r \cup s$, con $r \neq s$. Posto $Q := r \cap s$,

1.1. $Q \notin C$. La posizione reciproca di C e delle componenti di D può essere:

- r e s sono secanti C ; - r è secante e s è tangente a C . - r e s sono tangenti a C ;

Tali possibilità sono illustrate dalle Figure 1, 2, 3 e implicano, rispettivamente, che \mathcal{F} è un fascio generale, tangente o bitangente.

1.2. $Q \in C$. La posizione reciproca di C e delle componenti di D può essere:

- r e s sono secanti C ; - r è secante e s è tangente a C .

Tali possibilità sono illustrate dalle Figure 4 e 5 e implicano, rispettivamente, che \mathcal{F} è un fascio tangente o osculante.

2. $D = r^2$. La posizione reciproca di C e di r può essere:

- r è secante C ; - r è tangente a C .

Tali possibilità sono illustrate dalle Figure 6 e 7 e implicano, rispettivamente, che \mathcal{F} è un fascio bitangente o iperosculante.

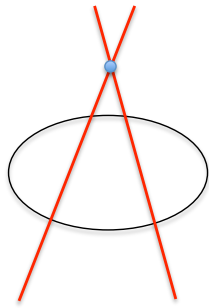


Figura 1

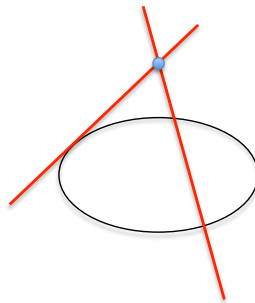


Figura 2

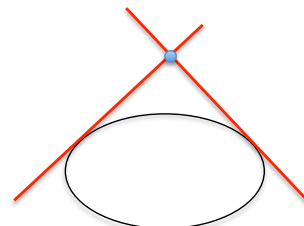


Figura 3

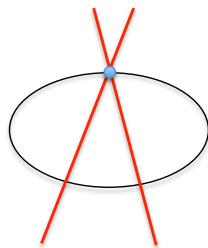


Figura 4

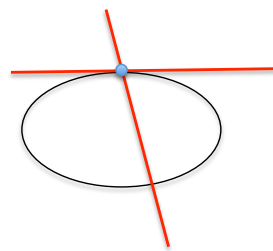


Figura 5

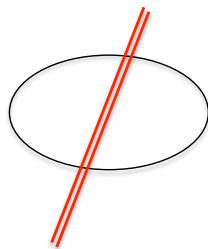


Figura 6

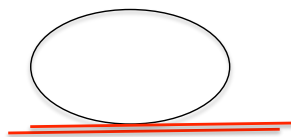


Figura 7

Esempio 9.12.8. Determinare l'equazione della famiglia \mathcal{F} delle coniche di \mathbb{A}^2 per P_1, P_2, P_3, P_4 , specificando se \mathcal{F} è un fascio e, in tal caso, di che tipo, dove

$$P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (0, 0), \quad P_3 = (0, 1), \quad P_4 = (2, 2).$$

Per vedere se i 4 punti sono in posizione generale, occorre considerare le loro coordinate omogenee attraverso l'immersione $j_0 : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ e quindi

$$P_1 = [1, 1, 0], \quad P_2 = [1, 0, 0], \quad P_3 = [1, 0, 1], \quad P_4 = [1, 2, 2].$$

Tali punti sono in posizione generale se e solo se tutti i minori 3×3 della matrice M sono non degeneri, dove

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Questo accade, come si verifica facilmente. Dunque \mathcal{F} è un fascio generale di coniche. In particolare, è un fascio non degenero e contiene esattamente 3 coniche degeneri distinte. Possiamo sceglierne 2 come generatori; ad esempio

$$C := r_{12} \cup r_{34}, \quad D := r_{13} \cup r_{24}.$$

Si calcolano immediatamente:

$$C : y(x - 2y + 2) = 0, \quad D : (x + y - 1)(x - y) = 0$$

dunque

$$\mathcal{F} : \lambda y(x - 2y + 2) + \mu(x + y - 1)(x - y) = 0.$$

Esempio 9.12.9. Determinare l'equazione in \mathbb{A}^2 della famiglia \mathcal{F} delle coniche osculanti C in P_1 e passanti per P_2 , specificando se \mathcal{F} è un fascio e, in tal caso, di che tipo, dove $P_1 = (0, 2)$, $P_2 = (-1, 0)$ e

$$C : 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0.$$

Poiché $P_2 \in C$ (e C è osculante se stessa in ogni punto), allora $C \in \mathcal{F}$. Questo risulta quindi un fascio osculante di coniche generato, ad esempio, da C e dalla conica degenera $D := r_{12} \cup t$, dove $t = T_{P_1}(C)$.

Posto $f(x, y)$ il polinomio che definisce C , si calcola

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_1} = 8x + 8 \Big|_{P_1} = 8, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_1} = 2y - 4 \Big|_{P_1} = 0,$$

quindi $t : x = 0$. D'altra parte $r_{12} : 2x - y + 2 = 0$ e dunque $D : x(2x - y + 2) = 0$, da cui

$$\mathcal{F} : \quad \lambda(4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4) + \mu x(2x - y + 2) = 0.$$

Per descrivere i fasci degeneri di coniche, iniziamo con due semplici fatti.

Osservazione 9.12.10. Se un fascio \mathcal{F} ha, tra i suoi punti base, 3 punti distinti allineati, allora è un fascio degenere. Infatti, supponiamo che $C \in \mathcal{F}$ sia una conica non degenere e sia r la retta contenente 3 punti base distinti P_1, P_2, P_3 . Allora $(C \cap r) \supseteq \{P_1, P_2, P_3\}$, ma questo è impossibile per la Proposizione 9.9.19. Dunque non esiste una conica non degenere in \mathcal{F} .

Osservazione 9.12.11. Non è sufficiente che i generatori di \mathcal{F} siano due coniche degeneri affinché \mathcal{F} sia un fascio degenere. Ad esempio, un fascio generale di coniche ha 3 coniche degeneri distinte, dunque si possono scegliere 2 di queste per generarlo. Tuttavia è una condizione necessaria. Vedremo che due coniche degeneri generano un fascio degenere o non degenere a seconda della posizione dei loro punti doppi.

Nel successivo Teorema, denotiamo con \mathcal{G}_P il fascio di rette di sostegno P .

Teorema 9.12.12. *Sia \mathcal{F} un fascio degenere di coniche generato da due coniche semplicemente degeneri*

$$C_1 := r_1 \cup s_1, \quad C_2 := r_2 \cup s_2$$

e siano

$$P_1 := r_1 \cap s_1, \quad P_2 := r_2 \cap s_2$$

i rispettivi punti doppi. Allora si ha uno e uno solo dei seguenti casi:

- i) C_1 e C_2 hanno una componente in comune, per esempio $r_1 = r_2$. In tal caso, $\Gamma \in \mathcal{F}$ se e solo se $\Gamma = r_1 \cup t$ dove $t \in \mathcal{G}_Q$ e $Q := s_1 \cap s_2$. Inoltre i punti base di \mathcal{F} sono tutti e soli i punti di r_1 e il punto Q .
- ii) C_1 e C_2 non hanno componenti in comune e $P_1 = P_2$. In tal caso, se $\Gamma \in \mathcal{F}$ allora Γ è unione di due rette appartenenti a \mathcal{G}_{P_1} . Inoltre \mathcal{F} ha come unico punto base P_1 , contato 4 volte.

Si presentano i seguenti casi:

(a) $P_1 \notin C_2$ e $P_2 \notin C_1$. In questo caso C_1 e C_2 si intersecano in 4 punti in posizione generale, pertanto \mathcal{F} è un fascio generale di coniche; in particolare è non degenere, contro l'ipotesi.

(b) $P_1 \notin C_2$ e $P_2 \in C_1$. In questo caso P_2 appartiene a una sola delle componenti di C_1 , ad esempio $P_2 \in r_1$. In questo caso C_1 e C_2 si intersecano in 3 punti non allineati dei quali P_2 è contato due volte, pertanto \mathcal{F} è un fascio tangente di coniche, tutte aventi comune tangente r_1 nel punto P_2 (vedi Proposizione 9.12.3). In particolare \mathcal{F} è non degenere, contro l'ipotesi.

(c) $P_1 \in C_2$ e $P_2 \in C_1$, ma $P_1 \neq P_2$. In questo caso la retta per P_1 e P_2 è una componente comune di C_1 e C_2 (retta base). Pertanto $C_1 = r \cup s_1$ e $C_2 = r \cup s_2$. In un opportuno sistema di riferimento si ha dunque

$$C_1 : x(a_1x + b_1y + c_1) = 0, \quad C_2 : x(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

e quindi

$$\mathcal{F} : \lambda x(a_1x + b_1y + c_1) + \mu x(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

Dunque la generica conica di \mathcal{F} ha equazione

$$x [\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2)] = 0$$

e quindi è l'unione della retta base $x = 0$ e di una retta che varia nel fascio di rette generato da s_1 e s_2 , ovvero in \mathcal{G}_Q .

(d) $P_1 = P_2$. Consideriamo un sistema di riferimento in cui $P_1 = O = (0, 0)$, $r_1 : x = 0$ e $r_2 : y = 0$. Allora \mathcal{F} ha equazione

$$\mathcal{F} : \lambda x(a_1x + b_1y) + \mu y(a_2x + b_2y) = 0.$$

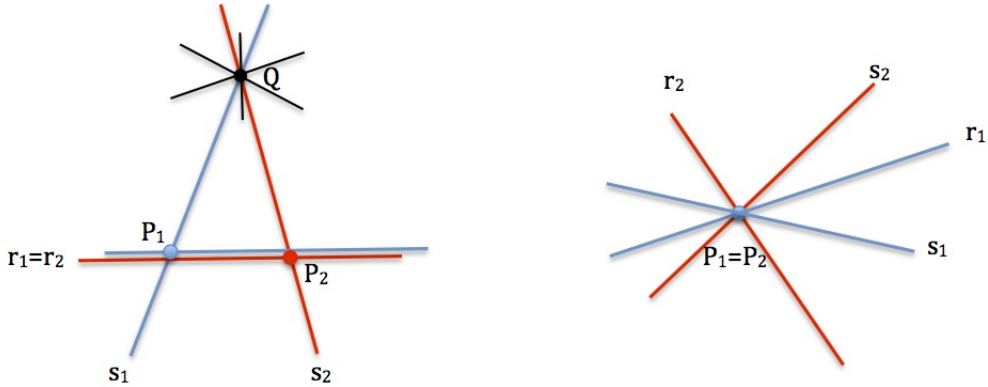
La sua generica conica è

$$C_{\lambda, \mu} : \lambda a_1 x^2 + \lambda b_1 xy + \mu a_2 xy + \mu b_2 y^2 = 0$$

la cui matrice associata è

$$B_{\lambda, \mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda a_1 & (\lambda b_1 + \mu a_2)/2 \\ 0 & (\lambda b_1 + \mu a_2)/2 & \mu b_2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $C_{\lambda, \mu}$ è degenere per ogni $[\lambda, \mu]$. Con un semplice calcolo, si verifica che $O = (0, 0)$ è punto doppio per ogni conica $C_{\lambda, \mu}$, dunque le sue componenti variano nel fascio di rette di centro O , come volevamo.



Esempio 9.12.13. Determinare l'equazione della famiglia \mathcal{F} delle coniche di \mathbb{A}^2 per P_1, P_2, P_3, P_4 , specificando se \mathcal{F} è un fascio e, in tal caso, di che tipo, dove

$$P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (0, 0), \quad P_3 = (0, 1), \quad P_4 = (-2, 0).$$

Si procede come nell'Esempio 9.12.8, considerando la matrice le cui righe sono le coordinate omogenee dei 4 punti e osservando che tali punti sono in posizione generale se e solo se tutti i minori 3×3 della matrice M sono non degeneri, dove

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso, invece, il minore costituito dalle righe diverse dalla terza è degenero. Questo significa che i punti P_1, P_2, P_4 sono allineati: infatti appartengono tutti alla retta $r : y = 0$. Pertanto ogni conica C contenente tali punti deve contenere la retta r . Quindi $C = r \cup s$, dove s è una qualunque retta per P_3 . Le coniche richieste costituiscono dunque un fascio degenero avente r come retta base e P_3 come punto base.

A questo punto si scrive l'equazione del fascio di rette di sostegno P_3 :

$$\mathcal{F}_{P_3} : \quad \lambda x + \mu(y - 1) = 0$$

da cui il fascio di coniche richiesto ha equazione

$$y(\lambda x + \mu(y - 1)) = 0.$$

Teorema 9.12.14. *Sia \mathcal{F} un fascio degenere di coniche generato da due coniche degeneri C e D delle quali almeno $D = t^2$ è doppiamente degenere. Allora si ha uno e uno solo dei seguenti casi:*

i) $C = r \cup s$ è semplicemente degenere e $P := r \cap s$. Allora $P \in D$. Inoltre - se C e D non hanno componenti comuni allora ogni conica $\Gamma \in \mathcal{F}$ è unione di due rette appartenenti a \mathcal{G}_P e \mathcal{F} ha come unico punto base P , contato 4 volte. - se C e D hanno una componente comune, ad esempio $C = r \cup t$, allora ogni conica $\Gamma \in \mathcal{F}$ è unione t e di una retta appartenente a \mathcal{G}_P . In particolare, \mathcal{F} ha t come retta base.

ii) Anche $C = r^2$ è doppiamente degenere. Allora, posto $Q := t \cap r$, se $\Gamma \in \mathcal{F}$ allora Γ è unione di due rette appartenenti a \mathcal{G}_Q e \mathcal{F} ha come unico punto base Q , contato 4 volte.

Per esercizio (analogo al precedente teorema).