Analisi 2

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Matematica

a.a. 2025/2026

Parte I - continuità e limiti

1 Premesse: lo spazio $\mathbb{R}^N$

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^N$, costituito dalle $N-$uple $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, dove x_1, x_2, $\ldots$,x_N sono numeri reali. Indicheremo i suoi elementi con i simboli

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'', \ldots$$

Cominciamo con l'introdurre un'operazione di addizione in $\mathbb{R}^N$: dati due elementi $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_N)$, si definisce $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'$ in questo modo:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_N + x'_N)\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:
a) (associativa) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') + \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'')\,;$
b) esiste un "elemento neutro" $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$: si ha $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x}$;
c) ogni elemento $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ ha un "opposto" $(-\boldsymbol{x}) = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_N)$: si ha $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}\,;$
d) (commutativa) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}\,.$

Pertanto, $(\mathbb{R}^N, +)$ è un "gruppo abeliano". Normalmente, si usa scrivere $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$ per indicare $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}')$.

Definiamo ora la moltiplicazione di un elemento di $\mathbb{R}^N$ per un numero reale: considerati $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e un numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisce $\alpha\boldsymbol{x}$ in questo modo:

$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_N)\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:
a) $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}\,;$

b) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} = (\alpha\boldsymbol{x}) + (\beta\boldsymbol{x})$;
c) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = (\alpha\boldsymbol{x}) + (\alpha\boldsymbol{x}')$;
d) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Pertanto, con le operazioni introdotte, $\mathbb{R}^N$ è uno "spazio vettoriale". Chiameremo i suoi elementi "vettori"; i numeri reali, in questo ambito, verranno chiamati "scalari".

È utile introdurre il "prodotto scalare" tra due vettori: dati $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_N)$, si definisce il numero reale $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'$ in questo modo:

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}' = \sum_{k=1}^{N} x_k x'_k \,.$$

Il prodotto scalare è spesso indicato con simboli diversi, quali ad esempio

$$\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}'\rangle\,,\quad \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle\,,\quad (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}')\,,\quad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:
a) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \geq 0$;
b) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;
c) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{x}'' = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'') + (\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}'')$;
d) $(\alpha\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}' = \alpha(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')$;
e) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}$;

A partire dal prodotto scalare, possiamo definire la "norma" di un vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} x_k^2}\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:
a) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$;
b) $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;
c) $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|$;
d) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}'\|$.

Per dimostrare la d), abbiamo bisogno della seguente **disuguaglianza di Schwarz**.

Teorema 1 *Presi due vettori* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$, *si ha*

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'| \leq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{x}'\|\,.$$

Dimostrazione. La disuguaglianza è sicuramente verificata se $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$, essendo in tal caso $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}' = 0$ e $\|\boldsymbol{x}'\| = 0$. Supponiamo quindi $\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{0}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$0 \leq \|\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{x}'\|^2 = (\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{x}')\cdot(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{x}') = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\alpha\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}' + \alpha^2\|\boldsymbol{x}'\|^2\,.$$

Prendendo $\alpha = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}'\|^2}\, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'$, si ottiene

$$0 \le \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\frac{1}{\|\boldsymbol{x}'\|^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')^2 + \frac{1}{\|\boldsymbol{x}'\|^4}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')^2\|\boldsymbol{x}'\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \frac{1}{\|\boldsymbol{x}'\|^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')^2\,,$$

da cui la tesi. ■

Nota. La disuguaglianza di Schwarz diventa un'uguaglianza se e solo se i due vettori sono linearmente dipendenti. Infatti, vale sicuramente l'uguaglianza se uno dei due vettori è nullo. Se sono non nulli e $\boldsymbol{x}$ è del tipo $\alpha\boldsymbol{x}'$, si ha

$$|(\alpha\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{x}'| = |\alpha||\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}'| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}'\|^2 = \|\alpha\boldsymbol{x}'\|\|\boldsymbol{x}'\|\,.$$

Viceversa, se sono non nulli e vale l'uguaglianza $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}' = \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{x}'\|$, allora

$$\left\|\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} - \frac{\boldsymbol{x}'}{\|\boldsymbol{x}'\|}\right\|^2 = 1 - 2\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{x}'\|} + 1 = 0\,,$$

per cui $\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} = \frac{\boldsymbol{x}'}{\|\boldsymbol{x}'\|}$. I due vettori hanno la stessa direzione, per cui sono linearmente dipendenti. Analogamente, se $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}' = -\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{x}'\|$, allora succede che $\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} = -\frac{\boldsymbol{x}'}{\|\boldsymbol{x}'\|}$.

Dimostriamo ora la proprietà d) della norma, usando la disuguaglianza di Schwarz:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')\\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}' + \|\boldsymbol{x}'\|^2\\ &\le \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{x}'\| + \|\boldsymbol{x}'\|^2\\ &= (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}'\|)^2\,,\end{aligned}$$

da cui la disuguaglianza cercata.

Notiamo ancora la seguente **identità del parallelogramma**, di semplice verifica:

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{x}'\|^2)\,.$$

Definiamo ora, a partire dalla norma, la "distanza euclidea" tra due vettori $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', \ldots, x_N')$:

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N}(x_k - x_k')^2}\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:

a) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \geq 0\,;$
b) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\,;$
c) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = d(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\,;$
d) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'') \leq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') + d(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')\,.$

Quest'ultima viene spesso chiamata "disuguaglianza triangolare"; la dimostriamo:

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'') &= \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''\| \\ &= \|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') + (\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'')\| \\ &\leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\| + \|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\| \\ &= d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') + d(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')\,. \end{aligned}$$

2 Spazi metrici

Dato un insieme non vuoto E, una funzione $d : E \times E \to \mathbb{R}$ si chiama "distanza" (su E) se soddisfa alle seguenti proprietà:

a) $d(x,x') \geq 0\,;$
b) $d(x,x') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x'\,;$
c) $d(x,x') = d(x',x)\,;$
d) $d(x,x'') \leq d(x,x') + d(x',x'')$

(la disuguaglianza triangolare). L'insieme E, dotato della distanza d, si dice "spazio metrico". I suoi elementi verranno spesso chiamati "punti".

Abbiamo visto che $\mathbb{R}^N$, dotato della distanza euclidea, è uno spazio metrico (nel seguito, parlando dello spazio metrico $\mathbb{R}^N$, se non altrimenti specificato sottintenderemo che la distanza sia sempre quella euclidea). Nel caso $N = 1$, abbiamo la distanza usuale su $\mathbb{R}$: $d(\alpha,\beta) = |\alpha - \beta|$.

È però possibile considerare diverse distanze su uno stesso insieme. Ad esempio, presi due vettori $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$, la funzione

$$d_*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \sum_{k=1}^{N} |x_k - x'_k|$$

rappresenta anch'essa una distanza in $\mathbb{R}^N$. Lo stesso dicasi per la funzione

$$d_{**}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \max\{|x_k - x'_k| : k = 1, 2, \dots, N\}\,.$$

Oppure, si può definire la seguente:

$$\hat{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \begin{cases} 0 & \text{se } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\,, \\ 1 & \text{se } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'\,. \end{cases}$$

Anche questa è una distanza, per quanto strana possa sembrare.

Dati $x_0 \in E$ e un numero $\rho > 0$, definiamo la palla aperta di centro x_0 e raggio ρ:

$$B(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) < \rho\};$$

analogamente definiamo la palla chiusa

$$\overline{B}(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) \leq \rho\},$$

e la sfera

$$S(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) = \rho\}.$$

In $\mathbb{R}$, ogni intervallo[1] $]a, b[$ è una palla aperta e ogni intervallo $[a, b]$ è una palla chiusa: si ha

$$]a, b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right), \quad [a, b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$$

Una sfera in $\mathbb{R}$ è quindi costituita da due soli punti.

In $\mathbb{R}^2$, con la distanza euclidea, una palla è un cerchio: la palla aperta non comprende i punti della circonferenza esterna, la palla chiusa sì. Una sfera è semplicemente una circonferenza.

Se in $\mathbb{R}^2$ consideriamo la distanza d_* definita in precedenza, una palla sarà un quadrato, con i lati inclinati di 45 gradi, avente x_0 come punto centrale. Una sfera sarà il perimetro di tale quadrato. Se invece consideriamo la distanza d_{**}, la palla sarà ancora un quadrato, ma con i lati paralleli agli assi cartesiani.

Se invece prendiamo la distanza $\hat{d}$, su un qualsiasi insieme E, allora

$$B(x_0, \rho) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } \rho \leq 1, \\ E & \text{se } \rho > 1, \end{cases} \qquad \overline{B}(x_0, \rho) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } \rho < 1, \\ E & \text{se } \rho \geq 1, \end{cases}$$

per cui

$$S(x_0, \rho) = \begin{cases} E \setminus \{x_0\} & \text{se } \rho = 1, \\ \emptyset & \text{se } \rho \neq 1. \end{cases}$$

Un insieme $U \subseteq E$ si dice "intorno" di un punto x_0 se esiste un $\rho > 0$ tale che $B(x_0, \rho) \subseteq U$; in tal caso, il punto x_0 si dice "interno" ad U. L'insieme dei punti interni ad U si chiama "l'interno" di U e si denota con $\mathring{U}$. Chiaramente, si ha sempre $\mathring{U} \subseteq U$. Si dice che U è un "insieme aperto" se coincide con il suo interno, ossia se $\mathring{U} = U$.

Teorema 2 *Una palla aperta è un insieme aperto.*

[1] Usiamo qui le notazioni $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ e $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

Dimostrazione. Sia $B(x_0, \rho)$ la palla in questione; prendiamo un $x_1 \in B(x_0, \rho)$. Scelto $r > 0$ tale che $r \leq \rho - d(x_0, x_1)$, si ha che $B(x_1, r) \subseteq B(x_0, \rho)$; infatti, se $x \in B(x_1, r)$, allora

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) < r + d(x_1, x_0) \leq \rho\,,$$

per cui $x \in B(x_0, \rho)$. Abbiamo quindi dimostrato che ogni punto x_1 di $B(x_0, \rho)$ è interno a $B(x_0, \rho)$. ■

Consideriamo ora tre esempi particolari: nel primo, l'insieme U coincide con E; nel secondo, U è l'insieme vuoto; nel terzo, esso è costituito da un unico punto.

Ogni punto di E è interno all'insieme E stesso, in quanto ogni palla è per definizione contenuta in E. Quindi, l'interno di E coincide con tutto E, ossia $\mathring{E} = E$. Questo significa che E è un insieme aperto.

L'insieme vuoto non può avere punti interni. Quindi, l'interno di $\emptyset$, non avendo elementi, è vuoto. In altri termini, $\mathring{\emptyset} = \emptyset$, il che significa che $\emptyset$ è anch'esso un insieme aperto.

L'insieme $U = \{x_0\}$, costituito da un unico punto, in generale non è un insieme aperto (ad esempio in $\mathbb{R}^N$ con la distanza euclidea), ma può esserlo in casi particolari, quando x_0 è un "punto isolato" di E. Ad esempio, se si considera la distanza $\hat{d}$, oppure in $\mathbb{N}$, tutti i punti sono isolati.

Teorema 3 *L'interno di un insieme è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Se $\mathring{U}$ è vuoto, la tesi è sicuramente vera. Supponiamo allora che $\mathring{U}$ sia non vuoto. Sia $x_1 \in \mathring{U}$. Allora esiste un $\rho > 0$ tale che $B(x_1, \rho) \subseteq U$. Se proviamo che $B(x_1, \rho) \subseteq \mathring{U}$ la dimostrazione sarà completa, in quanto avremo dimostrato che ogni punto x_1 di $\mathring{U}$ è interno a $\mathring{U}$.

Per dimostrare che $B(x_1, \rho) \subseteq \mathring{U}$, sia x un elemento di $B(x_1, \rho)$. Siccome $B(x_1, \rho)$ è un insieme aperto, esiste un $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq B(x_1, \rho)$. Allora $B(x, r) \subseteq U$, per cui x appartiene a $\mathring{U}$. La dimostrazione è completa. ■

Si può dimostrare la seguente implicazione:

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad \mathring{U}_1 \subseteq \mathring{U}_2\,.$$

Da essa segue che $\mathring{U}$ è il più grande insieme aperto contenuto in U: se A è un aperto e $A \subseteq U$, allora $A \subseteq \mathring{U}$.

Diremo che il punto x_0 è "aderente" all'insieme U se per ogni $\rho > 0$ si ha che $B(x_0, \rho) \cap U \neq \emptyset$. L'insieme dei punti aderenti ad U si chiama "la chiusura" di U e si denota con $\overline{U}$. Chiaramente, si ha sempre $U \subseteq \overline{U}$. Si dice che U è un "insieme chiuso" se coincide con la sua chiusura, ossia se $U = \overline{U}$.

Teorema 4 *Una palla chiusa è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Sia $U = \overline{B}(x_0, \rho)$ la palla in questione; voglio dimostrare che $\overline{U} \subseteq U$. A tal fine vedremo che $\mathcal{C}U \subseteq \mathcal{C}\overline{U}$. [2] Prendiamo un $x_1 \in \mathcal{C}U$, ossia $x_1 \notin \overline{B}(x_0, \rho)$. Scelto $r > 0$ tale che $r \leq d(x_0, x_1) - \rho$, si ha che $B(x_1, r) \cap \overline{B}(x_0, \rho) = \emptyset$; infatti, se per assurdo esistesse un $x \in B(x_1, r) \cap \overline{B}(x_0, \rho)$, allora si avrebbe

$$d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x) + d(x, x_1) < \rho + r \,,$$

in contrasto con la scelta fatta per r. Quindi, $x_1 \notin \overline{U}$, ossia $x_1 \in \mathcal{C}\overline{U}$. ■

Essendo E l'insieme universo, ogni punto aderente ad E deve comunque appartenere ad E stesso. Quindi, la chiusura di E coincide con E, ossia $\overline{E} = E$. Questo significa che E è un insieme chiuso.

Notiamo che non esiste alcun punto aderente all'insieme $\emptyset$. Infatti, qualsiasi sia il punto x_0, per ogni $\rho > 0$ si ha che $B(x_0, \rho) \cap \emptyset = \emptyset$. Quindi, la chiusura di $\emptyset$, non avendo elementi, è vuota. In altri termini, $\overline{\emptyset} = \emptyset$, il che significa che $\emptyset$ è un insieme chiuso.

L'insieme $U = \{x_0\}$, costituito da un unico punto, è sempre un insieme chiuso. Infatti, preso un $x_1 \notin U$, scegliendo $\rho > 0$ tale che $\rho < d(x_0, x_1)$ si ha che $B(x_1, \rho) \cap U = \emptyset$, per cui x_1 non è aderente ad U.

Teorema 5 *La chiusura di un insieme è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Poniamo $V = \overline{U}$. Se $V = E$, la tesi è verificata. Supponiamo quindi che sia $V \neq E$. Sia $x_1 \notin V$. Allora esiste un $\rho > 0$ tale che $B(x_1, \rho) \cap U = \emptyset$. Vediamo che anche $B(x_1, \rho) \cap V = \emptyset$. Infatti, se per assurdo ci fosse un $x \in B(x_1, \rho) \cap V$, essendo $B(x_1, \rho)$ un insieme aperto, esisterebbe un $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq B(x_1, \rho)$. Siccome $x \in V = \overline{U}$, dovrebbe essere $B(x, r) \cap U \neq \emptyset$ e quindi anche $B(x_1, \rho) \cap U \neq \emptyset$, in contraddizione con quanto sopra. Quindi, nessun punto x_1 al di fuori di V può essere aderente a V. In altri termini, V contiene tutti i punti ad esso aderenti, pertanto è chiuso. ■

Si può dimostrare che

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{U}_1 \subseteq \overline{U}_2 \,.$$

Da questa implicazione segue che $\overline{U}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene U: se C è un chiuso e $C \supseteq U$, allora $C \supseteq \overline{U}$.

[2] Denotiamo con $\mathcal{C}U$ il complementare di U in E, ossia l'insieme $E \setminus U$.

Si può dimostrare che l'unione e l'intersezione di due insiemi aperti [chiusi] sono insiemi aperti [chiusi]. Lo stesso vale per un numero finito di insiemi aperti [chiusi]: lo si dimostra per induzione. Se invece si considera un numero infinito di insiemi, la cosa cambia. L'unione di un numero infinito di insiemi aperti è un insieme aperto, l'intersezione in generale non lo è. Ad esempio, in $\mathbb{R}$, prendendo gli aperti

$$A_n = \left]-\frac{1}{n+1}\,,\,\frac{1}{n+1}\right[\,,$$

con $n \in \mathbb{N}$, la loro intersezione è $\{0\}$, che non è un aperto. Analogamente, l'intersezione di un numero infinito di insiemi chiusi è un insieme chiuso, mentre l'unione in generale non lo è. Ad esempio, considerando i chiusi

$$C_n = \left[-1+\frac{1}{n+1}\,,\,1-\frac{1}{n+1}\right]\,,$$

con $n \in \mathbb{N}$, la loro unione è l'intervallo $]-1,1[$, che non è un chiuso.

Cercheremo ora di capire le analogie incontrate tra le nozioni di interno e chiusura di un insieme, e quelle di insieme aperto e chiuso.

Teorema 6 *Valgono le seguenti relazioni:*

$$\overline{\mathcal{C}U} = \mathcal{C}\mathring{U}\,, \qquad (\mathcal{C}\mathring{U}) = \mathcal{C}\overline{U}\,.$$

Dimostrazione. Vediamo la prima uguaglianza. Se $U = E$, allora $\mathcal{C}U = \emptyset$, per cui $\overline{\mathcal{C}U} = \emptyset$; d'altra parte, $\mathring{U} = E$, per cui $\mathcal{C}\mathring{U} = \emptyset$. L'uguaglianza è così verificata in questo caso. Supponiamo ora che sia $U \neq E$, per cui $\mathcal{C}U \neq \emptyset$. Si ha:

$$\begin{aligned} x \in \overline{\mathcal{C}U} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \rho > 0 \quad B(x,\rho) \cap \mathcal{C}U \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \rho > 0 \quad B(x,\rho) \not\subseteq U \\ &\Leftrightarrow \quad x \notin \mathring{U} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{C}\mathring{U}. \end{aligned}$$

Questo dimostra la prima uguaglianza. Possiamo ora usarla per dedurne la seguente:

$$\mathcal{C}(\mathcal{C}\mathring{U}) = \overline{\mathcal{C}(\mathcal{C}U)} = \overline{U}\,.$$

Passando ai complementari, si ottiene la seconda uguaglianza. ∎

Abbiamo quindi che

$$\overline{U} = \mathcal{C}(\mathcal{C}\mathring{U})\,, \qquad \mathring{U} = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{C}U})\,.$$

Come immediato corollario, abbiamo il seguente.

Teorema 7 *Un insieme è aperto [chiuso] se e solo se il suo complementare è chiuso [aperto].*

Dimostrazione. Se U è aperto, $U = \mathring{U}$ e quindi

$$\overline{\mathcal{C}U} = \mathcal{C}\mathring{U} = \mathcal{C}U\,,$$

per cui $\mathcal{C}U$ è chiuso.

Se U è chiuso, $U = \overline{U}$ e quindi

$$(\mathring{\mathcal{C}U}) = \mathcal{C}\overline{U} = \mathcal{C}U\,,$$

per cui $\mathcal{C}U$ è aperto. ■

Si definisce la "frontiera" di un insieme U come differenza tra la sua chiusura e il suo interno:

$$\partial U = \overline{U} \setminus \mathring{U}\,.$$

Ad esempio, in $\mathbb{R}$ abbiamo:

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\,, \quad \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset\,, \quad \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}\,.$$

È bene essere prudenti su alcune conclusioni che possono esserci suggerite dalla nostra intuizione basata sulla distanza euclidea. Ad esempio, le uguaglianze

$$\overline{B(\boldsymbol{x}_0,\rho)} = \overline{B}(\boldsymbol{x}_0,\rho)\,, \quad \partial B(\boldsymbol{x}_0,\rho) = S(\boldsymbol{x}_0,\rho)\,.$$

valgono sicuramente in $\mathbb{R}^N$ con la distanza euclidea, ma possono non valere in altri casi. Prendiamo ad esempio la distanza $\hat{d}$ considerata sopra. Allora $B(\boldsymbol{x}_0,1) = \{\boldsymbol{x}_0\}$, che è un insieme chiuso, e $\overline{B}(\boldsymbol{x}_0,1) = E$ per cui $\overline{B(\boldsymbol{x}_0,1)} \neq \overline{B}(\boldsymbol{x}_0,1)$. Inoltre, $\partial B(\boldsymbol{x}_0,1) = \emptyset$, mentre $S(\boldsymbol{x}_0,1) = E \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$, per cui $\partial B(\boldsymbol{x}_0,1) \neq S(\boldsymbol{x}_0,1)$.

Nota. Nel seguito, qualora non specificato altrimenti, quando parleremo di $\mathbb{R}^N$ come spazio metrico o normato sarà sempre sottinteso che la distanza e la norma su di esso considerate siano quelle euclidee.

3 Funzioni continue

Intuitivamente, una funzione f è "continua" se $f(x)$ varia gradualmente al variare di x nel dominio, cioè quando non si verificano variazioni brusche nei valori della funzione. Per rendere rigorosa questa idea intuitiva, sarà conveniente focalizzare la nostra attenzione fissando un x_0 nel dominio e provando a precisare cosa intendiamo per

$$f \text{ è "continua" in } x_0\,.$$

Procederemo per gradi.

Primo tentativo. *Diremo che f è "continua" in x_0 quando si verifica la cosa seguente:*

$$\textit{se } x \textit{ è vicino a } x_0, \textit{ allora } f(x) \textit{ è vicino a } f(x_0).$$

Osserviamo subito che, sebbene l'idea di continuità vi sia già abbastanza ben formulata, la proposizione precedente non è una definizione accettabile, perché la parola "vicino", che vi compare due volte, non ha un significato preciso. Innanzitutto, per poter misurare quanto vicino sia x a x_0 e quanto vicino sia $f(x)$ a $f(x_0)$, abbiamo bisogno di introdurre delle distanze. Più precisamente, dovremo supporre che il dominio e il codominio della funzione siano due spazi metrici.

Siano quindi E ed F due spazi metrici, con le loro distanze d_E e d_F, rispettivamente. Sia x_0 un punto di E e $f : E \to F$ una funzione. Possiamo riformulare il tentativo di definizione precedente come segue.

Secondo tentativo. *Diremo che f è "continua" in x_0 quando si verifica la cosa seguente:*

$$\textit{se la distanza } d_E(x, x_0) \textit{ è piccola, allora la distanza } d_F(f(x), f(x_0)) \textit{ è piccola.}$$

Ci rendiamo subito conto che il problema riscontrato nel primo tentativo non è stato affatto risolto con questo secondo tentativo, in quanto vi compare ora per due volte la parola "piccola", che non ha un significato preciso. Ci chiediamo allora: *quanto piccola* vogliamo che sia la distanza $d_F(f(x), f(x_0))$? L'idea che abbiamo in mente è che questa distanza possa essere resa piccola quanto si voglia (purché la distanza $d(x, x_0)$ sia sufficientemente piccola, s'intende). Per poterla misurare, introdurremo quindi un numero reale positivo, che chiameremo ε, e chiederemo che sia $d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, qualora $d(x, x_0)$ sia sufficientemente piccola. L'arbitrarietà di tale ε ci permetterà di prenderlo piccolo quanto si voglia.

Terzo tentativo. *Diremo che f è "continua" in x_0 quando si verifica la cosa seguente: preso un qualsiasi numero $\varepsilon > 0$,*

$$\textit{se la distanza } d_E(x, x_0) \textit{ è piccola, allora } d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Adesso la parola "piccola" compare una sola volta, mentre la distanza $d_F(f(x), f(x_0))$ viene semplicemente controllata dal numero ε. Quindi, almeno la seconda parte della proposizione ha ora un significato ben preciso. Potremmo allora cercare di fare altrettanto con la distanza $d(x, x_0)$, introducendo un nuovo numero reale positivo, che chiameremo δ, che la controlli.

Quarto tentativo (quello buono!). *Diremo che f è "continua" in x_0 quando si verifica la cosa seguente: preso un qualsiasi numero $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un numero $\delta > 0$ per cui,*

$$\textit{se } d_E(x, x_0) < \delta, \textit{ allora } d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Quest'ultima proposizione, a differenza delle precedenti, non presenta alcun termine impreciso. Le distanze $d_E(x, x_0)$ e $d_F(f(x), f(x_0))$ sono semplicemente controllate da due numeri positivi δ e ε, rispettivamente. Riscriviamola quindi in modo formale.

Definizione. *Diremo che f è "continua" in x_0 se, comunque preso un numero positivo ε, è possibile trovare un numero positivo δ tale che, se x è un qualsiasi elemento del dominio E che disti da x_0 per meno di δ, allora $f(x)$ dista da $f(x_0)$ per meno di ε. In simboli:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ \forall x \in E \quad d_E(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \,.$$

In questa formulazione, spesso la scrittura "$\forall x \in E$" verrà sottintesa.

Si noti che una o entrambe le disuguaglianze $d_E(x, x_0) < \delta$ e $d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ possono essere sostituite rispettivamente da $d_E(x, x_0) \leq \delta$ e $d_F(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$, ottenendo definizioni che sono tutte tra loro equivalenti. Questo è dovuto al fatto, da un lato, che ε è un *qualunque* numero positivo e, dall'altro lato, che se l'implicazione della definizione vale per un certo numero positivo δ, essa vale a maggior ragione prendendo al posto di quel δ un qualsiasi numero positivo più piccolo.

Una rilettura della definizione di continuità ci mostra che f è continua in x_0 se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \,.$$

Inoltre, è del tutto equivalente considerare una palla chiusa al posto di una palla aperta; risulta inoltre utile la seguente formulazione equivalente, per cui f è continua in x_0 se e solo se:

per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subseteq V$.

Nel caso in cui la funzione f sia continua in ogni punto x_0 del dominio E, diremo che "f è continua su E", o semplicemente "f è continua".

Vediamo ora alcuni esempi.

1) La funzione costante: per un certo $\bar{c} \in F$, si ha che $f(x) = \bar{c}$, per ogni $x \in E$. Essendo $d_F(f(x), f(x_0)) = d_F(\bar{c}, \bar{c}) = 0$ per ogni $x \in E$, tale funzione è chiaramente continua (ogni scelta di $\delta > 0$ va bene).

2) Supponiamo che x_0 sia un "punto isolato" di E: esiste cioè un $\rho > 0$ per cui non ci sono punti di E che distino da x_0 per meno di ρ, tranne x_0 stesso. Vediamo che, in questo caso, qualsiasi funzione $f : E \to F$ risulta continua in x_0. Infatti, dato $\varepsilon > 0$ qualsiasi, prendendo $\delta = \rho$, avremo che $B(x_0, \delta) = \{x_0\}$, per cui $f(B(x_0, \delta)) = \{f(x_0)\} \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$.

3) Siano $E = \mathbb{R}^N$ e $F = \mathbb{R}^N$. Fissato un numero $\alpha \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definita da $f(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}$. Vediamo che è continua. Infatti, se $\alpha = 0$, si tratta della funzione costante con valore $\mathbf{0}$, e sappiamo che tale funzione è continua. Sia ora $\alpha \neq 0$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, essendo

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)\| = \|\alpha\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x}_0\| = \|\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|\,,$$

basta prendere $\delta = \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ per avere l'implicazione

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)\| < \varepsilon\,.$$

4) Siano $E = \mathbb{R}^N$ e $F = \mathbb{R}$. Vediamo che la funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita da $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ è continua su $\mathbb{R}^N$. Questo seguirà facilmente dalla disuguaglianza

$$\Big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{x}'\|\Big| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|\,,$$

che ora dimostriamo. Si ha:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\| &= \|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') + \boldsymbol{x}'\| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| + \|\boldsymbol{x}'\|\,,\\ \|\boldsymbol{x}'\| &= \|(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}\| \le \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}\|\,.\end{aligned}$$

Essendo $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| = \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|$, si ha che

$$\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{x}'\| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| \qquad \text{e} \qquad \|\boldsymbol{x}'\| - \|\boldsymbol{x}\| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|\,,$$

da cui la disuguaglianza cercata. A questo punto, considerato un $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ e fissato un $\varepsilon > 0$, basta prendere $\delta = \varepsilon$ per avere che

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta \;\Rightarrow\; \Big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{x}_0\|\Big| < \varepsilon\,.$$

5) Siano $E = \mathbb{R}$ e $F = \mathbb{R}$, e consideriamo la "funzione segno" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \text{-1} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

Si può vedere che questa funzione è continua in tutti i punti tranne che in $x_0 = 0$. Infatti, se $x_0 \neq 0$, basterà prendere $\delta < |x_0|$ per avere che f è costante sull'intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, quindi continua in x_0. Per vedere che f non è continua in 0, fissiamo un $\varepsilon \in]0, 1[$; per ogni scelta di $\delta > 0$, è possibile trovare un $x \in]-\delta, \delta[$ tale che $|f(x)| = 1$, per cui $|f(x) - f(0)| > \varepsilon$.

6) La “funzione di Dirichlet” $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Questa funzione non è continua, in alcun punto x_0. Infatti, fissato un $\varepsilon \in]0,1[\,$, siccome sia $\mathbb{Q}$ che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$, per ogni x_0 e ogni scelta di $\delta > 0$ ci saranno sicuramente un razionale x' e un irrazionale x'' in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\,$; quindi, a seconda che x_0 sia razionale o irrazionale, si avrà che $|f(x'') - f(x_0)| > \varepsilon$ o $|f(x') - f(x_0)| > \varepsilon$.

Enunciamo ora alcune proprietà delle funzioni continue aventi come codominio $F = \mathbb{R}$.

Teorema 8 *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0, anche $f + g$ lo è.*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la continuità di f e g esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta_1 \;&\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,, \\ d(x, x_0) < \delta_2 \;&\Rightarrow\; |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Quindi, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si ha

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| \le |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon\,.$$

Data l'arbitrarietà di ε, ciò dimostra che $f + g$ è continua in x_0. ■

Teorema 9 *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0, anche $f \cdot g$ lo è.*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Non è restrittivo supporre $\varepsilon \le 1$, in quanto possiamo sempre porre $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, 1\}$ e procedere con ε' al posto di ε. Per la continuità di f e g esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta_1 \;&\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,, \\ d(x, x_0) < \delta_2 \;&\Rightarrow\; |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Notiamo che, essendo $\varepsilon \le 1$, da $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ segue che $|f(x)| < |f(x_0)| + 1$. Quindi, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si ha

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; & |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| = \\ & = |f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)| \\ & \le |f(x)| \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \\ & \le (|f(x_0)| + 1) \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \\ & < (|f(x_0)| + |g(x_0)| + 1)\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Data l'arbitrarietà di ε, ciò dimostra che $f \cdot g$ è continua in x_0. ■

Teorema 10 *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0, anche $f - g$ lo è.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dai due teoremi precedenti e dal fatto che ogni funzione costante è continua, in quanto $f - g = f + (-1) \cdot g$. ■

Teorema 11 (della permanenza del segno) *Se $g : E \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 e $g(x_0) > 0$, allora esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) > 0\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon = g(x_0)$. Per la continuità, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon \;\Rightarrow\; 0 < g(x) < 2g(x_0)\,.$$

■

Naturalmente, se $g(x_0) < 0$, allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) < 0\,.$$

Teorema 12 *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$, anche $\frac{f}{g}$ è continua in x_0.*

Dimostrazione. Si noti che, per la proprietà di permanenza del segno, esiste un $\rho > 0$ tale che il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è definito almeno per tutti gli x di E che distano da x_0 per meno di ρ. Essendo $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, basterà dimostrare che $\frac{1}{g}$ è continua in x_0. Fissiamo $\varepsilon > 0$; possiamo supporre senza perdita di generalità che $\varepsilon < \frac{|g(x_0)|}{2}$. Per la continuità di g, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Ma allora, essendo $\varepsilon < \frac{|g(x_0)|}{2}$, anche

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; |g(x)| > |g(x_0)| - \varepsilon > \frac{|g(x_0)|}{2}\,.$$

Ne segue che

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)\right| = \frac{|g(x_0) - g(x)|}{|g(x)g(x_0)|} < \frac{2}{|g(x_0)|^2}\varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε, questo dimostra che $\frac{1}{g}$ è continua in x_0. ■

Sappiamo da quanto sopra che le funzioni costanti sono continue, così come la funzione $f(x) = x$. Usando i teoremi precedenti, abbiamo quindi che tutte le funzioni polinomiali sono continue, così come le funzioni razionali, definite dal rapporto di due polinomi. Più precisamente, esse sono continue sul loro dominio, ossia sull'insieme dei punti in cui il denominatore non si annulla.

Vediamo ora come si comporta una funzione composta di due funzioni continue.

Teorema 13 *Siano $f : E \to F$ continua in x_0 e $g : F \to G$ continua in $f(x_0)$; allora $g \circ f$ è continua in x_0.*

Dimostrazione. Fissato un intorno W di $[g \circ f](x_0) = g(f(x_0))$, per la continuità di g in $f(x_0)$ esiste un intorno V di $f(x_0)$ tale che $g(V) \subseteq W$. Allora, per la continuità di f in x_0, esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subseteq V$. Ne segue che $[g \circ f](U) \subseteq W$. ■

Concludiamo questa sezione con una caratterizzazione della continuità.

Teorema 14 *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*
(a) $f : E \to F$ è continua;
(b) se A è aperto in F, allora $f^{-1}(A)$ è aperto in E;
(c) se C è chiuso in F, allora $f^{-1}(C)$ è chiuso in E.

Dimostrazione. Dimostriamo che (a) implica (b). Sia $f : E \to F$ continua, e A è aperto in F. Preso un $x_0 \in f^{-1}(A)$, abbiamo che $f(x_0) \in A$. Essendo A aperto, esiste un $\rho > 0$ per cui $B(f(x_0), \rho) \subseteq A$. Siccome f è continua in x_0, esiste un $\delta > 0$ tale che $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \rho)$ (abbiamo preso $\varepsilon = \rho$). Ne segue che $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \rho)) \subseteq f^{-1}(A)$, per cui x_0 è interno a $f^{-1}(A)$. Abbiamo così dimostrato che ogni $x_0 \in f^{-1}(A)$ è interno a $f^{-1}(A)$, per cui $f^{-1}(A)$ è aperto.

Dimostriamo che (b) implica (a). Consideriamo un $x_0 \in E$, fissiamo un $\varepsilon > 0$, e poniamo $A = B(f(x_0), \varepsilon)$, che è un aperto in F. Se vale la (b), avremo che $f^{-1}(A)$ è un aperto in E, che contiene x_0. Pertanto, esiste un $\delta > 0$ tale che $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(A)$, il che significa che $f(B(x_0, \delta)) \subseteq A = B(f(x_0), \varepsilon)$. La continuità di f in x_0 è così dimostrata.

Dimostriamo che (b) implica (c). Sia C un chiuso in F, e sia $A = \mathcal{C}C$, il complementare di C. Abbiamo che A è aperto in F per cui, se vale (b), $f^{-1}(A)$ è aperto in E. Ma $f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathcal{C}C) = \mathcal{C}f^{-1}(C)$, per cui $f^{-1}(C)$ è chiuso.

In modo del tutto analogo si dimostra che (c) implica (b), per cui il teorema è dimostrato. ■

4 La nozione di limite

Consideriamo due spazi metrici E, F, un punto x_0 di E e una funzione

$$f : E \to F\,, \qquad \text{oppure} \qquad f : E \setminus \{x_0\} \to F\,,$$

non necessariamente definita in x_0.

Definizione. *Se esiste un $l \in F$ tale che la funzione $\tilde{f} : E \to F$, definita da*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0\,, \\ l & \text{se } x = x_0\,, \end{cases}$$

risulti continua in x_0, si dice che l è il "limite di f in x_0", o anche "limite di $f(x)$ per x che tende a x_0" e si scrive

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x)\,.$$

In altri termini, si ha che l è il limite di f in x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \; \forall x \in E \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(x), l) < \varepsilon\,,$$

o equivalentemente,

$$\forall V, \text{ intorno di } l \quad \exists U, \text{ intorno di } x_0 : \quad f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V.$$

Talvolta si scrive anche $f(x) \to l$ per $x \to x_0$.

Sappiamo che, se x_0 è un punto isolato, ogni funzione risulterà continua in x_0. Il problema non presenta pertanto alcun interesse in questo caso. Supporremo quindi che x_0 non sia un punto isolato, ossia che x_0 sia un "punto di accumulazione" di E: ogni intorno di x_0 contiene punti di E distinti da x_0 stesso.[3] Nel seguito, supporremo sempre che x_0 sia un punto di accumulazione di E.

Per cominciare, verifichiamo l'unicità del limite.

Teorema 15 *Se esiste, il limite di f in x_0 è unico.*

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo per assurdo che ce ne siano due diversi, l e l'. Prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{2} d(l, l')$. Allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(x), l) < \varepsilon\,,$$

[3] Un semplice ragionamento mostra che, in questo caso, ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di E. Trovatone uno, x_1, si prende un intorno di x_0 che non lo contenga, nel quale se ne può trovare un secondo, x_2, e così via...

ed esiste un $\delta' > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta' \;\Rightarrow\; d(f(x), l') < \varepsilon \,.$$

Sia $x \neq x_0$ tale che $d(x, x_0) < \delta$ e $d(x, x_0) < \delta'$ (tale x esiste perché x_0 è di accumulazione). Allora

$$d(l', l) \leq d(l, f(x)) + d(f(x), l') < 2\varepsilon = d(l', l) \,,$$

una contraddizione. ■

Il seguente teorema è una riformulazione del legame stretto che intercorre tra i concetti di limite e di continuità.

Teorema 16 *Considerata la funzione $f : E \to F$, si ha che*

$$f \text{ è continua in } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \,.$$

Dimostrazione. In questo caso, si ha che la funzione $\tilde{f}$ coincide con f. ■

Un'osservazione generale, che potrebbe essere utile in seguito: si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} d(f(x), l) = 0 \,.$$

Esempi. 1. Cominciamo con la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \sin_T \left(\frac{1}{x} \right) \,.$$

Se $x_0 = 0$, il limite di f non esiste, perchè in ogni intorno di 0 ci sono valori di x per cui $f(x) = 1$ e valori di x per cui $f(x) = -1$.

2. Dimostriamo invece che

$$\lim_{x \to 0} \; x \sin_T \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \,.$$

Per far questo, è utile osservare che

$$\left| x \sin_T \left(\frac{1}{x} \right) \right| \leq |x| \,, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,.$$

Ecco allora che, fissato $\varepsilon > 0$, basta prendere $\delta = \varepsilon$ per avere che

$$0 < |x - 0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - 0| < \varepsilon \,.$$

Iniziamo a vedere le proprietà dei limiti che vengono direttamente ereditate dalle funzioni continue. Nei due teoremi seguenti, con relativo corollario, le funzioni f e g sono definite su E o su $E \setminus \{x_0\}$, indifferentemente, e hanno valori in $F = \mathbb{R}$.

Teorema 17 (della permanenza del segno) *Se*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) > 0\,,$$

allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) > 0\,.$$

Analogamente, se

$$\lim_{x\to x_0} g(x) < 0\,,$$

allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) < 0\,.$$

Corollario 18 *Se $g(x) \leq 0$ per ogni x in un intorno di x_0, allora, qualora il limite esista, si ha*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \leq 0\,.$$

Analogamente, se $g(x) \geq 0$ per ogni x in un intorno di x_0, allora, qualora il limite esista, si ha

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \geq 0\,.$$

Naturalmente, si hanno enunciati analoghi qualora g sia di segno opposto.

Teorema 19 *Se*

$$l_1 = \lim_{x\to x_0} f(x)\,, \quad l_2 = \lim_{x\to x_0} g(x)\,,$$

allora

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2\,,\\
&\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = l_1 - l_2\,,\\
&\lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = l_1 l_2\,;
\end{aligned}$$

se $l_2 \neq 0$,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}\,.$$

Consideriamo ora il caso in cui E è uno spazio metrico qualunque ed $F = \mathbb{R}$. Risulterà talvolta utile il seguente "teorema dei due carabinieri".

Teorema 20 *Supponiamo di avere due funzioni f_1, f_2 per cui*

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = l\,.$$

Se $f : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ è tale che, per ogni x,

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)\,,$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che

$$\begin{aligned} 0 < d(x, x_0) < \delta_1 \;&\Rightarrow\; l - \varepsilon < f_1(x) < l + \varepsilon\,, \\ 0 < d(x, x_0) < \delta_2 \;&\Rightarrow\; l - \varepsilon < f_2(x) < l + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, allora

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; l - \varepsilon < f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) < l + \varepsilon\,,$$

il che dimostra la tesi. ■

Corollario 21 *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0\,,$$

ed esiste un $C > 0$ tale che $|g(x)| \leq C$ per ogni x, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Si ha

$$-C|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq C|f(x)|\,,$$

e il risultato segue dal teorema precedente, tenuto conto che si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0\,,$$

prendendo $f_1(x) = -C|f(x)|$ e $f_2(x) = C|f(x)|$. ■

5 Cambiamento di variabile nel limite

Consideriamo ora una funzione composta $g \circ f$. Abbiamo due possibili situazioni.

Teorema 22 *Sia $f : E \to F$, oppure $f : E \setminus \{x_0\} \to F$, tale che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,.$$

Se $g : F \to G$ è continua in l, allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(l)\,.$$

In altri termini,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))\,.$$

Dimostrazione. Riguardando la definizione di limite, si ha che $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ ivi definita è continua in x_0 e g è continua in $l = \tilde{f}(x_0)$. Pertanto, $g \circ \tilde{f}$ è continua in x_0, da cui

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{x \to x_0} g(\tilde{f}(x)) = g(\tilde{f}(x_0)) = g(l)\,.$$

■

Teorema 23 *Sia $f : E \to F$, oppure $f : E \setminus \{x_0\} \to F$, tale che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,.$$

Supponiamo che l sia un punto di accumulazione di F e che la funzione

$$g : F \to G\,, \qquad \textit{oppure} \qquad g : F \setminus \{l\} \to G\,,$$

non necessariamente definita in l, sia tale che

$$\lim_{y \to l} g(y) = L\,.$$

Se $f(x) \neq l$ per ogni $x \in E \setminus \{x_0\}$, allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo nuovamente la funzione $\tilde{f} : E \to F$, continua in x_0 con $\tilde{f}(x_0) = l$. Analogamente, consideriamo la funzione $\tilde{g} : F \to G$ così definita:

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} g(y) & \text{se } y \neq l\,, \\ L & \text{se } y = l\,. \end{cases}$$

Essa è continua in l con $\tilde{g}(l) = L$. Consideriamo la funzione composta $\tilde{g} \circ \tilde{f}$, che per quanto sopra è continua in x_0 con $\tilde{g}(\tilde{f}(x_0)) = \tilde{g}(l) = L$. Essendo $f(x) \neq l$ per ogni x, si ha che, per $x \in E \setminus \{x_0\}$,

$$g(f(x)) = \tilde{g}(f(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(x)),$$

e pertanto,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{x \to x_0} \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(x_0)) = L.$$

■

Alcune considerazioni sull'ultimo teorema dimostrato. Si noti che la sua conclusione si riassume con la formula

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x)} g(y).$$

Spesso si dice che si è operato il "cambio di variabile $y = f(x)$". Riguardando inoltre le ipotesi dello stesso teorema, si vede subito che è sufficiente richiedere che sia $f(x) \neq l$ per gli x tali che $0 < d(x, x_0) < \delta$. Ciò è dovuto al fatto che la nozione di limite è, in un certo senso, di tipo "locale". Questa osservazione vale in generale e verrà spesso usata in seguito.

Esempi. 1. Dimostriamo che

$$\lim_{x \to 0} \cos\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1.$$

In effetti, se $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = x \sin(1/x)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $g(y) = \cos(y)$, sappiamo che $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, e che g è continua. Per il Teorema 22,

$$\lim_{x \to 0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to 0} f(x)\right) = g(0) = 1.$$

2. Sia ora f come nell'esempio precedente, e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \neq 0, \\ 2 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Si può vedere che, in ogni intorno di $x_0 = 0$, la funzione $g(f(x))$ assume infinite volte il valore 1 e infinite volte il valore 2. Pertanto, in questo caso,

$$\textit{il limite } \lim_{x \to 0} g(f(x)) \textit{ non esiste.}$$

6 Limite delle restrizioni

Finora abbiamo considerato due spazi metrici E, F, un punto x_0 di accumulazione per E e una funzione $f : E \to F$, oppure $f : E \setminus \{x_0\} \to F$. Siccome l'eventuale valore di f in x_0 è ininfluente ai fini dell'esistenza o meno del limite, nonchè del suo effettivo valore, da ora in poi per semplicità considereremo solo il caso $f : E \setminus \{x_0\} \to F$.

Si può verificare che tutte le considerazioni fatte continuano a valere per una funzione $f : \widehat{E} \setminus \{x_0\} \to F$, con $\widehat{E} \subseteq E$, purché x_0 sia di accumulazione per $\widehat{E}$: ogni intorno di x_0 deve contenere infiniti punti di $\widehat{E}$.

Sia ora $f : E \setminus \{x_0\} \to F$, e sia $\widehat{E} \subseteq E$. Possiamo considerare la restrizione di f a $\widehat{E} \setminus \{x_0\}$: è la funzione $\hat{f} : \widehat{E} \setminus \{x_0\} \to F$ i cui valori coincidono con quelli di f: si ha $\hat{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in \widehat{E} \setminus \{x_0\}$. Talvolta si scrive $\hat{f} = f|_{\widehat{E}}$.

Teorema 24 *Se esiste il limite di f in x_0 e x_0 è di accumulazione anche per $\widehat{E}$, allora esiste anche il limite di $\hat{f}$ in x_0 e ha lo stesso valore:*

$$\lim_{x \to x_0} \hat{f}(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Segue immediatamente dalla definizione di $\hat{f}$. ■

Il teorema precedente viene spesso usato per stabilire la non esistenza del limite per la funzione f: a tal scopo, è sufficiente trovare due diverse restrizioni lungo le quali i valori del limite differiscono.

Esempi. 1. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \,,$$

non ha limite per $(x,y) \to (0,0)$, come si vede considerando le restrizioni alle due rette $\{(x,y) : x = 0\}$ e $\{(x,y) : x = y\}$.

2. Più sorprendente è la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \,,$$

per la quale le restrizioni a tutte le rette passanti per $(0,0)$ hanno limite 0, ma la restrizione alla parabola $\{(x,y) : y = x^2\}$ vale costantemente $\frac{1}{2}$.

3. Dimostriamo invece che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0 \,.$$

Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Dopo aver verificato che

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\,(x^2+y^2)\,,$$

risulta naturale prendere $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, per avere che

$$d((x,y),(0,0)) < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon\,.$$

Sia ora $E \subseteq \mathbb{R}$. Possiamo considerare le due restrizioni $\hat{f}_1$ e $\hat{f}_2$ agli insiemi $\widehat{E}_1 = E \cap]-\infty, x_0]$ e $\widehat{E}_2 = E \cap [x_0, +\infty[$. Se x_0 è di accumulazione per $\widehat{E}_1$, chiameremo "limite sinistro" di f, quando esiste, il limite di $\hat{f}_1(x)$ per x che tende a x_0; lo denoteremo con

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)\,.$$

Analogamente, se x_0 è di accumulazione per $\widehat{E}_2$, chiameremo "limite destro" di f, quando esiste, il limite di $\hat{f}_2(x)$ per x che tende a x_0; lo denoteremo con

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)\,.$$

Si può dimostrare il fatto seguente.

Teorema 25 *Se x_0 è di accumulazione per $\widehat{E}_1$ e per $\widehat{E}_2$, il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 esiste se e solo se esistono sia il limite sinistro che il limite destro e hanno lo stesso valore.*

Dimostrazione. Sappiamo già che, se esiste il limite, tutte le restrizioni devono avere lo stesso limite. Viceversa, supponiamo che esistano e coincidano i limiti sinistro e destro, e sia ℓ il loro valore. Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Allora esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che, se $x \in E$,

$$x_0 - \delta_1 < x < x_0 \quad\Rightarrow\quad d(f(x),\ell) < \varepsilon\,,$$
$$x_0 < x < x_0 + \delta_2 \quad\Rightarrow\quad d(f(x),\ell) < \varepsilon\,.$$

Preso $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, abbiamo quindi che, se $x \neq x_0$,

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad\Rightarrow\quad d(f(x),\ell) < \varepsilon\,,$$

per cui il limite di f in x_0 esiste ed è uguale a ℓ. ■

Esempio. La funzione "segno", ossia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \text{-1} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

non ha limite in $x_0 = 0$, essendo che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

7 La retta ampliata

Consideriamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to]-1,1[$, definita da

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}\,.$$

Si tratta di una funzione invertibile, con inversa $\varphi^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}$, definita da

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}\,.$$

Possiamo allora definire una nuova distanza su $\mathbb{R}$:

$$\tilde{d}(x,x') = |\varphi(x) - \varphi(x')|\,.$$

Per la nuova distanza, la palla aperta di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e raggio ρ è data da

$$\widetilde{B}(x_0,\rho) = \{x : |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \rho\}\,.$$

È importante notare che gli intorni di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ rimangono gli stessi di quelli definiti dalla distanza usuale in $\mathbb{R}$. Infatti, essendo φ continua in x_0, per ogni $\rho_1 > 0$ esiste un $\rho_2 > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \rho_2 \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \rho_1\,,$$

ossia

$$]x_0 - \rho_2, x_0 + \rho_2[\subseteq \widetilde{B}(x_0,\rho_1)\,.$$

Viceversa, essendo φ^{-1} continua in $y_0 = \varphi(x_0) \in]-1,1[$, per ogni $\rho_1 > 0$ esiste un $\rho_2 > 0$ tale che

$$|y - y_0| < \rho_2 \quad \Rightarrow \quad y \in]-1,1[\quad \text{e} \quad |\varphi^{-1}(y) - \varphi^{-1}(y_0)| < \rho_1\,;$$

In particolare, prendendo $y = \varphi(x)$,

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \rho_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \in]-1,1[\quad \text{e} \quad |x - x_0| < \rho_1\,,$$

ossia

$$\widetilde{B}(x_0,\rho_2) \subseteq]x_0 - \rho_1, x_0 + \rho_1[\,.$$

Da quanto visto, si deduce che ogni intorno per la nuova distanza è anche intorno per la vecchia distanza, e viceversa.

Introduciamo ora il nuovo insieme $\widetilde{\mathbb{R}}$, definito come unione di $\mathbb{R}$ e di due nuovi elementi, che indicheremo con $-\infty$ e $+\infty$:

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\,.$$

L'insieme $\widetilde{\mathbb{R}}$ risulta totalmente ordinato se si mantiene l'ordine esistente tra coppie di numeri reali e si pone inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < x < +\infty\,.$$

Consideriamo la funzione $\tilde{\varphi} : \widetilde{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$, definita da

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = -\infty\,, \\ \varphi(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}\,, \\ 1 & \text{se } x = +\infty\,. \end{cases}$$

Essa è invertibile, con inversa $\tilde{\varphi}^{-1} : [-1, 1] \to \widetilde{\mathbb{R}}$ definita da

$$\tilde{\varphi}^{-1}(y) = \begin{cases} -\infty & \text{se } y = -1\,, \\ \varphi^{-1}(y) & \text{se } y \in]-1, 1[\,, \\ +\infty & \text{se } y = 1\,. \end{cases}$$

Definiamo, per $x, x' \in \widetilde{\mathbb{R}}$,

$$\tilde{d}(x, x') = |\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(x')|\,;$$

si verifica facilmente che $\tilde{d}$ è una distanza su $\widetilde{\mathbb{R}}$. In questo modo, $\widetilde{\mathbb{R}}$ risulta uno spazio metrico. Vediamo ad esempio cos'è una palla aperta centrata in $+\infty$:

$$B(+\infty, \rho) = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : |\tilde{\varphi}(x) - 1| < \rho\} = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : \tilde{\varphi}(x) > 1 - \rho\}\,,$$

e quindi

$$B(+\infty, \rho) = \begin{cases} \widetilde{\mathbb{R}} & \text{se } \rho > 2\,, \\ ]-\infty, +\infty] & \text{se } \rho = 2\,, \\ ]\varphi^{-1}(1-\rho), +\infty] & \text{se } \rho < 2\,, \end{cases}$$

dove abbiamo usato le notazioni

$$]a, +\infty] = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : x > a\} =]a, +\infty[\cup \{+\infty\}\,.$$

Possiamo quindi affermare che un intorno di $+\infty$ è un insieme che contiene, oltre al punto $+\infty$, un intervallo del tipo $]\alpha, +\infty[$, per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Analogamente, un intorno di $-\infty$ è un insieme che contiene, oltre a $-\infty$, un intervallo del tipo $]-\infty, \beta[$, per un certo $\beta \in \mathbb{R}$.

Vediamo ora come si traduce la definizione di limite in alcuni casi in cui compaiono gli elementi $+\infty$ o $-\infty$. Ad esempio, sia $E \subseteq \mathbb{R}$, F uno spazio metrico e $f : E \to F$ una funzione. Considerando E come sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$, si ha che $+\infty$ è punto di accumulazione per E se e solo se E non è limitato superiormente. In tal caso, si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } l \ \exists U \text{ intorno di } +\infty : \\ &\qquad f(U \cap E) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha \ \Rightarrow \ d(f(x), l) < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Analogamente, se E non è limitato inferiormente, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in F \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \beta \in \mathbb{R} : \quad x < \beta \ \Rightarrow \ d(f(x), l) < \varepsilon\,.$$

Si noti che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} f(-x) = l\,.$$

Vediamo ora il caso in cui E sia uno spazio metrico ed $F = \mathbb{R}$, considerato come sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$. Supponiamo che x_0 sia di accumulazione per E e consideriamo una funzione $f : E \to \mathbb{R}$, o $f : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } +\infty \ \exists U \text{ intorno di } x_0 : \\ &\qquad f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > \alpha\,;\end{aligned}$$

analogamente,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ f(x) < \beta\,.$$

Si noti che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} (-f(x)) = -\infty\,.$$

Le situazioni considerate in precedenza possono talvolta presentarsi assieme. Ad esempio, se $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato superiormente ed $F = \mathbb{R}$, si avrà

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } +\infty \ \exists U \text{ intorno di } +\infty : \\ &\qquad f(U \cap E) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha' \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha' \ \Rightarrow \ f(x) > \alpha\,;\end{aligned}$$

analogamente,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha \;\Rightarrow\; f(x) < \beta \,.$$

Se invece $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato inferiormente ed $F = \mathbb{R}$, si avrà

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \beta \in \mathbb{R} : \quad x < \beta \;\Rightarrow\; f(x) > \alpha \,;$$

analogamente,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \beta' \in \mathbb{R} : \quad x < \beta' \;\Rightarrow\; f(x) < \beta \,.$$

Vediamo ad esempio il caso di una successione $(a_n)_n$ in uno spazio metrico F. Abbiamo quindi una funzione $f : \mathbb{N} \to F$ definita da $f(n) = a_n$. Considerando $\mathbb{N}$ come sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$, si vede che l'unico punto di accumulazione è $+\infty$. Adattando la definizione di limite a questo caso, possiamo scrivere:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in F \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; d(a_n, l) < \varepsilon \,.$$

Pertanto, spesso il limite di una successione si denota semplicemente con $\lim_n a_n$, sottintendendo che $n \to +\infty$.

8 Operazioni con i limiti $+\infty$ e $-\infty$

Qualora i limiti siano $+\infty$ o $-\infty$, non si possono usare i teoremi sulle operazioni con i limiti. A titolo illustrativo, enunciamo alcuni teoremi validi in questi casi. Nel seguito, tutte le funzioni saranno definite in uno spazio metrico E, oppure in $E \setminus \{x_0\}$, con x_0 di accumulazione. Iniziamo con l'addizione:

Teorema 26 *Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

ed esiste un $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni x in un intorno di x_0,

$$g(x) \geq \gamma \,,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty \,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\alpha \in \mathbb{R}$. Considerato $\alpha' = \alpha - \gamma$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > \alpha' \,.$$

Quindi,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) + g(x) > \alpha' + \gamma = \alpha \,.$$

■

Corollario 27 *Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R} \ \ (\ o \ +\infty)\,,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty\,.$$

Dimostrazione. Se il limite di g è $l \in \mathbb{R}$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ g(x) > l - 1\,.$$

Se invece il limite è $+\infty$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ g(x) > 0\,.$$

In ogni caso, si può applicare il teorema precedente per concludere. ∎

Come regola mnemonica, scriveremo brevemente

$$\begin{aligned} &(+\infty) + l = +\infty\,, \ \text{ se } l \text{ è un numero reale}\,; \\ &(+\infty) + (+\infty) = +\infty\,. \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo, si possono enunciare un teorema e il relativo corollario nel caso in cui il limite di f sia $-\infty$. Come regola mnemonica, scriveremo allora

$$\begin{aligned} &(-\infty) + l = -\infty\,, \ \text{ se } l \text{ è un numero reale}\,; \\ &(-\infty) + (-\infty) = -\infty\,. \end{aligned}$$

Similmente per quanto riguarda il prodotto:

Teorema 28 *Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

ed esiste un $\gamma > 0$ tale che, per ogni x in un intorno di x_0,

$$g(x) \geq \gamma\,,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = +\infty\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\alpha \in \mathbb{R}$. Possiamo supporre che sia $\alpha > 0$. Posto $\alpha' = \frac{\alpha}{\gamma}$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > \alpha'\,.$$

Quindi,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ f(x)g(x) > \alpha'\gamma = \alpha\,.$$

∎

Corollario 29 *Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l > 0 \ \ (\ o \ +\infty) \,,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = +\infty \,.$$

Dimostrazione. Se il limite di g è un numero reale $l > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ g(x) > \frac{l}{2} \,.$$

Se invece il limite è $+\infty$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ g(x) > 1 \,.$$

In ogni caso, si può applicare il teorema precedente per concludere. ■

Come sopra, scriveremo brevemente

$$(+\infty) \cdot l = +\infty \,, \ \text{se } l > 0 \text{ è un numero reale} \,;$$
$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \,,$$

con tutte le varianti del caso:

$$(+\infty) \cdot l = -\infty \,, \ \text{se } l < 0 \text{ è un numero reale} \,;$$
$$(-\infty) \cdot l = -\infty \,, \ \text{se } l > 0 \text{ è un numero reale} \,;$$
$$(-\infty) \cdot l = +\infty \,, \ \text{se } l < 0 \text{ è un numero reale} \,;$$
$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty \,;$$
$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty \,.$$

Passiamo ora a un altro tipo di risultati.

Teorema 30 *Se*

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty \,,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \,.$$

Dimostrazione. Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Posto $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)| > \alpha \,.$$

Quindi,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ \left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{\alpha} = \varepsilon \,.$$

■

Teorema 31 *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

e $f(x) > 0$ *per ogni* x *in un intorno di* x_0*, allora*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty\,.$$

Se invece $f(x) < 0$ *per ogni* x *in un intorno di* x_0*, allora*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty\,.$$

Dimostrazione. Vediamo solo il primo caso, essendo il secondo analogo. Fissiamo $\alpha \in \mathbb{R}$; possiamo supporre $\alpha > 0$. Posto $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; 0 < f(x) < \varepsilon\,.$$

Allora,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\varepsilon} = \alpha\,.$$

■

Presentiamo due varianti del teorema dei due carabinieri: nel caso in cui il limite vale $+\infty$, si ha il seguente

Teorema 32 *Sia* f_1 *tale che*

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = +\infty\,.$$

Se f *è tale che, per ogni* x *in un intorno di* x_0*,*

$$f_1(x) \leq f(x)\,,$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty\,.$$

Dimostrazione. Ponendo $g(x) = f(x) - f_1(x)$, si ha che $g(x) \geq 0$ per ogni x in un intorno di x_0 e $f(x) = f_1(x) + g(x)$. Il risultato segue quindi direttamente dal primo teorema visto a lezione. ■

Nel caso in cui il limite sia $-\infty$, si ha l'analogo

Teorema 33 *Sia f_2 tale che*

$$\lim_{x \to x_0} f_2(x) = -\infty \, .$$

Se f è tale che, per ogni x in un intorno di x_0,

$$f(x) \leq f_2(x) \, ,$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \, .$$

9 Successioni e sottosuccessioni

Utilizzeremo ora le successioni e i loro limiti per caratterizzare alcuni concetti introdotti in precedenza. A tal fine, riscriviamo la definizione di limite per una successione in uno spazio metrico E:

$$\lim_n a_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad n \geq \bar{n} \; \Rightarrow \; d(a_n, \ell) < \varepsilon \, .$$

Sia ora U un sottoinsieme dello spazio metrico E. Possiamo caratterizzare la nozione di punto aderente a U facendo uso delle successioni.

Teorema 34 *Un punto $x \in E$ è aderente a U se e solo se esiste una successione $(a_n)_n$ in U tale che $\lim_n a_n = x$.*

Dimostrazione. Se x è aderente a U, allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che $B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap U$ è non vuota, per cui posso sceglierne un elemento, che chiamo a_n. In questo modo, ho costruito una successione $(a_n)_n$ in U, ed è facile vedere che essa ha limite x. Una delle due implicazioni è così dimostrata.

Supponiamo ora che esista una successione $(a_n)_n$ in U tale che $\lim_n a_n = x$. Allora, fissato $\rho > 0$, esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq \bar{n} \; \Rightarrow \; d(a_n, x) < \rho \, ,$$

ossia $a_n \in B(x, \rho)$. Quindi, $B(x, \rho) \cap U$ è non vuoto, e questo dimostra che x è aderente a U. ■

Consideriamo ora due spazi metrici E, F e una funzione $f : E \to F$. Vogliamo caratterizzare la continuità di f in un punto $x_0 \in E$, facendo uso delle successioni.

Teorema 35 *La funzione f è continua in x_0 se e solo se, presa una successione $(a_n)_n$ in E, si ha*

$$\lim_n a_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n f(a_n) = f(x_0)\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua in x_0, e sia $(a_n)_n$ una successione in E tale che $\lim_n a_n = x_0$. Per il Teorema 22 sul limite di una funzione composta,

$$\lim_n f(a_n) = f(\lim_n a_n) = f(x_0)\,,$$

cosicchè una delle due implicazioni è dimostrata.

Ragioniamo ora per contrapposizione, e supponiamo che f non sia continua in x_0. Questo significa che esiste un $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$, esiste almeno un $x \in E$ per cui $d(x, x_0) < \delta$ e $d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Prendendo $\delta = \frac{1}{n+1}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste pertanto un a_n in E tale che $d(a_n, x_0) < \frac{1}{n+1}$ e $d(f(a_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Ne segue che $\lim_n a_n = x_0$, ma sicuramente non può essere che $\lim_n f(a_n) = f(x_0)$. ■

Data che sia una successione $(a_n)_n$, una sua "sottosuccessione" si ottiene selezionando una successione strettamente crescente di indici $(n_k)_k$ e considerando la funzione composta

$$k \mapsto n_k \mapsto a_{n_k}\,.$$

Teorema 36 *Se una successione ha limite, allora tutte le sue sottosuccessioni hanno lo stesso limite.*

Dimostrazione. Essendo gli indici n_k in $\mathbb{N}$, dalla $n_{k+1} > n_k$ si deduce che $n_{k+1} \geq n_k + 1$ e, per induzione, che $n_k \geq k$, per ogni k. Ne segue che $\lim_k n_k = +\infty$. Pertanto,

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \lim_{n \to \lim\limits_{k\to+\infty} n_k} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n\,. \qquad ■$$

10 La nozione di compattezza

Ricordiamo la seguente proprietà degli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$.

Teorema 37 (di Bolzano–Weierstrass) *Ogni successione $(a_n)_n$ in $[a, b]$ possiede una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha limite in $[a, b]$.*

In uno spazio metrico E, diremo che un sottoinsieme U è "compatto" se ogni successione $(a_n)_n$ in U possiede una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha limite in U. Il teorema di Bolzano–Weierstrass afferma quindi che, se $E = \mathbb{R}$, gli intervalli del tipo $U = [a, b]$ sono compatti. Più in generale, si può dimostrare che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Nel seguito, diremo che una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ è "limitata superiormente" (o "limitata inferiormente") se lo è la sua immagine $f(U)$. Diremo che f è "limitata" se è sia limitata superiormente che inferiormente. Diremo che "f ha massimo" (o "f ha minimo") se $f(U)$ ce l'ha. Nel caso in cui f abbia massimo, chiameremo "punto di massimo" ogni $\bar{x}$ per cui $f(\bar{x}) = \max f(U)$; analoga definizione per "punto di minimo".

Teorema 38 (di Weierstrass) *Se U è un insieme compatto e $f : U \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f ha massimo e minimo.*

Dimostrazione. Sia $s = \sup f(U)$. Dimostreremo che esiste un punto di massimo, ossia un $\bar{x} \in U$ tale che $f(\bar{x}) = s$.

Notiamo che è possibile trovare una successione $(y_n)_n$ in $f(U)$ tale che $\lim\limits_n y_n = s$: se $s \in \mathbb{R}$, per ogni $n \geq 1$ possiamo trovare un $y_n \in f(U)$ per cui $s - \frac{1}{n} < y_n \leq s$; se invece $s = +\infty$, per ogni n esiste un $y_n \in f(U)$ tale che $y_n > n$.

In corrispondenza, possiamo trovare una successione $(x_n)_n$ in U tale che $f(x_n) = y_n$. Essendo U compatto, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che ha un limite $\bar{x} \in U$. Siccome $\lim\limits_n y_n = s$ e $y_{n_k} = f(x_{n_k})$, la sottosuccessione $(y_{n_k})_k$ ha anch'essa limite s. Allora, per la continuità di f,

$$f(\bar{x}) = f(\lim_k x_{n_k}) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = s\,.$$

Il teorema è così dimostrato, per quanto riguarda l'esistenza del massimo. Per il minimo, si procede in modo analogo (oppure, si considera la funzione continua $g = -f$ e si usa il fatto che g ha massimo). ■

Si può anche dimostrare in modo analogo il seguente teorema. Esso afferma che una funzione continua "manda compatti in compatti".

Teorema 39 *Se E, F sono due spazi metrici, $U \subseteq E$ è compatto e $f : E \to F$ è una funzione continua, allora $f(U)$ è compatto.*

Teorema 40 *Ogni sottoinsieme compatto di E è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo che $U \subseteq E$ sia compatto. Prendendo $x \in \overline{U}$, esiste una successione $(a_n)_n$ in U tale che $\lim_n a_n = x$. Poiché U è compatto, esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha un limite in U. Ma, essendo una sottosuccessione, $\lim_k a_{n_k} = x$, e quindi $x \in U$. Abbiamo quindi dimostrato che ogni punto aderente ad U appartiene a U, quindi U è chiuso.

Ora, fissiamo arbitrariamente un x_0 in U. Mostreremo che, se $n \in \mathbb{N}$ è sufficientemente grande, allora $U \subseteq B(x_0, n)$. Per assurdo, se ciò fosse falso, potremmo costruire una successione $(a_n)_n$ in U tale che $d(a_n, x_0) \geq n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché U è compatto, esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha un limite $\bar{x} \in U$. Utilizzando la disuguaglianza triangolare,

$$|d(a_{n_k}, x_0) - d(\bar{x}, x_0)| \leq d(a_{n_k}, \bar{x}),$$

da cui $\lim_k d(a_{n_k}, x_0) = d(\bar{x}, x_0)$, mentre dovrebbe essere

$$\lim_k d(a_{n_k}, x_0) = +\infty,$$

una contraddizione. Pertanto, U deve essere limitato. ■

Ora focalizziamo la nostra attenzione sui sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^N$, per un qualsiasi $N \geq 1$.

Teorema 41 *Un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^N$ *è compatto* se e solo se *è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Sappiamo già che ogni insieme compatto è chiuso e limitato. Supponiamo ora che U sia un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^N$. Per semplicità, supporremo che sia $N = 2$. Allora U è contenuto in un rettangolo $I = [a, b] \times [c, d]$. Sia $(\boldsymbol{a}_n)_n$ una successione in U. Allora $\boldsymbol{a}_n = (a_n^1, a_n^2)$, con $a_n^1 \in [a, b]$ e $a_n^2 \in [c, d]$. Per il Teorema di Bolzano–Weierstrass, la successione $(a_n^1)_n$ ha una sottosuccessione $(a_{n_k}^1)_k$ che ha un limite $l_1 \in [a, b]$. Consideriamo ora la successione $(a_{n_k}^2)_k$, con gli stessi indici n_k di quella che abbiamo appena trovato; è una sottosuccessione di $(a_n^2)_n$. Per il Teorema di Bolzano–Weierstrass, la successione $(a_{n_k}^2)_k$ ha una sottosuccessione $(a_{n_{k_j}}^2)_j$ che ha un limite $l_2 \in [c, d]$. Pertanto,

$$\lim_j \boldsymbol{a}_{n_{k_j}} = (\lim_j a_{n_{k_j}}^1, \lim_j a_{n_{k_j}}^2) = (l_1, l_2).$$

Ne segue che $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2)$ è un punto aderente ad U. Quindi, siccome U è chiuso, $\boldsymbol{l}$ è necessariamente un elemento di U. ■

La seguente proprietà degli insiemi compatti ci potrà essere utile in seguito.

Teorema 42 *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme compatto. Se $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ è una famiglia (non necessariamente numerabile) di insiemi aperti tale che*

$$U \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i,$$

allora esiste una sottofamiglia finita $(A^1, \ldots, A^n)$ di $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ tale che

$$U \subseteq A^1 \cup \cdots \cup A^n.$$

Dimostrazione. Per semplicità, supponiamo $N = 2$. Dimostriamo prima la tesi nel caso in cui U sia un rettangolo chiuso, e denotiamolo con $R_0 = [a_0, b_0] \times [c_0, d_0]$. Per assurdo, supponiamo che ci sia un ricoprimento $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ di R_0, costituito da insiemi aperti, senza che ci sia alcun sottoricoprimento finito. Dividiamo il rettangolo R_0 in quattro rettangoli chiusi più piccoli e uguali, collegando i punti medi dei suoi lati. Tra questi quattro rettangoli, ce n'è almeno uno per il quale non esiste una sottofamiglia finita di $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ che lo ricopra. Chiamiamolo R_1. Procediamo ora ricorsivamente e costruiamo in questo modo una successione di rettangoli chiusi $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$, tale che

$$R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \cdots \supseteq R_k \supseteq R_{k+1}\,, \supseteq \ldots\,,$$

per ciascuno dei quali non esiste una sottofamiglia finita di $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ che lo ricopra. Per il Teorema di Cantor, esistono un $\bar{x}$ appartenente a tutti gli intervalli $[a_k, b_k]$ e un $\bar{y}$ appartenente a tutti gli intervalli $[c_k, d_k]$, così che $(\bar{x}, \bar{y}) \in R_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Poiché $(\bar{x}, \bar{y})$ appartiene a U, c'è almeno un A_i che lo contiene. Questo insieme A_i è aperto e le dimensioni di R_k tendono a zero al tendere di k a $+\infty$. Quindi, per k sufficientemente grande, il rettangolo R_k sarà tutto contenuto in A_i. Ma questa è una contraddizione, poiché non dovrebbe esistere una sottofamiglia finita di $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ che ricopra R_k.

Sia ora U un qualsiasi sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$. Allora U è contenuto in un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$. Se $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ è un ricoprimento U costituito da insiemi aperti, allora

$$[a, b] \times [c, d] \subseteq \Big(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\Big) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus U)\,.$$

Siccome $\mathbb{R}^2 \setminus U$ è aperto, abbiamo ora una ricoprimento di $[a, b] \times [c, d]$ costituito da insiemi aperti, e per la prima parte della dimostrazione esiste una sottofamiglia finita $(A^1, \ldots, A^n)$ di $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ tale che

$$[a, b] \times [c, d] \subseteq (A^1 \cup \cdots \cup A^n) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus U)\,.$$

Di conseguenza, $U \subseteq A^1 \cup \cdots \cup A^n$, e la dimostrazione è così completa. ■

Nota. Si può dimostrare che il teorema precedente vale in uno spazio metrico qualsiasi; inoltre, la proprietà dell'enunciato risulta essere necessaria e sufficiente per la compattezza di un insieme U.

11 Funzioni uniformemente continue

Ricordo ora che una funzione $f : E \to F$ si dice "continua" se è continua in ogni punto $x_0 \in E$. In altri termini, se

$$\forall x_0 \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ \forall x \in E \quad d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Si noti che, in generale, la scelta di δ dipende sia da ε che da x_0. Nel caso in cui tale δ non dipenda da x_0, diremo che la funzione è "uniformemente continua": In tal caso, si ha che

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : \ \forall x_0 \in E \quad \forall x \in E \quad d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \,.$$

Teorema 43 (di Heine) *Se U è un insieme compatto e $f : U \to F$ è una funzione continua, allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che f non sia uniformemente continua. Allora

$$\exists\varepsilon > 0 : \ \forall\delta > 0 \quad \exists x_0 \in U \quad \exists x \in U : \ d(x, x_0) < \delta \quad e \quad d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon \,.$$

Prendiamo un tale $\varepsilon > 0$ e scegliamo $\delta = \frac{1}{n+1}$, con $n \in \mathbb{N}$. In corrispondenza, esistono[4] x_n^0 e x_n tali che

$$d(x_n, x_n^0) < \frac{1}{n+1} \qquad \text{e} \qquad d(f(x_n), f(x_n^0)) \geq \varepsilon \,.$$

Abbiamo così due successioni $(x_n)_n$ e $(x_n^0)_n$ in U. Essendo U compatto, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che ha un limite $\bar{x} \in U$. Prendiamo ora la sottosuccessione $(x_{n_k}^0)_k$, con gli stessi indici n_k. Siccome $d(x_{n_k}, x_{n_k}^0)$ tende a zero, anche questa sottosuccessione ha lo stesso limite $\bar{x}$. Per la continuità di f, deve essere

$$\lim f(x_{n_k}) = f(\bar{x}) \qquad \text{e} \qquad \lim f(x_{n_k}^0) = f(\bar{x}) \,,$$

e pertanto

$$\lim_k d(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}^0)) = 0 \,,$$

in contraddizione con il fatto che $d(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}^0)) \geq \varepsilon > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. ■

12 Funzioni a valori vettoriali

Consideriamo ora, per ogni $k = 1, 2, \dots, D$, la funzione "k-esima proiezione" $p_k : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}$ definita da

$$p_k(x_1, x_2, \dots, x_D) = x_k \,.$$

Teorema 44 *Le funzioni p_k sono continue.*

[4] Qui l'indice 0 viene spostato in apice per non avere una notazione con doppio indice.

Dimostrazione. Consideriamo un punto $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_D^0) \in \mathbb{R}^D$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Notiamo che, per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D$, si ha

$$|x_k - x_k^0| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{D} (x_j - x_j^0)^2} = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)\,,$$

per cui, prendendo $\delta = \varepsilon$, si ha:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta \ \Rightarrow\ |p_k(\boldsymbol{x}) - p_k(\boldsymbol{x}_0)| = |x_k - x_k^0| < \varepsilon\,,$$

il che dimostra che p_k è continua in $\boldsymbol{x}_0$. ■

Supponiamo ora $f : E \to \mathbb{R}^M$. Consideriamo le "componenti" della funzione f definite da $f_k = p_k \circ f : E \to \mathbb{R}$, con $k = 1, 2, \dots, M$, per cui si ha

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x))\,.$$

Teorema 45 *La funzione f è continua in x_0 se e solo se lo sono tutte le sue componenti.*

Dimostrazione. Se f è continua in x_0, lo sono anche le f_k in quanto composte di funzioni continue. Viceversa, supponiamo che le componenti di f siano tutte continue in x_0. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $k = 1, 2, \dots, M$ esiste un $\delta_k > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta_k \ \Rightarrow\ |f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_M\}$, si ha

$$d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow\ d(f(x), f(x_0)) = \sqrt{\sum_{j=1}^{M} (f_j(x) - f_j(x_0))^2} < \sqrt{M}\varepsilon\,,$$

il che, per l'arbitrarietà di ε, completa la dimostrazione. ■

Teorema 46 *Ogni applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ è continua.*

Dimostrazione. Osserviamo che, essendo le proiezioni p_k lineari, le componenti $\ell_k = p_k \circ \ell$ dell'applicazione lineare ℓ sono anch'esse lineari. Consideriamo la base canonica $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_N]$ di $\mathbb{R}^N$, con

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0)\,,\\
\boldsymbol{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0)\,,\\
&\vdots\\
\boldsymbol{e}_N &= (0, 0, 0, \dots, 1)\,.
\end{aligned}$$

Ogni vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ si può scrivere come

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_N\boldsymbol{e}_N = p_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_1 + p_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2 + \dots + p_N(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_N\,.$$

Quindi, per ogni $k \in \{1, 2, \dots, M\}$,

$$\ell_k(\boldsymbol{x}) = p_1(\boldsymbol{x})\ell_k(\boldsymbol{e}_1) + p_2(\boldsymbol{x})\ell_k(\boldsymbol{e}_2) + \dots + p_N(\boldsymbol{x})\ell_k(\boldsymbol{e}_N)\,,$$

per cui ℓ_k risulta essere combinazione lineare delle proiezioni $p_1, p_2, \dots, p_N$. Essendo queste ultime continue, anche ℓ_k è continua. Avendo tutte le componenti continue, ℓ è pertanto continua. ■

Siamo infine interessati a studiare il limite di una funzione $f : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^M$, dove x_0 è un punto di accumulazione di uno spazio metrico E. Consideriamo le sue componenti $f_k : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ di f, con $k = 1, 2, \dots, M$, per cui si ha:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x))\,.$$

Teorema. *Il limite* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^M$ *esiste se e solo se esistono i limiti* $\lim_{x \to x_0} f_k(x) = l_k \in \mathbb{R}$, *per ogni* $k = 1, 2, \dots, M$. *In tal caso, si ha* $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \dots, l_M)$. *Vale quindi la formula*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \big(\lim_{x \to x_0} f_1(x), \lim_{x \to x_0} f_2(x), \dots, \lim_{x \to x_0} f_M(x)\big)\,.$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal teorema sulla continuità delle componenti di una funzione continua. ■

13 La nozione di completezza

Introduciamo ora il concetto di "completezza" per uno spazio metrico E. Diremo che $(a_n)_n$ è una "successione di Cauchy" in E se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad [\, m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n}\,] \;\Rightarrow\; d(a_m, a_n) < \varepsilon\,.$$

Lo spazio metrico E si dirà "completo" se ogni successione di Cauchy ha un limite in E.

Si vede facilmente che, se $(a_n)_n$ ha un limite $\ell \in E$, allora è di Cauchy. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, per m e n grandi si avrà che

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, \ell) + d(\ell, a_n) < 2\varepsilon\,.$$

Il viceversa non è sempre vero (ad esempio, $\mathbb{Q}$ non è completo). Abbiamo però il seguente

Teorema 47 $\mathbb{R}$ *è completo.*

Dimostrazione. Sia $(a_n)_n$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Prendendo nella definizione $\varepsilon = 1$, si ha che esiste un $\bar{n}_1$ tale che, scegliendo $m = \bar{n}_1$, per ogni $n \geq \bar{n}_1$ si ha

$$d(a_n, a_{\bar{n}_1}) < 1\,.$$

Se ne deduce che la successione $(a_n)_n$ è limitata (gli indici che precedono $\bar{n}_1$ sono in numero finito). Quindi $(a_n)_n$ è contenuta in un intervallo del tipo $[a, b]$. Per il teorema di Bolzano–Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha un limite $c \in [a, b]$. Vogliamo dimostrare che

$$\lim_n a_n = c\,.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo la successione $(a_n)_n$ di Cauchy,

$$\exists \bar{n} : \quad m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; d(a_m, a_n) < \varepsilon\,.$$

Inoltre, essendo $\lim_k a_{n_k} = c$ e $\lim_k n_k = +\infty$,

$$\exists \bar{k} : \quad k \geq \bar{k} \;\Rightarrow\; d(a_{n_k}, c) < \varepsilon \;\text{ e }\; n_k \geq \bar{n}\,.$$

Allora, per $n \geq \bar{n}$, si ha

$$d(a_n, c) \leq d(a_n, a_{n_{\bar{k}}}) + d(a_{n_{\bar{k}}}, c) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,,$$

il che pone fine alla dimostrazione. ■

Si può dimostrare che anche $\mathbb{R}^N$ è completo, per ogni $N \geq 1$. In particolare, lo è $\mathbb{C}$, in quanto come spazio metrico coincide con $\mathbb{R}^2$.

Teorema 48 $\mathbb{R}^N$ *è completo.*

Dimostrazione. Per semplicità, supponiamo $N = 2$. Sia $(a_n)_n$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^2$. Scriviamo ogni vettore $a_n \in \mathbb{R}^2$ nelle sue coordinate

$$a_n = (a_{n,1}, a_{n,2})\,.$$

Denotando con $\|\cdot\|$ la norma euclidea, si vede che

$$|a_{m,1} - a_{n,1}| \leq \|a_n - a_m\|\,, \quad |a_{m,2} - a_{n,2}| \leq \|a_n - a_m\|\,,$$

da cui segue che le due successioni $(a_{n,1})_n$, $(a_{n,2})_n$ sono di Cauchy in $\mathbb{R}$. Quindi, essendo $\mathbb{R}$ completo, esistono i limiti

$$\lim_n a_{n,1} = \ell_1\,, \quad \lim_n a_{n,2} = \ell_2\,.$$

Allora

$$\lim_n a_n = (\lim_n a_{n,1}\,,\, \lim_n a_{n,2}) = (\ell_1, \ell_2)\,,$$

un elemento di $\mathbb{R}^2$. ■

Il seguente è un utile teorema di estensione per funzioni uniformemente continue.

Teorema 49 *Sia $\widehat{E}$ un sottoinsieme denso di E, e sia F uno spazio metrico completo. Se $\hat{f} : \widehat{E} \to F$ è uniformemente continua, allora esiste una e una sola funzione continua $f : E \to F$ la cui restrizione a $\widehat{E}$ coincide con $\hat{f}$.*

<u>Dimostrazione</u>. Preso $x \in E$, esiste una successione $(x_n)_n$ in $\widehat{E}$ tale che $\lim_n x_n = x$. Dal fatto che $\hat{f}$ è uniformemente continua e $(x_n)_n$ è una successione di Cauchy consegue che anche $(\hat{f}(x_n))_n$ è una successione di Cauchy. Quindi, essendo F completo, essa ha un limite $y \in F$. Definiamo $f(x) = \lim_n \hat{f}(x_n) = y$.

Verifichiamo che questa è una buona definizione. Se $(\tilde{x}_n)_n$ è un'altra successione in $\widehat{E}$ tale che $\lim_n \tilde{x}_n = x$, allora $\lim_n d(x_n, \tilde{x}_n) = 0$, e poiché $\hat{f}$ è uniformemente continua, anche $\lim_n d(\hat{f}(x_n), \hat{f}(\tilde{x}_n)) = 0$. Pertanto, $(\hat{f}(\tilde{x}_n))_n$ deve necessariamente avere lo stesso limite y di $(\hat{f}(x_n))_n$, e la definizione è consistente.

Chiaramente, la funzione f così definita estende $\hat{f}$ poiché, se $x \in U$, possiamo prendere la successione $(x_n)_n$ costantemente uguale a x. Dimostriamo ora che f è (uniformemente) continua. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che, prendendo $u, v \in \widehat{E}$,

$$d(u, v) \leq 2\delta \quad \Rightarrow \quad d(\hat{f}(u), \hat{f}(v)) \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Se x, y sono due punti in E tali che $d(x, y) \leq \delta$, possiamo prendere due successioni $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ in $\widehat{E}$ tali che $\lim_n x_n = x$ e $\lim_n y_n = y$. Quindi, poiché $\lim_n \hat{f}(x_n) = f(x)$ e $\lim_n \hat{f}(y_n) = f(y)$, per n sufficientemente grande sarà che $d(x_n, y_n) \leq 2\delta$ e

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), \hat{f}(x_n)) + d(\hat{f}(x_n), \hat{f}(y_n)) + d(\hat{f}(y_n), f(y)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

dimostrando così che f è uniformemente continua.

Per concludere la dimostrazione, sia $\tilde{f} : E \to F$ una qualsiasi funzione continua che estende $\hat{f}$. Allora, per ogni $x \in E$, prendendo una successione $(x_n)_n$ in $\widehat{E}$ tale che $\lim_n x_n = x$,

$$\tilde{f}(x) = \lim_n \tilde{f}(x_n) = \lim_n \hat{f}(x_n) = f(x)\,.$$

Abbiamo così dimostrato che f è l'unica possibile estensione continua di $\hat{f}$ a E. ■

14 Il Teorema delle contrazioni

Dato uno spazio metrico E, diciamo che una funzione $F : E \to E$ è una **contrazione** se, per qualche $\alpha \in [0, 1[$, vale

$$d(F(u), F(v)) \leq \alpha\, d(u, v)\,, \qquad \text{per ogni } u, v \in E\,.$$

Teorema 50 (di Banach) *Se E è uno spazio metrico completo e $F : E \to E$ è una contrazione, allora esiste un unico $x \in E$ tale che $F(x) = x$. Inoltre, scelto arbitrariamente $x_0 \in E$, la successione $(x_n)_n$ definita da*

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

è tale che $\lim_n x_n = x$.

Ricordiamo che, se $F(x) = x$, il punto x si dice un **punto fisso** di F.

Dimostrazione. Consideriamo la successione $(x_n)_n$, definita come nell'enunciato, con $x_0 \in E$ arbitrario. Dimostriamo anzitutto per induzione che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, è vera la seguente proposizione:

$$(\mathcal{P}_k) \qquad d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^k d(x_0, x_1) \, .$$

Infatti, se $k = 0$, abbiamo chiaramente un'uguaglianza, per cui $(\mathcal{P}_0)$ è vera. Supponiamo ora che $(\mathcal{P}_k)$ sia vera per qualche $k \in \mathbb{N}$. Allora,

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) = d(F(x_k), F(x_{k+1})) \leq \alpha\, d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^{k+1} d(x_0, x_1) \, ,$$

per cui anche $(\mathcal{P}_{k+1})$ è vera.

Avendo dimostrato $(\mathcal{P}_k)$, abbiamo dunque, per ogni $m < n$,

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k d(x_0, x_1) = \alpha^m d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{n-m-1} \alpha^j.$$

Poiché $\alpha \in [0, 1[$, la serie geometrica di ragione α converge e ha somma $\frac{1}{1-\alpha}$, per cui

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^m \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} \, .$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, poiché $\alpha \in [0, 1[$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$m \geq \bar{n} \quad \Longrightarrow \quad \alpha^m \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} < \varepsilon \, .$$

Di conseguenza,

$$n > m \geq \bar{n} \quad \Longrightarrow \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon \, ,$$

il che mostra che $(x_n)_n$ è una successione di Cauchy. Poiché E è completo, $(x_n)_n$ ammette limite: esiste un $x \in E$ tale che

$$\lim_n x_n = x \, .$$

Allora, poiché F è continua,

$$F(x) = F(\lim_n x_n) = \lim_n F(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x \, ,$$

mostrando così che x è un punto fisso di F.

Resta da dimostrare che il punto fisso x è unico. Supponiamo che x' sia anch'esso un punto fisso. Allora,

$$d(x, x') = d(F(x), F(x')) \leq \alpha\, d(x, x')\,,$$

e poiché $\alpha < 1$, deve essere $x = x'$. ■

15 Spazi di funzioni continue

Siano E, F due spazi metrici, e consideriamo una successione di funzioni $f_n : E \to F$. Vogliamo studiare, qualora esista, il limite

$$\lim_n f_n(x)\,.$$

Ovviamente, questo limite potrebbe esistere per alcuni $x \in E$ e non esistere affatto per altri. Quindi supponiamo che, per qualche sottoinsieme $U \subseteq E$, esista una funzione $f : U \to F$ per cui

$$\lim_n f_n(x) = f(x)\,, \quad \text{per ogni } x \in U\,.$$

In questo caso diremo che la successione $(f_n)_n$ "converge puntualmente" a f su U; in altre parole,

$$\forall x \in U \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\,.$$

Se la scelta di $\bar{n}$ non dipende da $x \in U$, diremo che la successione $(f_n)_n$ "converge uniformemente" a f su U; in questo caso,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall x \in U \quad n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\,,$$

ossia, equivalentemente,

$$\lim_n \Big[\sup \big\{ d(f_n(x), f(x)) : x \in U \big\} \Big] = 0\,.$$

Forniamo un esempio di una successione $(f_n)_n$ che converge puntualmente, ma non uniformemente. Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, con $n \geq 1$, definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}\,, \\ 2 - nx & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}\,, \\ 0 & \text{se } \frac{2}{n} \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

Si vede facilmente che $\lim_n f_n(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$, ma la convergenza non è uniforme, poiché $f_n\big(\frac{1}{n}\big) = 1$ per ogni $n \geq 1$.

La convergenza uniforme ha un buon comportamento rispetto alla continuità, come afferma il seguente teorema.

Teorema 51 *Se ogni funzione $f_n : E \to F$ è continua su $U \subseteq E$ e $(f_n)_n$ converge uniformemente a f su U, allora anche f è continua su U.*

Dimostrazione. Consideriamo un punto arbitrario x_0 di U; mostreremo che f è continua in x_0. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall x \in U \quad n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; d(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{3}\,\varepsilon\,.$$

Poiché

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0))\,,$$

prendendo $n = \bar{n}$ abbiamo che

$$d(f(x), f(x_0)) < \frac{2}{3}\,\varepsilon + d(f_{\bar{n}}(x), f_{\bar{n}}(x_0))\,.$$

Per la continuità di $f_{\bar{n}}$ in x_0, possiamo trovare un $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f_{\bar{n}}(x), f_{\bar{n}}(x_0)) < \frac{1}{3}\,\varepsilon\,.$$

Quindi,

$$d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(x_0)) < \frac{2}{3}\,\varepsilon + \frac{1}{3}\,\varepsilon = \varepsilon\,,$$

dimostrando così che f è continua in x_0. ■

Nota. Se $(f_n)_n$ è una successione di funzioni continue che converge uniformemente su U a una qualche funzione, per ogni $x_0 \in U$ possiamo scrivere

$$\lim_n \Big(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \Big) = \lim_{x \to x_0} \Big(\lim_n f_n(x) \Big)\,.$$

Nel seguito diremo che una funzione $f : E \to F$ è "limitata" se la sua immagine $f(E)$ lo è, e denoteremo con $\mathcal{B}(E, F)$ l'insieme di tutte queste funzioni. Definiamo, in $\mathcal{B}(E, F)$,

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in E\}\,.$$

Si verifica facilmente che questa è una distanza, per cui $\mathcal{B}(E, F)$ sarà trattato come uno spazio metrico. Si noti che, prendendo una successione $(f_n)_n$ e una funzione f nello spazio $\mathcal{B}(E, F)$, si ha che

$$\lim_n f_n = f \quad \Leftrightarrow \quad (f_n)_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ su } E\,.$$

Indaghiamo ora alcune ulteriori proprietà di questo spazio di funzioni.

Teorema 52 *Se F è completo, allora anche $\mathcal{B}(E,F)$ è completo.*

Dimostrazione. Sia $(f_n)_n$ una successione di Cauchy in $\mathcal{B}(E,F)$. Poiché, per ogni $x \in E$,

$$d(f_m(x), f_n(x)) \leq d_\infty(f_m, f_n)\,,$$

abbiamo che $(f_n(x))_n$ è una successione di Cauchy in F, per ciascun $x \in E$. Essendo F completo, la successione $(f_n(x))_n$ ha un limite in F; lo denoteremo con $f(x)$. In questo modo abbiamo effettivamente definito una funzione $f : E \to F$, e ora dimostreremo che $\lim_n f_n = f$ in $\mathcal{B}(E,F)$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\begin{aligned} [\, m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n}\,] \quad &\Rightarrow \quad d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon\,, \text{ per ogni } x \in E\,. \end{aligned}$$

Per la continuità della distanza, abbiamo che

$$\lim_m d(f_n(x), f_m(x)) = d(f_n(x), f(x))\,,$$

da cui

$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon\,, \text{ per ogni } x \in E\,.$$

Quindi, f appartiene a $\mathcal{B}(E,F)$, e

$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon\,.$$

La tesi è così dimostrata. ■

Se $f \in \mathcal{B}(E,F)$ e F è uno spazio vettoriale normato, possiamo definire

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| : x \in E\}\,.$$

Si verifica facilmente che questa è effettivamente una norma su $\mathcal{B}(E,F)$, e che

$$d_\infty(f,g) = \|f - g\|_\infty\,.$$

Come conseguenza immediata del teorema precedente, abbiamo il seguente.

Corollario 53 *Se F è uno spazio di Banach, allora anche $\mathcal{B}(E,F)$ lo è.*

Dimostrazione. Essendo F completo rispetto alla distanza indotta dalla sua norma, anche $\mathcal{B}(E,F)$ è completo, per il teorema precedente. ■

Denotiamo con $\mathcal{C}(E,F)$ l'insieme delle funzioni continue $f : E \to F$. Siamo ora interessati a considerare lo spazio $\mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$, costituito da funzioni continue e limitate.

Teorema 54 *L'insieme $\mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$ è chiuso in $\mathcal{B}(E,F)$.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{B}(E,F)$ un punto aderente a $\mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$. Allora esiste una successione $(f_n)_n$ in $\mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$ tale che $\lim_n f_n = f$. Per il Teorema 51, f è continua, essendo il limite uniforme di funzioni continue, quindi $f \in \mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$. Abbiamo così dimostrato che la chiusura di $\mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$ coincide con $\mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$ stesso. ■

L'insieme $\mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$ eredita la distanza d_∞ da $\mathcal{B}(E,F)$ e, quando F è uno spazio vettoriale normato, anche la sua norma $\|\cdot\|_\infty$. I seguenti corollari potranno risultare utili.

Corollario 55 *Se F è completo, allora anche $\mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$ lo è. Quindi, se F è uno spazio di Banach, anche $\mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$ lo è.*

Dimostrazione. Qualsiasi successione di Cauchy in $\mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$ ha un limite in $\mathcal{B}(E,F)$, poiché $\mathcal{B}(E,F)$ è completo. Essendo $\mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$ chiuso in $\mathcal{B}(E,F)$, questo limite appartiene a $\mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$. Quindi, $\mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$ è completo. ■

Corollario 56 *Se E è compatto e F è completo, allora anche $\mathcal{C}(E,F)$ è completo. Quindi, se E è compatto e F è uno spazio di Banach, anche $\mathcal{C}(E,F)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Essendo E compatto, ogni $f \in \mathcal{C}(E,F)$ è limitata. Quindi, $\mathcal{C}(E,F)$ coincide con $\mathcal{C}(E,F) \cap \mathcal{B}(E,F)$, e la conclusione segue dal corollario precedente. ■

16 Il Teorema di Ascoli–Arzelà

Un sottoinsieme H di $C(E,F)$ si dice *uniformemente equicontinuo* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, presi $x, y \in E$,

$$d(x,y) \le \delta \quad \Longrightarrow \quad d(f(x), f(y)) \le \varepsilon\,, \text{ per ogni } f \in H\,.$$

Diremo che un insieme è “relativamente compatto” se la sua chiusura è un insieme compatto.

Teorema 57 (di Ascoli–Arzelà) *Sia E compatto ed F completo. Allora un sottoinsieme H di $C(E,F)$ è relativamente compatto se e solo se H è uniformemente equicontinuo e, per ogni $x \in E$, l'insieme $H(x) = \{f(x) : f \in H\}$ è relativamente compatto.*

Dimostrazione. Sia H relativamente compatto e fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora H può essere ricoperto da un numero finito di palle aperte $B(f_1, \varepsilon), \dots, B(f_m, \varepsilon)$, con $f_1, \dots, f_m \in H$. Per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ esiste $\delta_i > 0$ tale che, per $x, y \in E$,

$$d(x,y) \le \delta_i \quad \Longrightarrow \quad d(f_i(x), f_i(y)) \le \varepsilon \,.$$

Ponendo $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$, per ogni $f \in H$ esiste un indice $i \in \{1, \dots, m\}$ tale che $f \in B(f_i, \varepsilon)$; quindi, se $d(x,y) \le \delta$,

$$d(f(x), f(y)) \le d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y)) \le \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \,.$$

Quindi H è uniformemente equicontinuo. Inoltre, per ogni $x \in E$, la funzione $\phi_x : C(E,F) \to F$, definita da $\phi_x(f) = f(x)$, è continua; pertanto, essendo $\overline{H}$ compatto, anche $\phi_x(\overline{H})$ è compatto. Segue che

$$H(x) = \phi_x(H)$$

è relativamente compatto.

Supponiamo ora che H sia uniformemente equicontinuo e che, per ogni $x \in E$, l'insieme $H(x) = \{f(x) : f \in H\}$ sia relativamente compatto. Sia $(f_n)_n$ una successione in H. Dobbiamo dimostrare quanto segue.

Affermazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una sottosuccessione, indicata con $(f_n^\varepsilon)_n$, tale che

$$d_\infty(f_n^\varepsilon, f_m^\varepsilon) \le \varepsilon \,, \quad \text{per ogni } m, n \,.$$

Sia quindi fissato $\varepsilon > 0$. Per l'equicontinuità uniforme, ogni $x \in E$ possiede un intorno aperto U_x tale che

$$d(f_n(u), f_n(v)) \le \frac{\varepsilon}{3} \,, \quad \text{per ogni } u, v \text{ in } U_x \,, \text{ e per ogni } n \,.$$

Gli aperti U_x ricoprono E, che è compatto; dunque esiste un sottoricoprimento finito

$$U_{x_1}, \dots, U_{x_j} \,.$$

Inoltre, poiché gli insiemi $H(x_1), \dots, H(x_j)$ sono relativamente compatti, esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ tale che $(f_{n_k}(x_i))_k$ converge per ogni $i = 1, \dots, j$. Allora esiste $k_\varepsilon > 0$ tale che

$$d(f_{n_{k'}}(x_i), f_{n_{k''}}(x_i)) \le \frac{\varepsilon}{3} \,, \quad \text{per ogni } k', k'' \ge k_\varepsilon \,, \text{ e per ogni } i = 1, \dots, j \,.$$

Ora, per ogni $u \in E$ esiste un indice i_u tale che $u \in U_{i_u}$. Quindi, per ogni $k', k'' \geq k_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} & d(f_{n_{k'}}(u), f_{n_{k''}}(u)) \leq \\ & \qquad \leq d(f_{n_{k'}}(u), f_{n_{k'}}(x_{i_u})) + d(f_{n_{k'}}(x_{i_u}), f_{n_{k''}}(x_{i_u})) + d(f_{n_{k''}}(x_{i_u}), f_{n_{k''}}(u)) \\ & \qquad \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato l'Affermazione.

Applicando ora l'Affermazione alla successione $(f_n)_n$ con $\varepsilon = 1$, otteniamo una sottosuccessione $(f_n^1)_n$ tale che

$$d_\infty(f_n^1, f_m^1) \leq 1\,, \quad \text{per ogni } m, n\,.$$

Applichiamo quindi l'Affermazione alla successione $(f_n^1)_n$ con $\varepsilon = 1/2$, ottenendo una ulteriore sottosuccessione $(f_n^{1/2})_n$ tale che

$$d_\infty(f_n^{1/2}, f_m^{1/2}) \leq \frac{1}{2}\,, \quad \text{per ogni } m, n\,.$$

Procedendo in questo modo, per induzione, per ogni $k \geq 1$ possiamo trovare una sottosuccessione $(f_n^{1/k})_n$ tale che

$$d_\infty(f_n^{1/k}, f_m^{1/k}) \leq \frac{1}{k}\,, \quad \text{per ogni } m, n\,.$$

Per ogni $k \geq 2$, la successione $(f_n^{1/k})_n$ è una sottosuccessione di $(f_n^{1/(k-1)})_n$. Poniamo allora

$$f_{n_k} = f_k^{1/k}\,.$$

Questa è una sottosuccessione di $(f_n)_n$. Inoltre si verifica facilmente che

$$d_\infty(f_{n_{k'}}, f_{n_{k''}}) \leq \frac{1}{k}\,, \quad \text{per ogni } k', k'' \geq k\,.$$

Pertanto $(f_{n_k})_k$ è una successione di Cauchy in $C(E,F)$, che è uno spazio completo, quindi converge. ■

17 Due teoremi che coinvolgono i limiti

Sia $I = [a,b]$, come sopra, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Ricordiamo che la funzione integrale $\int_a^\cdot f$ è una primitiva di f, quindi è sicuramente continua su I. È quindi possibile definire una funzione $\Psi : \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ in questo modo:

$$[\Psi(f)](x) = \int_a^x f\,.$$

Prendendo $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, per ogni $x \in [a, b]$ si ha che

$$\begin{aligned}\big|[\Psi(f)](x) - [\Psi(g)](x)\big| &= \Big|\int_a^x (f-g)\Big| \leq \int_a^x |f-g| \\ &\leq \int_a^b |f-g| \leq (b-a)\|f-g\|_\infty\,,\end{aligned}$$

da cui

$$\|\Psi(f) - \Psi(g)\|_\infty \leq (b-a)\|f-g\|_\infty\,.$$

Questo implica che Ψ è una funzione continua. Utilizzeremo questo fatto nei seguenti due teoremi che coinvolgono i limiti.

Consideriamo la situazione in cui una successione di funzioni continue $(f_n)_n$ converge puntualmente a una funzione f, cioè, per ogni $x \in I$,

$$\lim_n f_n(x) = f(x)\,.$$

La domanda è se f sia integrabile su I, con

$$\int_I f = \lim_n \int_I f_n\,,$$

cioè, se

$$\int_I \lim_n f_n = \lim_n \int_I f_n\,.$$

In altre parole, ci chiediamo se sia possibile scambiare le operazioni di integrale e di limite.

Esempio. Mostriamo innanzitutto che in alcuni casi la risposta potrebbe essere negativa. Consideriamo le funzioni $f_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, con $n = 1, 2, \dots$, definite da

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sin(nx) & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{n}]\,, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per ogni $x \in [0, \pi]$, abbiamo che $\lim_n f_n(x) = 0$, mentre

$$\int_0^\pi f_n(x)\,dx = \int_0^{\pi/n} n\sin(nx)\,dx = \int_0^\pi \sin(t)\,dt = 2\,.$$

Quindi, in questo caso,

$$\int_0^\pi \lim_n f_n = 0 \neq 2 = \lim_n \int_0^\pi f_n\,.$$

Nel seguente teorema, la risposta alla domanda posta sopra è positiva purché si assuma la convergenza uniforme.

Teorema 58 *Sia $(f_n)_n$ una successione uniformemente convergente in $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Allora,*

$$\int_a^b \lim_n f_n = \lim_n \int_a^b f_n \,.$$

Dimostrazione. Sia $\lim_n f_n = f : I \to \mathbb{R}$. Poiché la convergenza è uniforme, sappiamo che $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. Inoltre, essendo Ψ continua, abbiamo che $\lim_n \Psi(f_n) = \Psi(f)$, cioè,

$$\lim_n [\Psi(f_n)](x) = [\Psi(f)](x)\,, \qquad \text{uniformemente in } x \in [a,b]\,.$$

In particolare, prendendo $x = b$,

$$\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f\,,$$

che è ciò che volevamo dimostrare. ■

Nel secondo teorema viene analizzato il problema analogo riguardante la possibilità di scambiare le operazioni di derivata e di limite. Indicheremo con $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ che siano derivabili, con derivata continua.

Teorema 59 *Siano $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ una successione in $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ tale che*

$$\lim_n f_n(x_0) = y_0\,, \quad e \quad \lim_n f_n' = g \;\; \textit{uniformemente in } I\,.$$

Allora, $(f_n)_n$ converge uniformemente a una funzione f. Inoltre, $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ e $f' = g$. Di conseguenza, possiamo scrivere

$$\frac{d}{dx}\Big(\lim_n f_n(x)\Big) = \lim_n \Big(\frac{d}{dx} f_n(x)\Big)\,.$$

Dimostrazione. Definiamo la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ come segue:

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t)\,dt\,.$$

Poiché g è continua, la funzione f è derivabile e $f'(x) = g(x)$, per ogni $x \in I$. In particolare, $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$. La dimostrazione sarà completata provando che $(f_n)_n$ converge uniformemente a f.

Per il Teorema Fondamentale, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in I$ possiamo scrivere

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt\,,$$

ossia

$$f_n(x) = f_n(x_0) + [\Psi(f_n')](x) - [\Psi(f_n')](x_0)\,.$$

Poiché $\lim_n f_n' = g$ in $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, abbiamo che $\lim_n \Psi(f_n') = \Psi(g)$ in $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, cioè

$$\lim_n [\Psi(f_n')](x) = [\Psi(g)](x)\,, \qquad \text{uniformemente in } x \in I\,.$$

Quindi, siccome anche $\lim_n f_n(x_0) = y_0$, abbiamo che

$$\lim_n f_n(x) = y_0 + [\Psi(g)](x) - [\Psi(g)](x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\,, \quad \text{uniformemente in } x \in I\,.$$

Abbiamo quindi dimostrato che $(f_n)_n$ converge uniformemente a f. ■

Vediamo un esempio in cui l'uguaglianza non vale. Siano $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan(nx)\,.$$

Allora

$$\frac{d}{dx}\Big(\lim_n f_n(x)\Big) = \frac{d}{dx}\,0 = 0\,.$$

D'altra parte,

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}\,,$$

e quindi

$$\lim_n \Big(\frac{d}{dx} f_n(x)\Big) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

Parte II - Calcolo differenziale

18 Calcolo differenziale: funzioni da $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}$

In questa sezione, E sarà un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto di E e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione. Vogliamo estendere il concetto di derivata già introdotto nel caso $N = 1$. Iniziamo con il fissare una "direzione", ossia un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N$ tale che $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ (detto anche "versore"). Chiamiamo, se esiste, "derivata direzionale" di f in $\boldsymbol{x}_0$ nella direzione $\boldsymbol{v}$ il seguente limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} \,,$$

che verrà indicato con il simbolo

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) \,.$$

Se $\boldsymbol{v}$ coincide con un elemento $\boldsymbol{e}_k$ della base canonica $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_N]$ di $\mathbb{R}^N$, la derivata direzionale si chiamerà "derivata parziale" k-esima di f in $\boldsymbol{x}_0$ e si indicherà con

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) \,.$$

Se $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0)$, si ha quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0 + t, \dots, x_N^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0, \dots, x_N^0)}{t} \,, \end{aligned}$$

per cui si usa parlare di "derivata rispetto alla k-esima variabile".

Esistono delle funzioni che, pur avendo derivate direzionali in tutte le possibili direzioni, non sono continue. Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y^2}{(x^4 + y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\[2ex] 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

ha tutte le derivate direzionali nulle in $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)$, ma non è continua in tale punto, come si vede considerando la restrizione alla parabola $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. Questo fatto ci porta a cercare una generalizzazione più appropriata del concetto di derivata.

Definizione 60 *Diremo che la funzione f è "differenziabile" in $\boldsymbol{x}_0$ se esiste una applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ per cui si possa scrivere*

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \ell(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r(\boldsymbol{x}) \,,$$

dove r è una funzione tale che

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \frac{r(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} = 0 \,.$$

Se f è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$, l'applicazione lineare ℓ si chiama "differenziale" di f in $\boldsymbol{x}_0$ e si indica con il simbolo

$$df(\boldsymbol{x}_0) \,.$$

Teorema 61 *Se f è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$, allora f è continua in $\boldsymbol{x}_0$.*

Dimostrazione. Sappiamo che l'applicazione $\ell = df(\boldsymbol{x}_0)$, essendo lineare, è continua e $\ell(\boldsymbol{0}) = 0$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) &= \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} [f(\boldsymbol{x}_0) + \ell(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r(\boldsymbol{x})] \\ &= f(\boldsymbol{x}_0) + \ell(\boldsymbol{0}) + \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} r(\boldsymbol{x}) \\ &= f(\boldsymbol{x}_0) + \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \frac{r(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \\ &= f(\boldsymbol{x}_0) \,, \end{aligned}$$

il che dimostra che f è continua in $\boldsymbol{x}_0$. ∎

Seguendo un'abitudine consolidata per le applicazioni lineari, si usa spesso scrivere $df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}$ invece di $df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h})$.

Teorema 62 *Se f è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$, allora esistono tutte le derivate direzionali di f in $\boldsymbol{x}_0$: per ogni direzione $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N$ si ha*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) = df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v} \,.$$

Dimostrazione. Usando la definizione di differenziale, abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{df(\boldsymbol{x}_0)(t\boldsymbol{v}) + r(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v})}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t\, df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v} + r(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v})}{t} \\ &= df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v} + \lim_{t \to 0} \frac{r(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v})}{t} \,; \end{aligned}$$

d'altra parte, essendo $\|\boldsymbol{v}\| = 1$, si ha

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{r(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v})}{t}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{|r(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v})|}{\|(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v})-\boldsymbol{x}_0\|} = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{|r(\boldsymbol{x})|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|} = 0\,,$$

da cui la tesi. ■

In particolare, se $\boldsymbol{v}$ coincide con un elemento $\boldsymbol{e}_k$ della base canonica $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_N]$, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) = df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{e}_k\,.$$

Scrivendo il vettore $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^N$ come $\boldsymbol{h} = h_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + h_N\boldsymbol{e}_N$, abbiamo

$$\begin{aligned} df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} &= h_1 df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{e}_1 + h_2 df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{e}_2 + \dots + h_N df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{e}_N \\ &= h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) + \dots + h_N\frac{\partial f}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0)\,, \end{aligned}$$

ossia

$$df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0)h_k\,.$$

Introducendo il vettore "gradiente" di f in $\boldsymbol{x}_0$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0)\right)\,,$$

si può scrivere

$$df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{h}\,.$$

Possiamo quindi scrivere

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + r(\boldsymbol{x})\,,$$

con

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{r(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|} = 0\,.$$

Analizziamo con maggiore attenzione il caso $N = 2$. Come di consueto, invece di usare la notazione (x_1, x_2), gli elementi di $\mathbb{R}^2$ verranno denotati con (x, y). Fissato quindi il punto $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$, possiamo scrivere

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + r(x,y)\,,$$

con

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{r(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0\,.$$

Ricordando che il grafico di f è l'insieme

$$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\} ,$$

chiameremo "piano tangente" al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ l'insieme

$$\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\Big\} .$$

19 Funzioni di classe $\mathcal{C}^1$

Il seguente risultato è noto come "teorema del differenziale totale".

Teorema 63 *Se f possiede le derivate parziali in un intorno di $\boldsymbol{x}_0$ ed esse sono continue in $\boldsymbol{x}_0$, allora f è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$.*

Dimostrazione. Supporremo per semplicità di notazioni $N = 2$. Definiamo l'applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che ad ogni vettore $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ associa

$$\ell(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0)h_2 .$$

Vedremo che ℓ è proprio il differenziale di f in $\boldsymbol{x}_0$. Intanto, è lineare, come si vede immediatamente. Inoltre, scrivendo $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$ e $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, per il Teorema di Lagrange si ha

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) &= (f(x_1,x_2) - f(x_1^0,x_2)) + (f(x_1^0,x_2) - f(x_1^0,x_2^0)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2)(x_1-x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,\xi_2)(x_2-x_2^0) , \end{aligned}$$

per un certo $\xi_1 \in [x_1^0, x_1]$ e un certo $\xi_2 \in [x_2^0, x_2]$. Quindi,

$$\begin{aligned} r(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \ell(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0)\right](x_1 - x_1^0) + \\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,\xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0)\right](x_2 - x_2^0) , \end{aligned}$$

ed essendo $|x_1 - x_1^0| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|$ e $|x_2 - x_2^0| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|$,

$$\frac{|r(\boldsymbol{x})|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} \le \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,\xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0)\right| .$$

Facendo tendere $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x}_0$, si ha che $(\xi_1, x_2) \to (x_1^0, x_2^0)$ e $(x_1^0, \xi_2) \to (x_1^0, x_2^0)$ per cui, essendo $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ continue in $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$, si ha

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \frac{|r(\boldsymbol{x})|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} = 0 ,$$

da cui la tesi. ■

Diremo che la funzione f è di classe $\mathcal{C}^1$ su E se f possiede le derivate parziali ed esse sono continue su tutto E. Dal teorema precedente segue che una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ è "differenziabile su E", ossia in ogni punto di E.

20 Derivate parziali successive

Supponiamo, per semplicità, $N = 2$. Consideriamo E, un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ che abbia le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ in tutti i punti di E. Se esse posseggono a loro volta derivate parziali in un punto $\boldsymbol{x}_0$, queste si dicono "derivate parziali seconde" della f in $\boldsymbol{x}_0$ e si denotano con i simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0)\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Teorema 64 (di Schwarz) *Se esistono le derivate parziali seconde* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ *in un intorno di* $\boldsymbol{x}_0$ *ed esse sono continue in* $\boldsymbol{x}_0$, *allora*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Dimostrazione. Sia $\rho > 0$ tale che $B(\boldsymbol{x}_0, \rho) \subseteq E$. Scriviamo $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$ e prendiamo un $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in B(\boldsymbol{x}_0, \rho)$ tale che $x_1 \neq x_1^0$ e $x_2 \neq x_2^0$. Possiamo allora definire

$$g(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2^0)}{x_2 - x_2^0}\,, \quad h(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2)}{x_1 - x_1^0}\,.$$

Si verifica che vale l'uguaglianza

$$\frac{g(x_1, x_2) - g(x_1^0, x_2)}{x_1 - x_1^0} = \frac{h(x_1, x_2) - h(x_1, x_2^0)}{x_2 - x_2^0}\,.$$

Per il Teorema di Lagrange, esiste un $\xi_1 \in]x_1^0, x_1[$ tale che

$$\frac{g(x_1, x_2) - g(x_1^0, x_2)}{x_1 - x_1^0} = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1, x_2) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0)}{x_2 - x_2^0}\,,$$

ed esiste un $\xi_2 \in]x_2^0, x_2[$ tale che

$$\frac{h(x_1, x_2) - h(x_1, x_2^0)}{x_2 - x_2^0} = \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, \xi_2)}{x_1 - x_1^0}\,.$$

Di nuovo per il Teorema di Lagrange, esiste un $\eta_2 \in]x_2^0, x_2[$ tale che

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0)}{x_2 - x_2^0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi_1, \eta_2)\,,$$

ed esiste un $\eta_1 \in]x_1^0, x_1[$ tale che

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, \xi_2)}{x_1 - x_1^0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\eta_1, \xi_2)\,.$$

Quindi,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi_1, \eta_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\eta_1, \xi_2)\,.$$

Facendo tendere $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ a $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$, si ha che sia (ξ_1, η_2) che (η_1, ξ_2) tendono a $\boldsymbol{x}_0$, e per la continuità delle derivate seconde miste si ha la tesi. ■

Diremo che la funzione f è di classe $\mathcal{C}^2$ su E se f possiede tutte le derivate parziali seconde ed esse sono continue su tutto E. Dal teorema precedente segue che se una funzione è di classe $\mathcal{C}^2$, le derivate parziali “miste” sono uguali.

È utile definire la “matrice hessiana” di f nel punto $\boldsymbol{x}_0$:

$$Hf(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix};$$

se f è di classe $\mathcal{C}^2$, si tratta di una matrice simmetrica.

Quanto sopra si può estendere senza difficoltà alle funzioni di N variabili, con N qualunque. Se f è di classe $\mathcal{C}^2$, la matrice hessiana risulta allora una matrice simmetrica del tipo $N \times N$:

$$Hf(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) \\ \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Procedendo per induzione, si possono definire le derivate parziali n-esime di una funzione. Si dice che la funzione f è di classe $\mathcal{C}^n$ su E se f possiede tutte le derivate parziali n-esime ed esse sono continue su tutto E.

21 La formula di Taylor

Supponiamo ora che $f : E \to \mathbb{R}$ sia una funzione di classe $\mathcal{C}^{n+1}$, per un certo $n \geq 1$.

Consideriamo come sopra, per semplicità, il caso $N = 2$. Introduciamo le seguenti notazioni:

$$D_{x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\,, \quad D_{x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\,,$$

$$D_{x_1}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\,, \quad D_{x_1}D_{x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\,, \quad D_{x_2}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\,,$$

e così via, per le derivate parziali successive. Si noti che, per un vettore $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = h_1 D_{x_1} f(\boldsymbol{x}_0) + h_2 D_{x_2} f(\boldsymbol{x}_0)\,,$$

che risulterà conveniente scrivere

$$df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = [h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}] f(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

In questo modo, possiamo pensare che f viene trasformata dall'operatore $[h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]$ nella nuova funzione $[h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]f = h_1 D_{x_1} f + h_2 D_{x_2} f$.

Dati due punti $\boldsymbol{x}_0$ e $\boldsymbol{x}$ in $\mathbb{R}^N$, si definisce il "segmento" che li congiunge:

$$[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}] = \{\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) : t \in [0,1]\}\,;$$

analogamente, scriveremo

$$]\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}[= \{\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) : t \in]0,1[\,\}\,.$$

Supponiamo ora che $[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}]$ sia un segmento contenuto in E e consideriamo la funzione $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\phi(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))\,.$$

Dimostriamo che ϕ è derivabile $n+1$ volte su $[0,1]$. Per $t \in [0,1]$, essendo f differenziabile in $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$, si ha

$$f(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}_0) + df(\boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0) + r(\boldsymbol{u})\,,$$

con

$$\lim_{\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}_0} \frac{r(\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0\|} = 0\,.$$

Quindi,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to t}\frac{\phi(s)-\phi(t)}{s-t} &= \lim_{s\to t}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))-f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))}{s-t}\\ &= \lim_{s\to t}\frac{df(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))((s-t)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))+r(\boldsymbol{x}_0+s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))}{s-t}\\ &= df(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\lim_{s\to t}\frac{r(\boldsymbol{x}_0+s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))}{s-t}\,,\end{aligned}$$

ed essendo

$$\lim_{s\to t}\left|\frac{r(\boldsymbol{x}_0+s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))}{s-t}\right| = \lim_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{u}_0}\frac{|r(\boldsymbol{u})|}{\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0\|}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| = 0\,,$$

si ha

$$\phi'(t) = \lim_{s\to t}\frac{\phi(s)-\phi(t)}{s-t} = df(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Con le nuove notazioni, ponendo $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{h}=(h_1,h_2)$, abbiamo

$$\phi'(t) = [h_1D_{x_1}+h_2D_{x_2}]f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)) = g(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))\,,$$

dove g è la nuova funzione $[h_1D_{x_1}+h_2D_{x_2}]f$. Possiamo allora iterare il procedimento, e calcolare la derivata seconda di ϕ:

$$\begin{aligned}\phi''(t) &= [h_1D_{x_1}+h_2D_{x_2}]g(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))\\ &= [h_1D_{x_1}+h_2D_{x_2}][h_1D_{x_1}+h_2D_{x_2}]f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))\,.\end{aligned}$$

Per brevità, scriveremo

$$\phi''(t) = [h_1D_{x_1}+h_2D_{x_2}]^2f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))\,.$$

Notiamo che, usando la linearità delle derivate parziali e l'uguaglianza delle derivate miste (Teorema di Schwarz), si ha

$$\begin{aligned}[h_1D_{x_1}+h_2D_{x_2}]^2f &= h_1^2D_{x_1}^2f+2h_1h_2D_{x_1}D_{x_2}f+h_2^2D_{x_2}^2f\\ &= [h_1^2D_{x_1}^2+2h_1h_2D_{x_1}D_{x_2}+h_2^2D_{x_2}^2]f\,.\end{aligned}$$

Osserviamo che l'espressione

$$[h_1D_{x_1}+h_2D_{x_2}]^2 = [h_1^2D_{x_1}^2+2h_1h_2D_{x_1}D_{x_2}+h_2^2D_{x_2}^2]$$

si ottiene formalmente come il quadrato di un binomio. Procedendo in questo modo, si può dimostrare per induzione che, per $k=1,2,\ldots,n+1$, la formula della derivata k-esima di ϕ è

$$\phi^{(k)}(t) = [h_1D_{x_1}+h_2D_{x_2}]^kf(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))\,,$$

e che, usando formalmente la formula del binomio di Newton

$$(a_1 + a_2)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_1^{k-j} a_2^j,$$

si ha

$$[h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]^k = \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} h_1^{k-j} h_2^j D_{x_1}^{k-j} D_{x_2}^j \right]$$

(in questa formula, i simboli $D_{x_1}^0$ e $D_{x_2}^0$ vanno interpretati come l'operatore identità).

Per poter scrivere agevolmente la formula di Taylor, introduciamo la notazione

$$d^k f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}^k = [h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]^k f(\boldsymbol{x}_0) .$$

Teorema 65 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^{n+1}$ e $[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}]$ un segmento contenuto in E. Allora esiste un $\boldsymbol{\xi} \in]\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}[$ tale che*

$$f(\boldsymbol{x}) = p_n(\boldsymbol{x}) + r_n(\boldsymbol{x}) ,$$

dove

$$p_n(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^n$$

è il "polinomio di Taylor di grado n associato alla funzione f nel punto $\boldsymbol{x}_0$" e

$$r_n(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^{n+1}$$

è il "resto di Lagrange".

Dimostrazione. Per la formula di Taylor applicata alla funzione ϕ, si ha

$$\phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2!}\phi''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\phi^{(n)}(0)t^n + \frac{1}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\xi)t^{n+1} ,$$

per un certo $\xi \in]0, t[$. La formula cercata si ottiene prendendo $t = 1$ e sostituendo i valori delle derivate di ϕ trovati sopra. ■

Il polinomio di Taylor si può anche scrivere nella forma compatta

$$p_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^k ,$$

con la convenzione che $d^0 f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^0$, il primo addendo della somma, sia $f(\boldsymbol{x}_0)$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} p_n(\boldsymbol{x}) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}[(x_1-x_1^0)D_{x_1}+(x_2-x_2^0)D_{x_2}]^k f(\boldsymbol{x}_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-j}\partial x_2^j}(\boldsymbol{x}_0)\ (x_1-x_1^0)^{k-j}(x_2-x_2^0)^j\right). \end{aligned}$$

Può essere utile la seguente espressione per il polinomio di secondo grado:

$$p_2(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)+\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\tfrac{1}{2}\Big(Hf(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\Big)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Il teorema sopra dimostrato resta valido per qualsiasi dimensione N, pur di interpretare correttamente le notazioni: ad esempio, per un vettore $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\dots,h_N)$, si dovrà leggere

$$d^k f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}^k = [h_1D_{x_1}+h_2D_{x_2}+\cdots+h_ND_{x_N}]^k f(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

In questo caso, volendo esplicitare il polinomio di Taylor, sarà utile utilizzare la formula di Leibniz

$$(a_1+a_2+\cdots+a_N)^k = \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_N=k}\frac{k!}{m_1!\,m_2!\cdots m_N!}\,a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_N^{m_N}\,.$$

22 La ricerca di massimi e minimi

Come sopra, consideriamo un insieme aperto $E\subseteq\mathbb{R}^N$ e una funzione $f:E\to\mathbb{R}$. Diremo che $\boldsymbol{x}_0\in E$ è un "punto di massimo locale" per la funzione f se esiste un intorno U di x_0 contenuto in E per cui x_0 è punto di massimo della restrizione di f a U. Equivalentemente, se

$$\exists\delta>0:\ \forall\boldsymbol{x}\in E\quad d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)<\delta\ \Rightarrow\ f(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Analogamente per "punto di minimo locale".

Teorema 66 (di Fermat) *Se $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di massimo o di minimo locale e f è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$, allora $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)=0$.*

Dimostrazione. Se $\boldsymbol{x}_0$ è punto di massimo locale, per ogni direzione $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^N$ avremo che

$$\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}\quad\begin{cases}\ge 0 & \text{se } t<0\,,\\ \le 0 & \text{se } t>0\,.\end{cases}$$

Siccome f è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$, ne deduciamo che

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} = 0\,.$$

In particolare, sono nulle tutte le derivate parziali, per cui $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = 0$. Nel caso in cui $\boldsymbol{x}_0$ sia un punto di minimo locale, si procede in modo analogo. ■

Un punto il cui il gradiente si annulli è detto "punto stazionario". Naturalmente un tale punto potrebbe non essere nè di massimo nè di minimo.

Mostreremo ora come la formula di Taylor possa essere usata per stabilire un criterio affinchè un punto stazionario sia di massimo, o di minimo. Iniziamo con una definizione. Diremo che una matrice $\mathbb{A}$ simmetrica $N \times N$ è *definita positiva* se

$$[\mathbb{A}\boldsymbol{h}]\cdot \boldsymbol{h} > 0\,, \qquad \text{per ogni } \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\boldsymbol{0}\}\,.$$

Diremo che $\mathbb{A}$ è *definita negativa* se vale la disuguaglianza opposta, ossia se $-\mathbb{A}$ è definita positiva.

Teorema 67 *Se $\boldsymbol{x}_0$ è un punto stazionario e f è di classe $\mathcal{C}^2$, con matrice hessiana $Hf(\boldsymbol{x}_0)$ definita positiva, allora $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di minimo locale. Se invece $Hf(\boldsymbol{x}_0)$ è definita negativa, allora $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di massimo locale.*

<u>Dimostrazione</u>. Per la formula di Taylor, per $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$ in un intorno di $\boldsymbol{x}_0$ esiste un $\boldsymbol{\xi} \in]\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}[$ per cui

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + \tfrac{1}{2}\Big(Hf(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\Big)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Se $\mathbb{A} = Hf(\boldsymbol{x}_0)$ è definita positiva, esiste un $c > 0$ tale che, per ogni $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N$ con $\|\boldsymbol{v}\| = 1$,

$$[\mathbb{A}\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{v} \geq c\,.$$

(Abbiamo qui usato il Teorema di Weierstrass, e il fatto che la sfera $\{v \in \mathbb{R}^N : \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$ è un insieme compatto.) Quindi

$$\Big(Hf(\boldsymbol{x}_0)\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\Big)\cdot\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|} \geq c\,.$$

Per la continuità delle derivate seconde, se $\boldsymbol{x}$ è sufficientemente vicino a $\boldsymbol{x}_0$,

$$\Big(Hf(\boldsymbol{\xi})\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\Big)\cdot\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|} \geq \tfrac{1}{2}c > 0\,.$$

(Lo si vede per assurdo, usando di nuovo la compattezza della sfera.) Essendo $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$, per tali $\boldsymbol{x}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}_0) + \tfrac{1}{2}\Big(Hf(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\Big)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \\ &\geq f(\boldsymbol{x}_0) + \tfrac{1}{2}c\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2 > f(\boldsymbol{x}_0)\,, \end{aligned}$$

per cui $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di minimo locale.

La dimostrazione della seconda affermazione è analoga. ■

Enunciamo ora (senza dimostrazione) due criteri utili a stabilire quando una matrice $\mathbb{A}$ simmetrica $N \times N$ è definita positiva o negativa. Ricordiamo che gli autovalori di una matrice simmetrica sono tutti reali.

Primo criterio. *La martrice $\mathbb{A}$ è definita positiva se tutti i suoi autovalori sono positivi. Essa è definita negativa se tutti i suoi autovalori sono negativi.*

Secondo criterio. *La martrice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{ij}$ è definita positiva se*

$$\begin{aligned}
&a_{11} > 0\,,\\
&\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0\,,\\
&\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > 0\,,\ \dots\\
&\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} > 0\,.
\end{aligned}$$

Essa è definita negativa se i determinanti scritti sopra hanno segno alternato: quelli delle sottomatrici con un numero dispari di righe e di colonne sono negativi, mentre quelli delle sottomatrici con un numero pari di righe e di colonne sono positivi.

23 Il differenziale di una funzione a valori vettoriali

Sia E un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto di E e $f : E \to \mathbb{R}^M$ una funzione.

Definizione 68 *Diremo che la funzione f è "differenziabile" in $\boldsymbol{x}_0$ se esiste una applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ per cui si possa scrivere*

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \ell(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r(\boldsymbol{x})\,,$$

dove r è una funzione tale che

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \frac{r(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} = \mathbf{0}\,.$$

Se f è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$, l'applicazione lineare ℓ si chiama "differenziale" di f in $\boldsymbol{x}_0$ e si indica con il simbolo

$$df(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Siano $f_1, f_2, \dots, f_M$ le componenti di f, per cui

$$f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \dots, f_M(\boldsymbol{x}))\,.$$

Teorema 69 *La funzione f è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$ se e solo se lo sono tutte le sue componenti. In tal caso, per ogni vettore $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ si ha*

$$df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = (df_1(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}, df_2(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}, \dots, df_M(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h})\,.$$

Dimostrazione. Considerando le componenti nell'equazione

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \ell(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r(\boldsymbol{x})\,,$$

possiamo scrivere

$$f_k(\boldsymbol{x}) = f_k(\boldsymbol{x}_0) + \ell_k(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r_k(\boldsymbol{x})\,,$$

con $k = 1, 2, \dots, M$, e sappiamo che

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \frac{r(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \frac{r_k(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} = 0 \ \text{ per ogni } k = 1, 2, \dots, M\,,$$

da cui la tesi. ■

Il teorema precedente permette di ricondurre lo studio del differenziale di una funzione a valori vettoriali a quello delle sue componenti, che sono funzioni a valori scalari.

È utile considerare la matrice associata all'applicazione lineare $\ell = df(\boldsymbol{x}_0)$, data da

$$\begin{pmatrix} \ell_1(\boldsymbol{e}_1) & \ell_1(\boldsymbol{e}_2) & \dots & \ell_1(\boldsymbol{e}_N) \\ \ell_2(\boldsymbol{e}_1) & \ell_2(\boldsymbol{e}_2) & \dots & \ell_2(\boldsymbol{e}_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_M(\boldsymbol{e}_1) & \ell_M(\boldsymbol{e}_2) & \dots & \ell_M(\boldsymbol{e}_N) \end{pmatrix},$$

dove $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots \boldsymbol{e}_N$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^N$. Tale matrice si chiama "matrice jacobiana" associata alla funzione f nel punto $\boldsymbol{x}_0$ e si denota con $Jf(\boldsymbol{x}_0)$. Ricordando che

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) = df_k(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{e}_j\,,$$

con $k = 1, 2, \dots, M$ e $j = 1, 2, \dots, N$, si ottiene la matrice

$$Jf(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_M}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Si noti che, nel caso $M = 1$, la matrice jacobiana $Jf(\boldsymbol{x}_0)$ risulta essere la matrice trasposta del gradiente $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$.

Studiamo ora la differenziabilità di una funzione composta.

Teorema 70 *Se $f : E \to \mathbb{R}^M$ è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$, E' è un aperto di $\mathbb{R}^M$ contenente $f(E)$ e $g : E' \to \mathbb{R}^L$ è differenziabile in $f(\boldsymbol{x}_0)$, allora $g \circ f$ è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$, e si ha*

$$d(g \circ f)(\boldsymbol{x}_0) = dg(f(\boldsymbol{x}_0)) \circ df(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Dimostrazione. Ponendo $\boldsymbol{y}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$, si ha

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r_1(\boldsymbol{x})\,, \quad g(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y}_0) + dg(\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0) + r_2(\boldsymbol{y})\,,$$

con

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \frac{r_1(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} = \boldsymbol{0}\,, \quad \lim_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y}_0} \frac{r_2(\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\|} = \boldsymbol{0}\,.$$

Introduciamo la funzione $R_2 : E' \to \mathbb{R}^L$ così definita:

$$R_2(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{r_2(\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\|} & \text{se } \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}_0\,, \\[2ex] \boldsymbol{0} & \text{se } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0\,. \end{cases}$$

Si noti che R_2 è continua in $\boldsymbol{y}_0$. Allora

$$\begin{aligned} g(f(\boldsymbol{x})) &= g(f(\boldsymbol{x}_0)) + dg(f(\boldsymbol{x}_0))[f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)] + r_2(f(\boldsymbol{x})) \\ &= g(f(\boldsymbol{x}_0)) + dg(f(\boldsymbol{x}_0))[df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r_1(\boldsymbol{x})] + r_2(f(\boldsymbol{x})) \\ &= g(f(\boldsymbol{x}_0)) + [dg(f(\boldsymbol{x}_0)) \circ df(\boldsymbol{x}_0)](\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r_3(\boldsymbol{x})\,, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} r_3(\boldsymbol{x}) &= dg(f(\boldsymbol{x}_0))(r_1(\boldsymbol{x})) + r_2(f(\boldsymbol{x})) \\ &= dg(f(\boldsymbol{x}_0))(r_1(\boldsymbol{x})) + \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)\| R_2(f(\boldsymbol{x})) \\ &= dg(f(\boldsymbol{x}_0))(r_1(\boldsymbol{x})) + \|df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r_1(\boldsymbol{x})\| R_2(f(\boldsymbol{x}))\,. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \frac{\|r_3(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} \leq & \left\| dg(f(\boldsymbol{x}_0)) \left(\frac{r_1(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} \right) \right\| + \\ & + \left(\left\| df(\boldsymbol{x}_0) \left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} \right) \right\| + \frac{\|r_1(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} \right) \|R_2(f(\boldsymbol{x}))\|\,. \end{aligned}$$

Se $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$, il primo addendo tende a 0, poiché $dg(f(\boldsymbol{x}_0))$ è continua; f è continua in $\boldsymbol{x}_0$ e R_2 è continua in $\boldsymbol{y}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$ con $R_2(\boldsymbol{y}_0)) = \boldsymbol{0}$, per cui $\|R_2(f(\boldsymbol{x}))\|$ tende a 0; $df(\boldsymbol{x}_0)$, essendo continua, è limitata sull'insieme compatto $\bar{B}(\boldsymbol{0}, 1)$. Quindi, si ha che

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \frac{\|r_3(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} = 0\,.$$

Ne segue che $g \circ f$ è differenziabile in x_0 con differenziale $dg(f(\boldsymbol{x}_0)) \circ df(\boldsymbol{x}_0)$. ■

Come noto, la matrice associata alla composizione di due applicazioni lineari è il prodotto delle due matrici corrispondenti. Dal teorema precedente abbiamo quindi la seguente formula per le matrici jacobiane:

$$J(g \circ f)(\boldsymbol{x}_0) = Jg(f(\boldsymbol{x}_0)) \cdot Jf(\boldsymbol{x}_0)\,,$$

ossia

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) \cdots & \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \quad \dots & \vdots \\ \frac{\partial (g\circ f)_L}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) \cdots & \frac{\partial (g\circ f)_L}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(\boldsymbol{x}_0)) \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_M}(f(\boldsymbol{x}_0)) \\ \vdots \quad \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_L}{\partial y_1}(f(\boldsymbol{x}_0)) \cdots & \frac{\partial g_L}{\partial y_M}(f(\boldsymbol{x}_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \quad \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Ne segue la formula per le derivate parziali:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) = \\ &= \frac{\partial g_i}{\partial y_1}(f(\boldsymbol{x}_0))\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}(f(\boldsymbol{x}_0))\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial y_M}(f(\boldsymbol{x}_0))\frac{\partial f_M}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) \\ &= \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(\boldsymbol{x}_0))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\,, \end{aligned}$$

dove $i = 1, 2, \dots, L$ e $j = 1, 2, \dots, N$.

24 Il teorema della funzione implicita - primo enunciato

Il seguente risultato porta il nome di Ulisse Dini.

Teorema 71 *Siano $E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un aperto, $g : E \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e (x_0, y_0) un punto di E per cui si abbia:*

$$g(x_0, y_0) = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0\,.$$

Allora esistono un intorno aperto U di x_0, un intorno aperto V di y_0 e una funzione $\eta : U \to V$ tali che $U \times V \subseteq E$ e, presi $x \in U$ e $y \in V$, si ha:

$$g(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \eta(x)\,.$$

Inoltre, la funzione η è di classe $\mathcal{C}^1$ e vale la formula

$$\eta'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,\eta(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,\eta(x))}\,.$$

La funzione η risulta definita "implicitamente" dall'equazione $g(x,y) = 0$; il suo grafico è l'insieme

$$Gr(\eta) = \{(x,y) \in U \times V : g(x,y) = 0\}\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo ad esempio $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) > 0$. Per la proprietà di permanenza del segno, esiste un $\delta > 0$ tale che, se $|x - x_0| \le \delta$ e $|y - y_0| \le \delta$, allora $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) > 0$. Quindi, per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, la funzione $g(x,\cdot)$ è strettamente crescente su $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$. Essendo $g(x_0,y_0) = 0$, avremo che

$$g(x_0, y_0 - \delta) < 0 < g(x_0, y_0 + \delta)\,.$$

Per la permanenza del segno, esiste un $\delta' > 0$ tale che, se $x \in [x_0 - \delta', x_0 + \delta']$, allora

$$g(x, y_0 - \delta) < 0 < g(x, y_0 + \delta)\,.$$

Definiamo $U =]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[$ e $V =]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$. Quindi, per ogni $x \in U$, siccome $g(x,\cdot)$ è strettamente crescente, esiste uno ed un solo $y \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$ per cui $g(x,y) = 0$; chiamo $\eta(x)$ tale y. Resta così definita una funzione $\eta : U \to V$ tale che, presi $x \in U$ e $y \in V$, si ha:

$$g(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \eta(x)\,.$$

Per vedere che η è continua, fissiamo ora un $\bar{x} \in U$ e dimostriamo la continuità in $\bar{x}$. Preso un $x \in U$ e considerata la funzione $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definita da

$$\gamma(t) = (\bar{x} + t(x - \bar{x}), \eta(\bar{x}) + t(\eta(x) - \eta(\bar{x}))),$$

applicando il Teorema di Lagrange alla funzione $g \circ \gamma$ si ha che esiste un $\xi \in]0,1[$ per cui

$$g(x,\eta(x)) - g(\bar{x},\eta(\bar{x})) = \frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(\xi))(x - \bar{x}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi))(\eta(x) - \eta(\bar{x}))\,.$$

Essendo $g(x,\eta(x)) = g(\bar{x},\eta(\bar{x})) = 0$, si ha che

$$|\eta(x) - \eta(\bar{x})| = \left|\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(\xi))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi))}\right| |x - \bar{x}|\,.$$

Siccome le derivate parziali di g sono continue e $\frac{\partial g}{\partial y}$ è non nulla sul compatto $\overline{U} \times \overline{V}$, si ha che $|\frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(\xi))(\frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi)))^{-1}|$ è limitato superiormente e ne segue la continuità di η in $\bar{x}$. Resta da vedere la derivabilità: procedendo come sopra si ha che

$$\frac{\eta(x) - \eta(\bar{x})}{x - \bar{x}} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(\xi))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi))},$$

con $\gamma(\xi)$ appartenente al segmento che congiunge $(\bar{x}, \eta(\bar{x}))$ con $(x, \eta(x))$. Se x tende a $\bar{x}$, si ha che $\gamma(\xi)$ tende a $(\bar{x}, \eta(\bar{x}))$ e quindi

$$\eta'(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{\eta(x) - \eta(\bar{x})}{x - \bar{x}} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \eta(\bar{x}))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \eta(\bar{x}))}.$$

Ne segue che η è di classe $\mathcal{C}^1$. ■

Vale naturalmente anche il seguente enunciato simmetrico rispetto al precedente.

Teorema 72 *Siano $E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un aperto, $g : E \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e (x_0, y_0) un punto di E per cui si abbia:*

$$g(x_0, y_0) = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0\,.$$

Allora esistono un intorno aperto U di x_0, un intorno aperto V di y_0 e una funzione $\eta : V \to U$ tali che $U \times V \subseteq E$ e, presi $x \in U$ e $y \in V$, si ha:

$$g(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \eta(y)\,.$$

Inoltre, la funzione η è di classe $\mathcal{C}^1$ e vale la formula

$$\eta'(y) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(y, \eta(y))}{\frac{\partial g}{\partial x}(y, \eta(y))}.$$

25 Il teorema della funzione implicita - caso generale

Vediamo come si generalizza il teorema della funzione implicita. Considereremo un insieme aperto E di $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ e una funzione $g : E \to \mathbb{R}^N$, di classe $\mathcal{C}^1$. Quindi, g ha N componenti

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \ldots, g_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))\,.$$

Qui $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_M) \in \mathbb{R}^M$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$. Useremo la seguente notazione per le matrici jacobiane:

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & \cdots & \frac{\partial g_N}{\partial x_M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & \cdots & \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix}.$$

Possiamo ora enunciare il Teorema di Dini in questo caso più generale.

Teorema 73 *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ un aperto, $g : E \to \mathbb{R}^N$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ un punto di E per cui si abbia:*

$$g(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}, \qquad \det \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \neq 0 .$$

Allora esistono un intorno aperto U di $\boldsymbol{x}_0$, un intorno aperto V di $\boldsymbol{y}_0$ e una funzione $\eta : U \to V$ tali che $U \times V \subseteq E$ e, presi $\boldsymbol{x} \in U$ e $\boldsymbol{y} \in V$, si ha:

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y} = \eta(\boldsymbol{x}) .$$

Inoltre, la funzione η è di classe $\mathcal{C}^1$ e vale la formula

$$J\eta(\boldsymbol{x}) = -\left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \eta(\boldsymbol{x})) \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \eta(\boldsymbol{x})) .$$

Dimostrazione. Faremo la dimostrazione per induzione su N.

Nel caso $N = 1$ e $M \geq 2$, si procede in modo del tutto analogo a quanto già fatto nel caso $M = 1$. Basterà prendere, al posto dell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, la palla chiusa $\overline{B}(\boldsymbol{x}_0, \delta)$, e similmente per gli intorni aperti di $\boldsymbol{x}_0$, per dimostrare l'esistenza e la continuità della funzione η. Resta da vedere la derivabilità: considerato $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_M)$, prendiamo ora $\boldsymbol{x} = (\bar{x}_1 + h, \ldots, \bar{x}_M)$; procedendo come in precedenza, si ha che

$$\frac{\eta(\bar{x}_1 + h, \ldots, \bar{x}_M) - \eta(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_M)}{h} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(\gamma(\xi))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi))} ,$$

con $\gamma(\xi)$ appartenente al segmento che congiunge $(\bar{\boldsymbol{x}}, \eta(\bar{\boldsymbol{x}}))$ con $(\boldsymbol{x}, \eta(\boldsymbol{x}))$. Se h tende a 0, si ha che $\gamma(\xi)$ tende a $(\bar{\boldsymbol{x}}, \eta(\bar{\boldsymbol{x}}))$ e quindi

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \lim_{h \to 0} \frac{\eta(\bar{x}_1 + h, \ldots, \bar{x}_M) - \eta(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_M)}{h} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{\boldsymbol{x}}, \eta(\bar{\boldsymbol{x}}))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{\boldsymbol{x}}, \eta(\bar{\boldsymbol{x}}))} .$$

Analogamente si calcolano le derivate parziali rispetto a $x_2, \ldots, x_M$, per cui si vede che η è di classe $\mathcal{C}^1$ e

$$J\eta(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{x}, \eta(\boldsymbol{x}))} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \eta(\boldsymbol{x})) .$$

Supponiamo ora l'enunciato valido fino a $N - 1$, per un certo $N \geq 2$ (e $M \geq 1$ qualsiasi) e dimostriamo che vale anche per N. Useremo la notazione

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = (y_1, \ldots, y_{N-1}) ,$$

per cui scriveremo $y = (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, y_N)$. Siccome

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \end{pmatrix} \neq 0\,,$$

almeno uno degli elementi dell'ultima colonna è non nullo. Possiamo supporre senza perdita di generalità, eventualmente permutando le righe, che sia $\frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \neq 0$. Scrivendo $\boldsymbol{y}_0 = (\tilde{\boldsymbol{y}}_1^0, y_N^0)$, con $\tilde{\boldsymbol{y}}_1^0 = (y_1^0, \dots, y_{N-1}^0)$, sarà

$$g_N(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0, y_N^0) = 0\,, \qquad \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0, y_N^0) \neq 0\,.$$

Allora (caso unidimensionale) esistono un intorno aperto U_1 di $(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0)$, un intorno aperto V_N di y_N^0 e una funzione $\eta_1 : U_1 \to V_N$ di classe $\mathcal{C}^1$ tali che $U_1 \times V_N \subseteq E$, per cui si abbia: se $(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1) \in U_1$ e $y_N \in V_N$,

$$g_N(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, y_N) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_N = \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1)\,,$$

e

$$J\eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1) = -\frac{1}{\frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1)))}\, \frac{\partial g_N}{\partial(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1)}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1))\,.$$

Possiamo supporre U_1 della forma $\tilde{U} \times \tilde{V}_1$, con $\tilde{U}$ intorno aperto di $\boldsymbol{x}_0$ e $\tilde{V}_1$ intorno aperto di $\tilde{\boldsymbol{y}}_1^0$. Definiamo la funzione $\phi : \tilde{U} \times \tilde{V}_1 \to \mathbb{R}^{N-1}$, ponendo

$$\phi(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1) = (g_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1)), \dots, g_{N-1}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1)))\,.$$

Per brevità, scriveremo

$$g_{(1,\dots,N-1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \dots, g_{N-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))\,.$$

Notiamo che $\phi(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0) = 0$ e che, essendo $\eta_1(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0) = y_N^0$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0) = \frac{\partial g_{(1,\dots,N-1)}}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) + \frac{\partial g_{(1,\dots,N-1)}}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \frac{\partial \eta_1}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0)\,. \qquad (*)$$

Inoltre, siccome $g_N(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1)) = 0$, per ogni $(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1) \in U_1$, differenziando si ha:

$$0 = \frac{\partial g_N}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) + \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \frac{\partial \eta_1}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0)\,. \qquad (**)$$

Scriviamo

$$\det \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0) = \frac{1}{\frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)} \det \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial \phi}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0) & \dfrac{\partial g_{(1,\dots,N-1)}}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \\ \hline 0 & \dfrac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \end{array} \right),$$

avendo usato la notazione di matrice suddivisa a blocchi. Sostituendo le due uguaglianze $(*)$, $(**)$ e usando le proprietà dei determinanti, si ha:

$$
\begin{aligned}
&\det\left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial\phi}{\partial\tilde y_1}(x_0,\tilde y_1^0) & \dfrac{\partial g_{(1,\dots,N-1)}}{\partial y_N}(x_0,y_0) \\ \hline 0 & \dfrac{\partial g_N}{\partial y_N}(x_0,y_0)\end{array}\right) = \\
&= \det\left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial g_{(1,\dots,N-1)}}{\partial\tilde y_1}(x_0,y_0) + \dfrac{\partial g_{(1,\dots,N-1)}}{\partial y_N}(x_0,y_0)\dfrac{\partial\eta_1}{\partial\tilde y_1}(x_0,\tilde y_1^0) & \dfrac{\partial g_{(1,\dots,N-1)}}{\partial y_N}(x_0,y_0) \\ \hline \dfrac{\partial g_N}{\partial\tilde y_1}(x_0,y_0) + \dfrac{\partial g_N}{\partial y_N}(x_0,y_0)\dfrac{\partial\eta_1}{\partial\tilde y_1}(x_0,\tilde y_1^0) & \dfrac{\partial g_N}{\partial y_N}(x_0,y_0)\end{array}\right) \\
&= \det\left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial g}{\partial\tilde y_1}(x_0,y_0) + \dfrac{\partial g}{\partial y_N}(x_0,y_0)\dfrac{\partial\eta_1}{\partial\tilde y_1}(x_0,\tilde y_1^0) & \dfrac{\partial g}{\partial y_N}(x_0,y_0)\end{array}\right) \\
&= \det\left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial g}{\partial\tilde y_1}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial g}{\partial y_N}(x_0,y_0)\end{array}\right) = \det\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0\,.
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi

$$\phi(\boldsymbol{x}_0,\tilde{\boldsymbol{y}}_1^0) = \mathbf{0}\,, \qquad \det\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0,\tilde{\boldsymbol{y}}_1^0) \neq 0\,.$$

Per l'ipotesi induttiva, esistono un intorno aperto U di $\boldsymbol{x}_0$, un intorno aperto V_1 di $\tilde{\boldsymbol{y}}_1^0$ e una funzione $\eta_2 : U \to V_1$ di classe $\mathcal{C}^1$ tali che $U\times V_1 \subseteq \tilde U \times \tilde V_1$, per cui si abbia: per ogni $\boldsymbol{x}\in U$ e $\tilde{\boldsymbol{y}}_1 \in V_1$,

$$\phi(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}}_1) = \mathbf{0} \quad\Leftrightarrow\quad \tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \eta_2(\boldsymbol{x})\,.$$

In conclusione, per $\boldsymbol{x}\in U$ e $\boldsymbol{y} = (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, y_N) \in V_1\times V_2$, si ha:

$$
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} g_{(1,\dots,N-1)}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}}_1,y_N) = \mathbf{0} \\ g_N(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}}_1,y_N) = 0\end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} g_{(1,\dots,N-1)}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}}_1,y_N) = \mathbf{0} \\ y_N = \eta_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}}_1)\end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \phi(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}}_1) = \mathbf{0} \\ y_N = \eta_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}}_1)\end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \eta_2(\boldsymbol{x}) \\ y_N = \eta_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}}_1)\end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y} = (\eta_2(\boldsymbol{x}),\eta_1(\boldsymbol{x},\eta_2(\boldsymbol{x})))\,.
\end{aligned}
$$

Ponendo $V = V_1\times V_2$, resta pertanto definita la funzione $\eta : U \to V$:

$$\eta(\boldsymbol{x}) = (\eta_2(\boldsymbol{x}),\eta_1(\boldsymbol{x},\eta_2(\boldsymbol{x})))\,.$$

Tale funzione è di classe $\mathcal{C}^1$, siccome lo sono sia η_1 che η_2. Siccome $g(\boldsymbol{x},\eta(\boldsymbol{x})) = 0$ per ogni $\boldsymbol{x}\in U$, se ne deduce che che

$$\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\eta(\boldsymbol{x})) + \frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\eta(\boldsymbol{x}))J\eta(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\,,$$

da cui la formula per $J\eta(\boldsymbol{x})$. ■

Ed ecco l'enunciato simmetrico.

Teorema 74 *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ un aperto, $g : E \to \mathbb{R}^M$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ un punto di E per cui si abbia:*

$$g(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \mathbf{0}\,, \qquad \det \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \neq 0\,.$$

Allora esistono un intorno aperto U di $\boldsymbol{x}_0$, un intorno aperto V di $\boldsymbol{y}_0$ e una funzione $\eta : V \to U$ tali che $U \times V \subseteq E$ e, presi $\boldsymbol{x} \in U$ e $\boldsymbol{y} \in V$, si ha:

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \eta(\boldsymbol{y})\,.$$

Inoltre, la funzione η è di classe $\mathcal{C}^1$ e vale la formula

$$J\eta(\boldsymbol{y}) = -\left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}(\eta(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y}}(\eta(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})\,.$$

Vediamo ora un'importante conseguenza del teorema della funzione implicita.

Definizione 75 *Dati A e B, due aperti di $\mathbb{R}^N$, una funzione $\varphi : A \to B$ sè un "diffeomorfismo" se è di classe $\mathcal{C}^1$, biiettiva e la sua inversa $\varphi^{-1} : B \to A$ è anch'essa di classe $\mathcal{C}^1$.*

Enunciamo il **teorema di inversione locale**.

Teorema 76 *Siano A e B due aperti di $\mathbb{R}^N$ e $\varphi : A \to B$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Se per un certo $\boldsymbol{x}_0 \in A$ si ha che $\det J\varphi(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, allora esistono un intorno aperto U di $\boldsymbol{x}_0$ contenuto in A, e un intorno aperto V di $\varphi(\boldsymbol{x}_0)$ contenuto in B, tali che la restrizione $\varphi_{|U} : U \to V$ sia un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $g : A \times B \to \mathbb{R}^N$ definita da

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}\,.$$

Posto $\boldsymbol{y}_0 = \varphi(\boldsymbol{x}_0)$, si ha che

$$g(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \mathbf{0}\,, \quad \text{e} \quad \det \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \det J\varphi(\boldsymbol{x}_0) \neq 0\,.$$

Per il teorema della funzione implicita, esistono un intorno aperto V di $\boldsymbol{y}_0$, un intorno aperto U di $\boldsymbol{x}_0$ e una funzione $\eta : V \to U$ di classe $\mathcal{C}^1$ tali che, presi $\boldsymbol{y} \in V$ e $\boldsymbol{x} \in U$, si ha:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \quad \Leftrightarrow \quad g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \eta(\boldsymbol{y})\,.$$

Quindi, $\eta = \varphi_{|U}^{-1}$ e la dimostrazione è così completa. ■

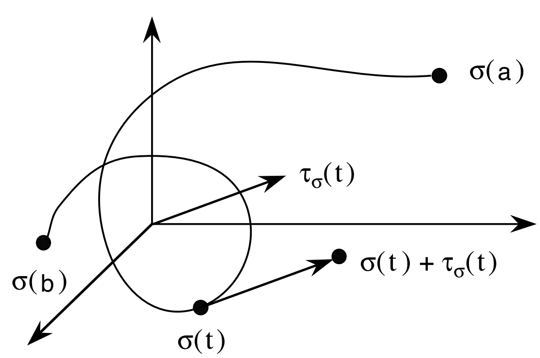
26 Le M-superfici

Indichiamo con I un rettangolo di $\mathbb{R}^M$, dove $1 \le M \le N$.

Definizione 77 *Chiameremo* M**-superficie in** $\mathbb{R}^N$ *una funzione* $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ *di classe* $\mathcal{C}^1$*. Se* $M = 1$*,* σ *si dirà anche* **curva***; se* $M = 2$*, si dirà semplicemente* **superficie***. L'insieme* $\sigma(I)$ *è detto* **supporto** *della* M*-superficie* σ*. Diremo che la* M*-superficie* σ *è* **regolare** *se, per ogni* $\boldsymbol{u} \in \mathring{I}$*, la matrice jacobiana* $\sigma'(\boldsymbol{u})$ *ha rango* M*.*

Consideriamo da vicino il caso $N = 3$. Una curva in $\mathbb{R}^3$ è una funzione $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. La curva è regolare se, per ogni $t \in]a,b[$, il vettore $\sigma'(t) = (\sigma_1'(t), \sigma_2'(t), \sigma_3'(t))$ è non nullo. In tal caso, si definisce il seguente **versore tangente** nel punto $\sigma(t)$:

$$\tau_\sigma(t) = \frac{\sigma'(t)}{||\sigma'(t)||}\,.$$



Esempio. La curva $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(t) = (R\cos(2t), R\sin(2t), 0)$$

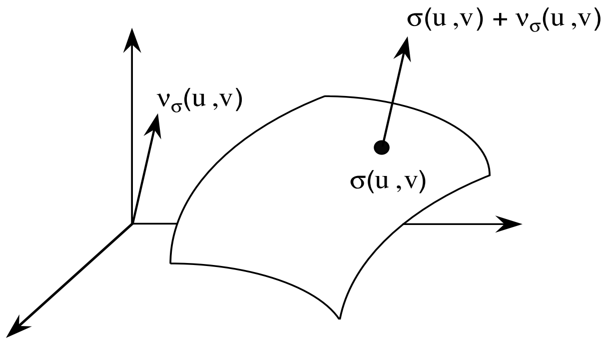
ha come supporto la circonferenza

$$\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}$$

(che viene percorsa due volte). Essendo $\sigma'(t) = (-2R\sin(2t), 2R\cos(2t), 0)$, si tratta di una curva regolare, e si ha:

$$\tau_\sigma(t) = (-\sin(2t), \cos(2t), 0)\,.$$

Una superficie in $\mathbb{R}^3$ è una funzione $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$. La superficie è regolare se, per ogni $(u,v) \in]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$, i vettori $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)$, $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$ sono linearmente indipendenti. In tal caso, essi individuano un piano, detto **piano tangente** alla superficie nel punto $\sigma(u,v)$, e si definisce il seguente **versore normale**:



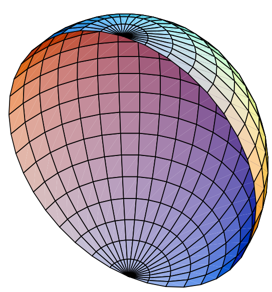
$$\nu_\sigma(u,v) = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)}{||\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)||}\,.$$

Esempi. 1. La superficie $\sigma : [0,\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\phi,\theta) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)$$

ha come supporto la semisfera

$$\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, y \geq 0\}\,.$$



Essendo

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\phi}(\phi,\theta) = (R\cos\phi\cos\theta, R\cos\phi\sin\theta, -R\sin\phi)\,,$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\phi,\theta) = (-R\sin\phi\sin\theta, R\sin\phi\cos\theta, 0)\,,$$

si tratta di una superficie regolare, e si ha:

$$\nu_\sigma(\phi,\theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)\,.$$

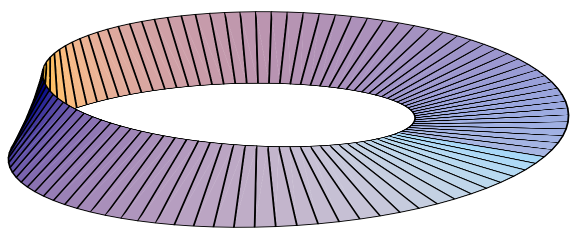
2. La superficie $\sigma : [r, R] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, con $0 \le r < R$, data da

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 0)\,,$$

ha come supporto un cerchio se $r = 0$, una corona circolare se $r > 0$. È una superficie regolare.

3. La superficie $\sigma : [r, R] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, con $0 < r < R$, definita da

$$\begin{aligned}\sigma(u, v) = \Bigg(&\left(\frac{r+R}{2} + \left(u - \frac{r+R}{2}\right) \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right) \cos v, \\ &\left(\frac{r+R}{2} + \left(u - \frac{r+R}{2}\right) \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right) \sin v, \\ &\left(u - \frac{r+R}{2}\right) \sin\left(\frac{v}{2}\right)\Bigg)\,,\end{aligned}$$

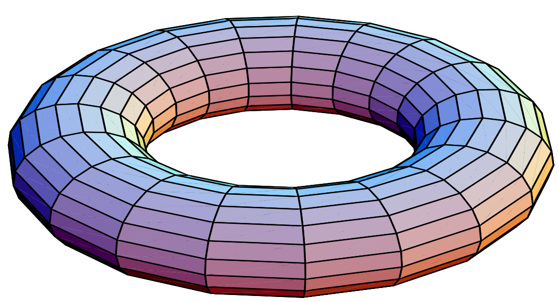


ha come supporto un nastro di Möbius. È anch'essa una superficie regolare.

4. La superficie $\sigma : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

dove $0 < r < R$, ha come supporto l'anello toroidale o "toro"



$$\{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}\,.$$

Si può verificare che anche in questo caso si tratta di una superficie regolare.

Una 3-superficie in $\mathbb{R}^3$ si dice anche **volume**.

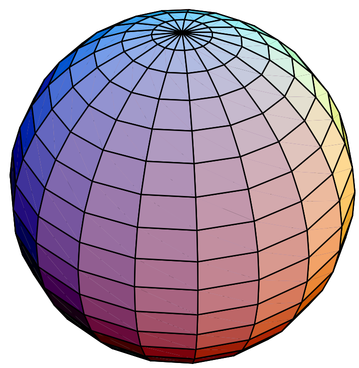
Esempio. La funzione $\sigma : [0,R] \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\rho,\phi,\theta) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)$$

ha come supporto la palla chiusa

$$\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} .$$

In questo caso, $\det \sigma'(\rho,\phi,\theta) = \rho^2 \sin\phi$ e pertanto si tratta di un volume regolare.



27 Analisi locale delle M-superfici

Sia $1 \leq M < N$. Identificando $\mathbb{R}^N$ con $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-M}$, ogni vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)$ di $\mathbb{R}^N$ si scriverà nella forma $\boldsymbol{x} = (\hat{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{x}})$, con $\hat{\boldsymbol{x}} = (x_1, \dots, x_M)$ e $\tilde{\boldsymbol{x}} = (x_{M+1}, \dots, x_N)$.

Useremo inoltre la seguente notazione: dato $\hat{\boldsymbol{x}} = (x_1, \dots, x_M) \in \mathbb{R}^M$ e $r > 0$,

$$B[\hat{\boldsymbol{x}}, r] = [x_1 - r, x_1 + r] \times \cdots \times [x_M - r, x_M + r] \subseteq \mathbb{R}^M .$$

Per semplicità, scriveremo $B[r]$ invece di $B[\mathbf{0}, r]$.

Teorema 78 *Siano E un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto di E e $g : E \to \mathbb{R}^{N-M}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$, tale che*

$$g(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0} , \quad e \quad Jg(\boldsymbol{x}_0) \text{ ha rango } N - M.$$

Allora esistono un intorno U di $\boldsymbol{x}_0$ e una M-superficie regolare e iniettiva $\sigma : B[r] \to \mathbb{R}^N$, per un certo $r > 0$, tali che $\sigma(\mathbf{0}) = \boldsymbol{x}_0$ e

$$\{\boldsymbol{x} \in U : g(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\} = \sigma(\mathbf{B}[\mathbf{r}]) .$$

Dimostrazione. Supponiamo, per esempio, che sia invertibile

$$\frac{\partial g}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{M+1}}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_{N-M}}{\partial x_{M+1}}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_{N-M}}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Per il teorema della funzione implicita, esistono un intorno aperto $\hat{U}$ di $\hat{\boldsymbol{x}}_0$, un intorno aperto $\widetilde{U}$ di $\tilde{\boldsymbol{x}}_0$ e una funzione $\eta : \hat{U} \to \widetilde{U}$, tali che $\hat{U} \times \widetilde{U} \subseteq E$ e, se $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{U}$ e $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{U}$, si ha:

$$g(\hat{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \eta(\hat{\boldsymbol{x}}).$$

Preso $r > 0$ tale che $B[\hat{\boldsymbol{x}}_0, r] \subseteq \hat{U}$, sia $U = B[\hat{\boldsymbol{x}}_0, r] \times \widetilde{U}$ e $\sigma : B[r] \to \mathbb{R}^N$ definita da $\sigma(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{x}}_0, \eta(\boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{x}}_0))$. Si verifica che la matrice jacobiana $J\sigma(\boldsymbol{u})$ ha come sottomatrice la matrice $M \times M$ identità, per cui σ è regolare. Si vede facilmente che σ è iniettiva, in quanto lo è la prima componente $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{x}}_0$. Inoltre, se $\boldsymbol{x} = (\hat{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{x}}) \in U$,

$$g(\hat{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \eta(\hat{\boldsymbol{x}}) \quad \Leftrightarrow \quad (\hat{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{x}}) = \sigma(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0}}),$$

da cui la tesi. Nel caso in cui la sottomatrice considerata non sia invertibile, basterà operare degli scambi nelle colonne della matrice $Jg(\boldsymbol{x}_0)$ per ricondursi alla situazione precedente. ■

La M-superficie σ individuata dal teorema precedente è detta "M-parametrizzazione locale".

Vediamo tre casi di particolare interesse. Iniziamo con una curva in $\mathbb{R}^2$ (caso $M = 1$, $N = 2$).

Corollario 79 *Siano E un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) un punto di E e $g : E \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$, tale che*

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad \nabla g(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno U di (x_0, y_0) e una curva regolare e iniettiva $\sigma : [-r, r] \to \mathbb{R}^2$, per un certo $r > 0$, tali che $\sigma(0) = (x_0, y_0)$ e

$$\{(x, y) \in U : g(x, y) = 0\} = \sigma([-r, r]).$$

Vediamo ora il caso di una superficie in $\mathbb{R}^3$ (caso $M = 2$, $N = 3$).

Corollario 80 *Siano E un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$, (x_0, y_0, z_0) un punto di E e $g : E \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$, tale che*

$$g(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad e \quad \nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno U di (x_0, y_0, z_0) e una superficie regolare e iniettiva $\sigma : [-r, r] \times [-r, r] \to \mathbb{R}^3$, per un certo $r > 0$, tali che $\sigma(0,0) = (x_0, y_0, z_0)$ e

$$\{(x,y,z) \in U : g(x,y,z) = 0\} = \sigma([-r,r] \times [-r,r]) \,.$$

Infine, vediamo il caso di una curva in $\mathbb{R}^3$ (caso $M = 1$, $N = 3$).

Corollario 81 *Siano E un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$, (x_0, y_0, z_0) un punto di E e $g_1, g_2 : E \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe $\mathcal{C}^1$, tali che*

$$g_1(x_0, y_0, z_0) = g_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad e \qquad \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) \times \nabla g_2(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \,.$$

Allora esistono un intorno U di (x_0, y_0, z_0) e una curva regolare e iniettiva $\sigma : [-r, r] \to \mathbb{R}^3$, per un certo $r > 0$, tali che $\sigma(0) = (x_0, y_0, z_0)$ e

$$\{(x,y,z) \in U : g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\} = \sigma([-r,r]) \,.$$

27.1 I moltiplicatori di Lagrange

Siano E un aperto di $\mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto di E e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$. Vogliamo cercare eventuali punti di massimo o di minimo per la funzione ristretta a un "vincolo", che sarà descritto da un'altra funzione, in generale a valori vettoriali.

Teorema 82 *Sia $g : E \to \mathbb{R}^{N-M}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che*

$$g(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0} \,, \quad e \quad Jg(\boldsymbol{x}_0) \text{ ha rango } N - M.$$

Posto

$$S = \{\boldsymbol{x} \in E : g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} \,,$$

se $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di minimo o massimo locale per $f|_S$, allora esistono $(N - M)$ numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-M}$ tali che

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{j=1}^{N-M} \lambda_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}_0) \,.$$

I numeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-M}$ si chiamano **moltiplicatori di Lagrange**.

<u>Dimostrazione</u>. Per il teorema precedente, esistono un intorno U di $\boldsymbol{x}_0$, un $r > 0$ e una M-superficie regolare $\sigma : B[r] \to \mathbb{R}^N$ tali che $\sigma(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{x}_0$ e

$$S \cap U = \sigma(B[r]) \,.$$

Considerata la funzione $F : B[r] \to \mathbb{R}$, definita da $F(\boldsymbol{u}) = f(\sigma(\boldsymbol{u}))$, si ha che $\mathbf{0}$ è un punto di minimo o massimo locale per F. Quindi, $\nabla F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, per cui

$$0 = JF(\mathbf{0}) = Jf(\boldsymbol{x}_0)J\sigma(\mathbf{0})\,.$$

Ne segue che

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \ \text{ è ortogonale a } \ \frac{\partial\sigma}{\partial u_1}(\mathbf{0}), \ldots, \frac{\partial\sigma}{\partial u_M}(\mathbf{0})\,.$$

Inoltre, essendo $g(\sigma(\boldsymbol{u})) = \mathbf{0}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in B[r]$, si ha che

$$Jg(\boldsymbol{x}_0)J\sigma(\mathbf{0}) = 0\,.$$

Quindi anche i vettori

$$\nabla g_1(\boldsymbol{x}_0), \ldots, \nabla g_{N-M}(\boldsymbol{x}_0) \ \text{ sono tutti ortogonali a } \ \frac{\partial\sigma}{\partial u_1}(\mathbf{0}), \ldots, \frac{\partial\sigma}{\partial u_M}(\mathbf{0})\,.$$

Siccome σ è regolare,

$$\text{lo spazio vettoriale } \mathcal{T} \text{ generato da } \frac{\partial\sigma}{\partial u_1}(\mathbf{0}), \ldots, \frac{\partial\sigma}{\partial u_M}(\mathbf{0}) \text{ ha dimensione } M\,.$$

Quindi lo spazio ortogonale $\mathcal{T}^\perp$ ha dimensione $N - M$. E siccome, come abbiamo visto,

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0), \nabla g_1(\boldsymbol{x}_0), \ldots, \nabla g_{N-M}(\boldsymbol{x}_0) \in \mathcal{T}^\perp\,,$$

questi vettori devono essere linearmente dipendenti. Quindi, essendo che i vettori $\nabla g_1(\boldsymbol{x}_0)$, ..., $\nabla g_{N-M}(\boldsymbol{x}_0)$ sono linearmente indipendenti, ne segue che $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ si deve poter esprimere come una loro combinazione lineare. ■

Vediamo anche qui tre casi particolari interessanti.

Corollario 83 *Siano E un aperto di $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) un punto di E, $g : E \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che*

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad \text{ e } \quad \nabla g(x_0, y_0) \neq 0,$$

e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in (x_0, y_0). Posto

$$S = \{(x, y) \in E : g(x, y) = 0\}\,,$$

se (x_0, y_0) è un punto di minimo o massimo locale per $f|_S$, allora esiste un numero reale λ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)\,.$$

Corollario 84 *Siano E un aperto di $\mathbb{R}^3$, (x_0, y_0, z_0) un punto di E, $g : E \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che*

$$g(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad e \quad \nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in (x_0, y_0, z_0). Posto

$$S = \{(x, y, z) \in E : g(x, y, z) = 0\},$$

se (x_0, y_0, z_0) è un punto di minimo o massimo locale per $f|_S$, allora esiste un numero reale λ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Corollario 85 *Siano E un aperto di $\mathbb{R}^3$, (x_0, y_0, z_0) un punto di E, $g_1, g_2 : E \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ tali che*

$$g_1(x_0, y_0, z_0) = g_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad e \quad \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) \times \nabla g_2(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in (x_0, y_0, z_0). Posto

$$S = \{(x, y, z) \in E : g_1(x, y, z) = 0,\ g_2(x, y, z) = 0\},$$

se (x_0, y_0, z_0) è un punto di minimo o massimo locale per $f|_S$, allora esistono due numeri reali λ_1, λ_2 tali che

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0, y_0, z_0).$$

Parte III - Serie

28 Introduzione e prime proprietà

Sia V uno spazio vettoriale normato. Data una successione $(a_k)_k$ in V, la "serie" associata è la successione $(s_n)_n$ definita da

$$\begin{aligned}
&s_0 = a_0\,,\\
&s_1 = a_0 + a_1\,,\\
&s_2 = a_0 + a_1 + a_2\,,\\
&\dots\\
&s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n\,,\\
&\dots
\end{aligned}$$

L'elemento a_k è detto "termine k-esimo" della serie, mentre $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ è detta "somma parziale n-esima" della serie. Se $(s_n)_n$ ha un limite in V, si dice che la serie "converge". In tal caso, il limite $S = \lim_n s_n$ è detto "somma della serie", e scriveremo

$$S = \lim_n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,,$$

o talvolta anche

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Tuttavia, per abuso di notazione, la serie $(s_n)_n$ stessa è spesso denotata con gli stessi simboli

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,, \quad \text{o} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots\,.$$

A volte, per brevità, scriveremo semplicemente $\sum_k a_k$.

Analizziamo tre esempi, con $V = \mathbb{R}$.

Esempio 1. Per $\alpha \in \mathbb{R}$, la "serie geometrica"

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^n + \dots$$

ha come suo termine k-esimo $a_k = \alpha^k$. Se $\alpha \neq 1$, la somma parziale n-esima è

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}\,,$$

mentre se $\alpha = 1$, essa è $s_n = n + 1$. Quindi, la serie converge se e solo se $|\alpha| < 1$, nel qual caso la sua somma è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}\,.$$

Si noti che se $\alpha \geq 1$ allora $\lim_n s_n = +\infty$, mentre se $\alpha \leq -1$ la successione $(s_n)_n$ non ha limite.

In generale, se la successione $(s_n)_n$ non ha limite, si dice che la serie è "indeterminata". D'altra parte, per serie a valori reali, si dice che

- la serie "diverge a $+\infty$" se $\lim_n s_n = +\infty$,
- la serie "diverge a $-\infty$" se $\lim_n s_n = -\infty$.

Esempio 2. La "serie di Mengoli"

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \dots$$

ha come termine k-esimo $a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$. È una "serie telescopica":

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots$$

Quindi, semplificando,

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+2}\,,$$

il che mostra che $\lim_n s_n = 1$. Abbiamo così dimostrato che la serie converge e che la sua somma è pari a 1. Possiamo quindi scrivere

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1\,.$$

Nell'esempio precedente, si potrebbero usare diverse notazioni nella somma come, ad esempio,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1\,,$$

o varianti di essa; inoltre, la lettera "k" potrebbe essere sostituita da una qualsiasi altra scrivendo, ad esempio, $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1$. Queste osservazioni, simili a quelle fatte per la sommatoria, si applicano a tutte le serie.

Esempio 3. La "serie armonica"

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} + \dots$$

ha come termine k-esimo $a_k = \frac{1}{k+1}$. Essa diverge a $+\infty$; possiamo vedere ciò scrivendola come

$$1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16}\right) + \dots,$$

raggruppando insieme prima due dei suoi termini, poi quattro, poi otto, poi sedici, e così via, raddoppiandone il numero di volta in volta. È facile vedere che le somme comprese nelle parentesi sono tutte maggiori di $\frac{1}{2}$. Quindi, la successione delle somme parziali deve avere limite $+\infty$. Possiamo quindi scrivere

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty\,.$$

Purtroppo è raro che si possa calcolare esplicitamente la somma di una serie. Molto spesso quindi saremo già soddisfatti nel dimostrare che una serie converge o non converge.

È importante notare che la convergenza di una serie non è compromessa se viene modificato solo un numero finito dei suoi termini. Infatti, se la serie converge, possiamo modificare, aggiungere o eliminare un numero finito di termini iniziali, e la nuova serie così ottenuta convergerà ancora. Al contrario, se la serie non converge perché è indeterminata, o diverge a $\pm\infty$, lo stesso sarà vero per la serie modificata.

Teorema 86 *Se una serie $\sum_k a_k$ converge, allora*

$$\lim_n a_n = 0\,.$$

Dimostrazione. Se $\lim_n s_n = S \in V$. Allora anche $\lim_n s_{n-1} = S$, e quindi

$$\lim_n a_n = \lim_n (s_n - s_{n-1}) = \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1} = S - S = 0\,,$$

che è quanto volevasi dimostrare. ■

Studiamo il comportamento delle serie rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare.

Teorema 87 *Si supponga che le due serie $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ convergano con somme A e B, rispettivamente. Allora anche la serie $\sum_k (a_k + b_k)$ converge, e la sua somma è $A + B$. Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato, anche la serie $\sum_k (\alpha a_k)$ converge, e la sua somma è αA. Scriveremo brevemente*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,.$$

Dimostrazione. Siano $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $s'_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Allora,

$$s_n + s'_n = \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)\,, \qquad \alpha s_n = \sum_{k=0}^{n}(\alpha a_k)\,,$$

e il risultato si ottiene passando ai limiti. ■

Vediamo come il Criterio di Cauchy si adatta alle serie negli spazi di Banach.

Teorema 88 *Se V è uno spazio di Banach, la serie $\sum_k a_k$ converge se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad n > m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right\| < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Essendo V completo, la successione $(s_n)_n$ ha un limite in V se e solo se è una successione di Cauchy, cioè,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad [\, m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n}\,] \quad \Rightarrow \quad \|s_n - s_m\| < \varepsilon\,.$$

Ora non è restrittivo prendere $n > m$, e sostituendo $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $s_m = \sum_{k=0}^{m} a_k$ si ha la conclusione. ■

Ora enunciamo un utile criterio di convergenza.

Teorema 89 *Se V è uno spazio di Banach e la serie $\sum_k \|a_k\|$ converge, allora anche la serie $\sum_k a_k$ converge.*

In tal caso si dice che la serie $\sum_k a_k$ "converge in norma" e, nel caso in cui V coincida con $\mathbb{R}$ o con $\mathbb{C}$, si dice che la serie "converge assolutamente".

Dimostrazione. Assumiamo che la serie $\sum_k \|a_k\|$ converga. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per il Criterio di Cauchy, esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=m+1}^{n} \|a_k\| < \varepsilon\,.$$

Siccome

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|a_k\|\,,$$

abbiamo che

$$n > m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right\| < \varepsilon\,,$$

e si arriva alla conclusione usando di nuovo il Criterio di Cauchy. ■

La convergenza in norma di una serie rafforza così l'interesse nello studiare il comportamento delle serie di numeri reali positivi.

29 Serie di numeri reali - I

In questa sezione consideriamo solo serie con termini a_k in $\mathbb{R}$.

Se per ogni k si ha $a_k \geq 0$, allora la successione $(s_n)_n$ è crescente, quindi ha un limite e abbiamo solo due possibilità: o la serie converge, oppure diverge a $+\infty$.

Il seguente **Criterio di Confronto** sarà molto utile.

Teorema 90 *Siano* $\sum_k a_k$ *e* $\sum_k b_k$ *due serie per cui*

$$\exists \bar{k} \in \mathbb{N} : \quad k \geq \bar{k} \;\Rightarrow\; 0 \leq a_k \leq b_k \,.$$

Possiamo affermare che:

a) se $\sum_k b_k$ *converge, allora anche* $\sum_k a_k$ *converge;*

b) se $\sum_k a_k$ *diverge, allora anche* $\sum_k b_k$ *diverge.*

Dimostrazione. Definiamo

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \,, \qquad s'_n = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \,.$$

Come detto in precedenza, possiamo modificare un numero finito di termini nelle due serie e supporre senza perdita di generalità che sia $0 \leq a_k \leq b_k$ *per ogni* k. Allora le due successioni $(s_n)_n$ e $(s'_n)_n$ sono crescenti, e $s_n \leq s'_n$, per ogni n. Di conseguenza, i limiti $S = \lim_n s_n$ e $S' = \lim_n s'_n$ esistono, e $S \leq S' \leq +\infty$. Se $\sum_k b_k$ converge, allora $S' \in \mathbb{R}$, quindi anche $S \in \mathbb{R}$, il che significa che $\sum_k a_k$ anch'essa converge. Se $\sum_k a_k$ diverge, allora $S = +\infty$, quindi anche $S' = +\infty$, ossia $\sum_k b_k$ anch'essa diverge. ■

Esempio. La serie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots$$

converge. Questo può essere dimostrato confrontandola con la serie

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \ldots \,,$$

che è una leggera modifica di quella già trattata nell'Esempio 2 sopra. Tutti i termini della prima serie sono minori o uguali ai corrispondenti della seconda serie, che sappiamo convergere.

Come primo corollario, abbiamo il **Criterio del Confronto Asintotico**.

Corollario 91 *Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie a termini positivi, per le quali esiste il limite*
$$\ell = \lim_k \frac{a_k}{b_k}\,.$$
Abbiamo tre casi con diverse conclusioni:

a) $\ell \in]0,+\infty[$; *le due serie o convergono entrambe o divergono entrambe;*

b) $\ell = 0$; *se $\sum_k b_k$ converge, allora anche $\sum_k a_k$ converge;*

c) $\ell = +\infty$; *se $\sum_k b_k$ diverge, allora anche $\sum_k a_k$ diverge.*

<u>Dimostrazione</u>. Caso *a*). Se $\ell \in]0,+\infty[$, esiste un $\bar{k}$ tale che
$$k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell}{2} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{3\ell}{2}\,,$$
cioè,
$$k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow \quad a_k \leq \frac{3\ell}{2}\, b_k \quad \text{e} \quad b_k \leq \frac{2}{\ell}\, a_k\,.$$
La conclusione segue quindi dal Criterio di Confronto.

Caso *b*). Se $\ell = 0$, esiste un $\bar{k}$ tale che, se $k \geq \bar{k}$, allora $a_k \leq b_k$, e si applica il Criterio di Confronto.

Caso *c*). Se $\ell = +\infty$ abbiamo l'analogo del secondo caso, con i ruoli di a_k e b_k invertiti. ■

30 Liminf e limsup

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali. Per ogni coppia di numeri naturali n, ℓ, definiamo
$$\alpha_{n,\ell} = \min\{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+\ell}\}\,, \qquad \beta_{n,\ell} = \max\{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+\ell}\}\,.$$
Se manteniamo fisso n, la successione $(\alpha_{n,\ell})_\ell$ è decrescente, e la successione $(\beta_{n,\ell})_\ell$ è crescente, per cui i seguenti limiti esistono:
$$\overline{\alpha}_n = \lim_\ell \alpha_{n,\ell} = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}\,, \qquad \overline{\beta}_n = \lim_\ell \beta_{n,\ell} = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}\,.$$
Notiamo che $\overline{\alpha}_n$ potrebbe essere uguale a $-\infty$, e $\overline{\beta}_n$ potrebbe essere uguale a $+\infty$. Inoltre,
$$\overline{\alpha}_n \leq a_n \leq \overline{\beta}_n\,, \quad \text{per ogni } n\,.$$

Ora, la successione $(\overline{\alpha}_n)_n$ è o costantemente uguale a $-\infty$, oppure ha valori reali ed è crescente; similmente, la successione $(\overline{\beta}_n)_n$ è o costantemente uguale a $+\infty$, oppure ha valori reali ed è decrescente. Possiamo quindi definire il "limite inferiore" e il "limite superiore" di $(a_n)_n$ come

$$\liminf_n a_n = \lim_n \overline{\alpha}_n\,, \qquad \limsup_n a_n = \lim_n \overline{\beta}_n\,.$$

Vediamo come può essere caratterizzato il limite inferiore. Abbiamo tre casi:

$$\liminf_n a_n = \ell \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} i)\;\; \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; a_n > \ell - \varepsilon \\ ii)\; \forall \varepsilon > 0\,,\; a_n < \ell + \varepsilon \;\text{ per infiniti valori di } n\,. \end{cases}$$

$$\liminf_n a_n = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall \beta \in \mathbb{R}\,,\; a_n < \beta \;\text{ per infiniti valori di } n\,.$$

$$\liminf_n a_n = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; a_n > \alpha\,.$$

Notiamo che quest'ultimo caso è equivalente a $\lim_n a_n = +\infty$.

Analogamente, per il limite superiore abbiamo tre casi:

$$\limsup_n a_n = \ell \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} i)\;\; \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; a_n < \ell + \varepsilon \\ ii)\; \forall \varepsilon > 0\,,\; a_n > \ell - \varepsilon \;\text{ per infiniti valori di } n\,. \end{cases}$$

$$\limsup_n a_n = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall \alpha \in \mathbb{R}\,,\; a_n > \alpha \;\text{ per infiniti valori di } n\,.$$

$$\limsup_n a_n = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; a_n < \beta\,.$$

Quest'ultimo caso è equivalente a $\lim_n a_n = -\infty$.

Il vantaggio di considerare i limiti inferiore e superiore è che essi esistono sempre, mentre il limite, come sappiamo, potrebbe non esistere. Il seguente teorema spiega meglio questa situazione.

Teorema 92 *La successione $(a_n)_n$ ha un limite (possibilmente uguale a $-\infty$ o $+\infty$) se e solo se $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n$; in tal caso, questo valore coincide con $\lim_n a_n$.*

<u>Dimostrazione</u>. È una conseguenza diretta delle caratterizzazioni sopra descritte. Evitiamo di scrivere i dettagli, per brevità. ■

La seguente proprietà sarà utile.

Proposizione 93 *Sia* $(a_n)_n$ *una successione di numeri reali positivi. Allora,*

$$\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'ultima disuguaglianza. Sia $\ell = \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Se $\ell = +\infty$, non c'è nulla da dimostrare. Quindi, supponiamo $\ell < +\infty$, e notiamo che sicuramente $\ell \geq 0$. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Allora, esiste un $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq \overline{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
&a_{\bar{n}+1} < \Big(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\Big) a_{\bar{n}}\,,\\
&a_{\bar{n}+2} < \Big(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\Big) a_{\bar{n}+1} < \Big(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\Big)^2 a_{\bar{n}}\,,\\
&a_{\bar{n}+3} < \Big(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\Big) a_{\bar{n}+2} < \Big(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\Big)^3 a_{\bar{n}}\,,\\
&\dots
\end{aligned}$$

e può essere così dimostrato per induzione che

$$n \geq \overline{n} + 1 \quad \Rightarrow \quad a_n < \Big(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\Big)^n \frac{a_{\bar{n}}}{(\ell + \frac{\varepsilon}{2})^{\bar{n}}}\,.$$

Poiché per ogni $\alpha > 0$ si ha che $\lim_n \sqrt[n]{\alpha} = 1$, esiste un $\widetilde{n} \geq \overline{n} + 1$ tale che

$$n \geq \widetilde{n} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} < \Big(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\Big) \sqrt[n]{\frac{a_{\bar{n}}}{(\ell + \frac{\varepsilon}{2})^{\bar{n}}}} < \ell + \varepsilon\,.$$

Abbiamo così dimostrato che $\limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \ell$.

La prima disuguaglianza può essere dimostrata in modo simile. ∎

31 Serie di numeri reali - II

Il seguente corollario ci fornisce il **Criterio della Radice**.

Corollario 94 *Sia* $\sum_k a_k$ *una serie a termini non negativi. Se*

$$\limsup_k \sqrt[k]{a_k} < 1\,,$$

allora la serie converge.

Dimostrazione. Sia $\ell = \limsup_k \sqrt[k]{a_k}$ e sia $\alpha \in]\ell, 1[$ un numero fissato arbitrariamente. Allora, esiste un $\bar{k}$ tale che

$$k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[k]{a_k} \leq \alpha \,,$$

cioè

$$k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow \quad a_k \leq \alpha^k.$$

La conclusione segue per confronto con la serie geometrica $\sum_k \alpha^k$, che converge, poiché $0 < \alpha < 1$. ■

Richiamando la Proposizione 93, come conseguenza immediata abbiamo il **Criterio del rapporto**.

Corollario 95 *Sia* $\sum_k a_k$ *una serie a termini positivi. Se*

$$\limsup_k \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \,,$$

allora la serie converge.

Ne presentiamo comunque una dimostrazione indipendente: sia $\ell = \limsup_k \frac{a_{k+1}}{a_k}$ e sia $\alpha \in]\ell, 1[$ un numero fissato arbitrariamente. Allora, esiste un $\bar{k}$ tale che

$$k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \alpha \,.$$

Senza perdita di generalità ai fini della convergenza, possiamo supporre che la disuguaglianza scritta sopra valga per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$\begin{aligned}
& a_1 \leq \alpha a_0 \,, \\
& a_2 \leq \alpha a_1 \leq \alpha^2 a_0 \,, \\
& a_3 \leq \alpha a_2 \leq \alpha^3 a_0 \,, \\
& \dots \\
& a_k \leq \alpha a_{k-1} \leq \alpha^k a_0 \\
& \dots
\end{aligned}$$

La conclusione segue per confronto con la serie $\sum_k \alpha^k a_0$ che converge, poiché $0 < \alpha < 1$. ■

Presentiamo ora il **Criterio di Condensazione**, che abbiamo già implicitamente utilizzato trattando la serie armonica dell'Esempio 3.

Teorema 96 *Sia $(a_k)_k$ una successione decrescente di numeri non negativi. Allora le due serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

o convergono entrambe o divergono entrambe.

Dimostrazione. Per semplicità eliminiamo il primo termine a_0 dalla prima serie. Supponiamo che la serie $\sum_k 2^k a_{2^k}$ converga. Allora,

$$\begin{aligned}
& a_1 + (a_2 + a_3) \le a_1 + 2a_2 \,, \\
& a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) \le a_1 + 2a_2 + 4a_4 \,, \\
& a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \\
& \quad +(a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}) \le \\
& \quad \le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 \,, \\
& \ldots
\end{aligned}$$

portando alla disuguaglianza

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} a_k \le \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} \,, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \,.$$

Per confronto, siccome $\sum_k 2^k a_{2^k}$ converge, anche $\sum_k a_k$ converge.

Viceversa, supponiamo ora che la serie $\sum_k a_k$ converga. Allora,

$$\begin{aligned}
& a_1 + 2a_2 \le 2(a_1 + a_2) \,, \\
& a_1 + 2a_2 + 4a_4 \le 2(a_1 + a_2 + (a_3 + a_4)) \,, \\
& a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 \le 2(a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8)) \,, \\
& \ldots
\end{aligned}$$

portando a

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} \le \sum_{k=1}^{2^n} 2a_k \,, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \,.$$

Per confronto, siccome $\sum_k 2a_k$ converge, anche $\sum_k 2^k a_{2^k}$ converge. ■

Esempio 1. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\beta}} \,,$$

dove $\beta > 0$ è un numero reale fissato. La successione $(a_k)_k$, con $a_k = 1/k^\beta$, è decrescente. La "serie condensata",

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-\beta})^k ,$$

è una serie geometrica del tipo $\sum_k \alpha^k$, con $\alpha = 2^{1-\beta}$. Converge se e solo se $|\alpha| < 1$; quindi,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta} \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \beta > 1 .$$

Esempio 2. Studiamo ora la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} ,$$

per qualche $\beta > 0$. Facendo uso del calcolo differenziale si verifica facilmente che la successione $(a_k)_k$, con $a_k = 1/k(\ln k)^\beta$, è decrescente. La "serie condensata" è

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\ln 2^k)^\beta} = \frac{1}{(\ln 2)^\beta} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\beta} .$$

Ricordando l'esempio precedente, concludiamo che

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \beta > 1 .$$

Finora in questa sezione abbiamo considerato solo serie a termini non negativi. Adesso studieremo una serie a termini con segni alterni. Consideriamo una serie del tipo

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \ldots ,$$

dove tutti gli a_k sono positivi. Ecco il **Criterio di Leibniz**.

Teorema 97 *Se $(a_k)_k$ è una successione decrescente di numeri positivi e*

$$\lim_k a_k = 0 ,$$

allora la serie $\sum_k (-1)^k a_k$ converge.

<u>Dimostrazione</u>. Sia

$$s_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n ,$$

e consideriamo la successione $(s_n)_n$ delle somme parziali. La dividiamo in due sottosuccessioni, una con indici pari e l'altra con indici dispari. Poiché $(a_k)_k$ è positiva e decrescente, vediamo che

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq s_7 \leq \ \ \dots \ \ \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0 \,.$$

Pertanto, la sottosuccessione $(s_{2m+1})_m$, quella con indici dispari, è crescente e limitata superiormente, mentre la sottosuccessione $(s_{2m})_m$, quella con indici pari, è decrescente e limitata inferiormente. Quindi, entrambe le sottosuccessioni hanno un limite finito, e possiamo scrivere

$$\lim_m s_{2m+1} = \ell_1 \,, \qquad \lim_m s_{2m} = \ell_2 \,.$$

D'altra parte,

$$\ell_2 - \ell_1 = \lim_m (s_{2m} - s_{2m+1}) = \lim_m \ a_{2m+1} = 0 \,,$$

quindi $\ell_1 = \ell_2$. Avendo le due sottosuccessioni $(s_{2m+1})_m$ e $(s_{2m})_m$ lo stesso limite, possiamo essere certi che la successione $(s_n)_n$ avrà anch'essa lo stesso limite. ■

32 Integrazione su intervalli non compatti

Iniziamo considerando una funzione $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, dove $b \leq +\infty$. Supponiamo che f sia integrabile su ogni intervallo compatto del tipo $[a, c]$, con $c \in \,]a, b[\,$. Questo avviene, per esempio, quando f è continua in $[a, b[\,$.

Definizione 98 *Diciamo che una funzione $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ è "integrabile" se f è integrabile su $[a, c]$ per ogni $c \in \,]a, b[\,$, e il limite*

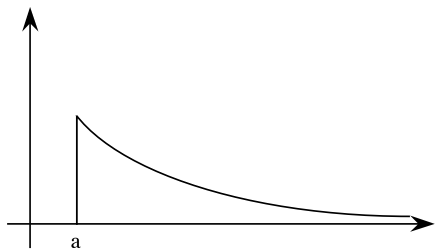
$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f$$

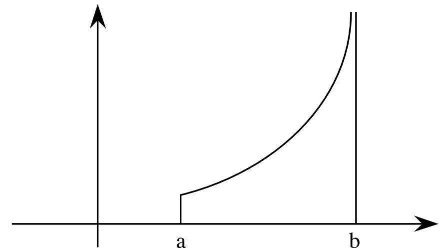
esiste ed è finito. In tal caso, questo limite si chiama "integrale" di f su $[a, b[$ e si denota con $\int_a^b f$, o con $\int_a^b f(x)\,dx$.

In particolare, se $b = +\infty$, scriveremo: $\int_a^{+\infty} f$, o $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Esempi. Sia $a > 0$; si vede facilmente che la funzione $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = x^{-\alpha}$, è integrabile se e solo se $\alpha > 1$, nel qual caso abbiamo

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \,.$$





Consideriamo ora il caso $a < b < +\infty$. Si può verificare che la funzione $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = (b-x)^{-\beta}$, è integrabile se e solo se $\beta < 1$, nel qual caso abbiamo

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\beta} = \frac{(b-a)^{1-\beta}}{1-\beta} \,.$$

Si dice anche che *l'integrale converge* se la funzione f è integrabile su $[a, b[$, cioè, quando il limite $\lim_{c \to b^-} \int_a^c f$ esiste ed è finito. Se il limite non esiste, si dice che *l'integrale è indeterminato*. Se esiste e vale $+\infty$ o $-\infty$, si dice che *l'integrale diverge* rispettivamente a $+\infty$ o a $-\infty$.

È chiaro che la convergenza dell'integrale dipende esclusivamente dal comportamento della funzione "vicino" al punto b. In altre parole, modificando la funzione al di fuori di un intorno di b, la convergenza dell'integrale non viene compromessa.

Enunciamo ora il **Criterio di Cauchy**.

Teorema 99 *Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, c]$, per ogni $c \in]a, b[$. Allora f è integrabile su $[a, b[$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\bar{c} \in]a, b[$ tale che, per ogni c' e c'' in $[\bar{c}, b[$, si ha che*

$$\left| \int_{c'}^{c''} f \right| \leq \varepsilon \,.$$

<u>Dimostrazione</u>. È una diretta conseguenza del criterio di Cauchy applicato alla funzione $F : [a, b[\to \mathbb{R}$ definita da $F(c) = \int_a^c f$. ■

Dal Criterio di Cauchy deduciamo il seguente **Criterio di Confronto**.

Teorema 100 *Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, c]$, per ogni $c \in]a, b[$. Se esiste una funzione integrabile $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in [a, b[$,*

$$|f(x)| \leq g(x) \,,$$

allora anche f è integrabile su $[a, b[$.

Dimostrazione. Una volta fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\bar{c} \in]a, b[$ tale che, prendendo arbitrariamente c', c'' in $[\bar{c}, b[$, si ha che $|\int_{c'}^{c''} g| \leq \varepsilon$. Se per esempio $c' \leq c''$, essendo $-g \leq f \leq g$, abbiamo

$$-\int_{c'}^{c''} g \leq \int_{c'}^{c''} f \leq \int_{c'}^{c''} g\,,$$

e quindi

$$\left|\int_{c'}^{c''} f\right| \leq \int_{c'}^{c''} g \leq \varepsilon\,.$$

Pertanto il Criterio di Cauchy si applica, portando alla conclusione. ■

Si noti che sarebbe stato sufficiente supporre la disuguaglianza $|f(x)| \leq g(x)$ su $[\bar{c}, b[$, per un certo $\bar{c} \in]a, b[$. Come conseguenza immediata, abbiamo quanto segue.

Corollario 101 *Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, c]$, per ogni $c \in]a, b[$. Se $|f|$ è integrabile su $[a, b[$, allora anche f lo è, e si ha che*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|\,.$$

Una funzione che soddisfa l'ipotesi del corollario sopra menzionato sarà detta L-integrabile. Enunciamo ora un corollario del Criterio di Confronto che è spesso utilizzato nella pratica.

Corollario 102 *Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni con valori positivi, integrabili su $[a, c]$ per ogni $c \in]a, b[$. Supponiamo che esista il limite*

$$L = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Allora, valgono le seguenti conclusioni:

a) se $L \in]0, +\infty[$, allora f è integrabile su $[a, b[$ se e solo se lo è g;

b) se $L = 0$ e g è integrabile su $[a, b[$, allora lo è anche f;

c) se $L = +\infty$ e g non è integrabile su $[a, b[$, allora neppure f lo è.

Dimostrazione. Caso a). Se $L \in]0, +\infty[$, esiste un $\bar{c} \in]a, b[$ tale che

$$x \in [\bar{c}, b[\quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3L}{2}\,,$$

cioè,

$$x \in [\bar{c}, b[\quad \Rightarrow \quad f(x) \leq \frac{3L}{2} g(x) \quad \text{e} \quad g(x) \leq \frac{2}{L} f(x)\,.$$

La conclusione segue allora dal Criterio di Confronto.

Caso b). Se $L=0$, esiste un $\bar{c}\in\,]a,b[$ tale che, se $x\in[\bar{c},b[\,$, allora $f(x)\leq g(x)$, e si applica il Criterio di Confronto.

Caso c). Se $L=+\infty$ ci riconduciamo al caso b) scambiando i ruoli di f e g. ■

Esempio. Consideriamo la funzione $f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=e^{1/(x^2+1)}-1\,.$$

Come funzione di confronto, prendiamo

$$g(x)=\frac{1}{x^2+1}\,.$$

Essa è integrabile su $[0,+\infty[\,$, con

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx=\lim_{c\to+\infty}[\arctan x]_0^c=\frac{\pi}{2}\,.$$

Dato che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{t}=1\,,$$

concludiamo che anche f è integrabile su $[0,+\infty[\,$.

Consideriamo ora il caso di una funzione $f:\,]a,b]\to\mathbb{R}$, con $a\geq-\infty$. Ecco una definizione analoga del suo integrale.

Definizione 103 *Diciamo che una funzione $f:\,]a,b]\to\mathbb{R}$ è "integrabile" se f è integrabile su $[c,b]$ per ogni $c\in\,]a,b[\,$, e il limite*

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f$$

esiste ed è finito. In tal caso, questo limite si chiama "integrale" di f su $]a,b]$ e si denota con $\int_a^b f$, o con $\int_a^b f(x)\,dx$.

Data la funzione $f:\,]a,b]\to\mathbb{R}$, è possibile considerare la funzione $g:[a',b'[\,\to\mathbb{R}$, con $a'=-b$ e $b'=-a$, definita da $g(x)=f(-x)$. È facile vedere che f è integrabile su $]a,b]$ se e solo se g è integrabile su $[a',b'[\,$. In questo modo ci riconduciamo alla situazione precedente.

Definiamo anche l'integrale di una funzione $f:\,]a,b[\,\to\mathbb{R}$, con $-\infty\leq a<b\leq+\infty$, nel modo seguente.

Definizione 104 *Diciamo che $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ è "integrabile" se, una volta fissato un punto $p \in]a,b[$, la funzione f è integrabile su $[p,b[$ e su $]a,p]$. In tal caso, si pone*

$$\int_a^b f = \int_a^p f + \int_p^b f\,.$$

È facile verificare che la definizione data non dipende dalla scelta di $p \in]a,b[$.

Esempi. Se $a, b \in \mathbb{R}$, si può verificare che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{[(x-a)(b-x)]^\beta}$$

è integrabile su $]a,b[$ se e solo se $\beta < 1$. In questo caso, è possibile scegliere, ad esempio, $p = (a+b)/2$.

Un altro caso si presenta quando $a = -\infty$ e $b = +\infty$. Per esempio, si verifica facilmente che la funzione $f(x) = (x^2+1)^{-1}$ è integrabile su $]-\infty, +\infty[$. Prendendo ad esempio $p = 0$, abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \pi\,.$$

Un'altra situazione che si potrebbe presentare nelle applicazioni è il caso di una funzione il cui dominio sia un intervallo privato di un punto interno.

Definizione 105 *Dati $a < q < b$, diciamo che una funzione $f : [a,b] \setminus \{q\} \to \mathbb{R}$ è "integrabile" se f è integrabile sia su $[a,q[$ che su $]q,b]$. In tal caso, poniamo*

$$\int_a^b f = \int_a^q f + \int_q^b f\,.$$

Ad esempio, se $a < 0 < b$, la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}/x$ è integrabile su $[a,b] \setminus \{0\}$ e

$$\int_a^b \frac{\sqrt{|x|}}{x}\,dx = \int_a^0 \frac{-1}{\sqrt{-x}}\,dx + \int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{b} - 2\sqrt{-a}\,.$$

D'altro canto, la funzione $f(x) = 1/x$ non è integrabile su $[-1,1] \setminus \{0\}$, anche se il fatto che f sia dispari potrebbe portarci a supporre che il suo integrale sia pari a zero. Tuttavia, così facendo, si perderebbero alcune proprietà importanti dell'integrale, come ad esempio l'additività sui sotto-intervalli.

33 Serie e integrali

Ora dimostriamo un teorema che evidenzia lo stretto legame tra la teoria delle serie numeriche e quella dell'integrale.

Teorema 106 *Sia* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione positiva, decrescente e integrabile su* $[1, c]$, *per ogni* $c > 1$. *Allora la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ *converge se e solo se* f *è integrabile su* $[1, +\infty[$. *Inoltre, si ha*

$$\int_1^{+\infty} f \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f\,.$$

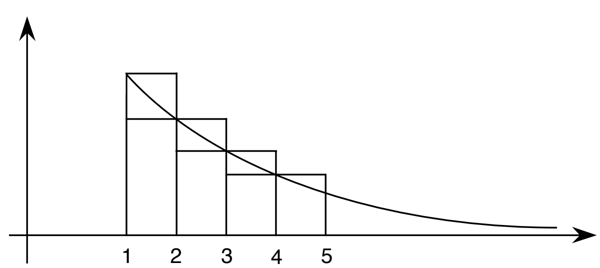
Dimostrazione. Per $x \in [k, k+1]$ si ha che $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, quindi

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k)\,.$$

Sommando, otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)\,.$$

Essendo f positiva, la successione $\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)_n$ e la funzione $c \mapsto \int_1^c f$ sono entrambe crescenti e quindi hanno un limite per $n, c \to +\infty$. La conclusione segue ora dal teorema di confronto per i limiti. ■



Dovrebbe essere chiaro che la scelta del punto di partenza $a = 1$ sia per l'integrale che per la serie non è in alcun modo obbligata.

Esempio. Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}$; in questo caso,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx\,,$$

e quindi

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{3}{2} \,.$$

Una maggiore accuratezza si ottiene calcolando la somma di alcuni termini iniziali e poi utilizzando la stima fornita dall'integrale. Per esempio, separando i primi due termini, abbiamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{8} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \,,$$

con

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{27} + \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx \,.$$

Si dimostra così che

$$\frac{255}{216} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{263}{216} \,.$$

34 Serie di numeri complessi

Quando consideriamo una serie $\sum_k a_k$ i cui termini sono numeri complessi $a_k = x_k + iy_k$, dove $x_k = \Re(a_k)$ e $y_k = \Im(a_k)$, possiamo scrivere le somme parziali come

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (x_k + iy_k) = \sum_{k=0}^{n} x_k + i \sum_{k=0}^{n} y_k = \sigma_n + i\tau_n \,,$$

dove $\sigma_n = \Re(s_n)$ e $\tau_n = \Im(s_n)$. Abbiamo quindi una successione $(\sigma_n, \tau_n)_n$ in $\mathbb{R}^2$. Ricordando che una tale successione ha un limite in $\mathbb{R}^2$ se e solo se entrambe le sue componenti hanno un limite in $\mathbb{R}$, otteniamo il seguente enunciato.

Teorema 107 *Se $a_k = x_k + iy_k$, con x_k e y_k numeri reali, la serie $\sum_k a_k$ converge se e solo se entrambe le serie $\sum_k x_k$ e $\sum_k y_k$ convergono. In tal caso,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + i \sum_{k=0}^{\infty} y_k \,.$$

Esempio. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k+1} = 1 + \frac{i}{2} - \frac{1}{3} - \frac{i}{4} + \frac{1}{5} + \frac{i}{6} - \frac{1}{7} - \frac{i}{8} + \cdots + \frac{i^n}{n+1} + \ldots \,.$$

La parte reale è

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \,,$$

mentre la parte immaginaria è

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots .$$

Entrambe convergono per il Criterio di Leibniz per le serie a segni alterni, quindi anche la serie data converge.

Da notare che, nell'esempio precedente, la serie non converge assolutamente, poiché

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{i^k}{k+1} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

è la serie armonica, che sappiamo essere divergente.

Introduciamo ora il "prodotto di Cauchy" di due serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Esso è definito dalla serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j \right).$$

È necessario tuttavia prestare attenzione alla sua convergenza. Infatti, non è vero in generale che se le due serie convergono, allora anche la loro serie prodotto di Cauchy converge. Il teorema seguente afferma che ciò sarà vero se almeno una delle due serie converge assolutamente.

Teorema 108 (Teorema di Mertens) *Supponiamo che le serie $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ convergano, con somme rispettivamente A e B. Se almeno una delle due serie converge assolutamente, allora la serie prodotto di Cauchy converge con somma AB.*

Dimostrazione. Per fissare le idee, supponiamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converga assolutamente, e poniamo $\bar{A} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$. Indichiamo con

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j$$

il termine k-esimo della serie prodotto di Cauchy. Siano

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \,, \qquad s'_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \,, \qquad s''_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \,.$$

Definiamo inoltre $r'_n = B - s'_n$. Allora

$$\begin{aligned} s''_n &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + \cdots + (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n) \\ &= a_0 s'_n + a_1 s'_{n-1} + \cdots + a_{n-1} s'_1 + a_n s'_0 \\ &= a_0 (B - r'_n) + a_1 (B - r'_{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(B - r'_1) + a_n (B - r'_0) \\ &= s_n B - (a_0 r'_n + a_1 r'_{n-1} + \cdots + a_{n-1} r'_1 + a_n r'_0)\,. \end{aligned}$$

Siccome $\lim_n s_n B = AB$, la dimostrazione sarà completa se

$$\lim_n (a_0 r'_n + a_1 r'_{n-1} + \cdots + a_{n-1} r'_1 + a_n r'_0) = 0\,.$$

Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Usando il fatto che $\lim_n r'_n = 0$, possiamo trovare un $\bar{n}_1$ tale che

$$n \geq \bar{n}_1 \quad \Rightarrow \quad |r'_n| < \varepsilon\,.$$

Poniamo $\overline{R} = \max\{|r'_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Per il Criterio di Cauchy, esiste un $\bar{n}_2 \geq \bar{n}_1$ tale che

$$n \geq \bar{n}_2 \quad \Rightarrow \quad |a_{n-\bar{n}_1+1}| + |a_{n-\bar{n}_1+2}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon\,.$$

Allora, se $n \geq \bar{n}_2$,

$$\begin{aligned} |a_0 r'_n + \, & a_1 r'_{n-1} + \cdots + a_{n-1} r'_1 + a_n r'_0| \leq \\ & \leq |a_0|\,|r'_n| + \cdots + |a_{n-\bar{n}_1}|\,|r'_{\bar{n}_1}| + |a_{n-\bar{n}_1+1}|\,|r'_{\bar{n}_1-1}| + \cdots + |a_n|\,|r'_0| \\ & \leq \varepsilon(|a_0| + \cdots + |a_{n-\bar{n}_1}|) + \overline{R}(|a_{n-\bar{n}_1+1}| + \cdots + |a_n|) \\ & \leq \varepsilon \bar{A} + \overline{R}\,\varepsilon = (\bar{A} + \overline{R})\,\varepsilon\,, \end{aligned}$$

completando così la dimostrazione. ∎

35 La funzione esponenziale complessa

Studiamo ora, per ogni $z \in \mathbb{C}$, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,.$$

Si tratta di una serie di potenze, che converge assolutamente, poiché

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z^k}{k!} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|}\,.$$

È quindi possibile definire una funzione $\mathcal{F} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in questo modo:

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} .$$

Ricordiamo che, se $z = x \in \mathbb{R}$, allora $\mathcal{F}(x)$ coincide con $\exp(x)$, ossia

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} .$$

Possiamo quindi interpretare questa funzione $\mathcal{F}$ come un'estensione della funzione esponenziale al piano complesso $\mathbb{C}$. Per questo motivo, chiameremo $\mathcal{F}$ la "funzione esponenziale complessa", e scriveremo $\exp(z)$ o e^z al posto di $\mathcal{F}(z)$.

Teorema 109 *Per ogni z_1 e z_2 in $\mathbb{C}$ si ha che*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2) .$$

<u>Dimostrazione</u>. Le serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}$ convergono assolutamente, e le loro somme sono $\exp(z_1)$ e $\exp(z_2)$, rispettivamente. Quindi, per il Teorema di Mertens 108, la serie prodotto di Cauchy converge, e la sua somma è $\exp(z_1)\exp(z_2)$. D'altra parte, la serie prodotto di Cauchy è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{z_1^{k-j}}{(k-j)!} \frac{z_2^j}{j!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z_1^{k-j} z_2^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} ,$$

(abbiamo usato la Formula del Binomio) e la sua somma è $\exp(z_1 + z_2)$, da cui la conclusione. ∎

Scrivendo $z = x + iy$, otteniamo

$$\exp(x + iy) = \exp(x)\exp(iy) .$$

Inoltre,

$$\exp(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \lim_n q_n(y) ,$$

dove

$$\begin{aligned} q_n(y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\,\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\,\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\,\frac{y^7}{7!} + \cdots + i^n \frac{y^n}{n!} . \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che

$$q_n(y) = q_n^{(1)}(y) + i\, q_n^{(2)}(y)\,,$$

dove

$$q_n^{(1)}(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots + (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!}$$

se $n = 2m$ oppure $n = 2m + 1$, mentre

$$q_n^{(2)}(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots + (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

se $n = 2m + 1$ oppure $n = 2m + 2$. Siccome

$$\lim_{n\to+\infty} q_n^{(1)}(y) = \cos y\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} q_n^{(2)}(y) = \sin y\,,$$

concludiamo che

$$\lim_n q_n(y) = \Big(\lim_n q_n^{(1)}(y)\,,\, \lim_n q_n^{(2)}(y)\Big) = (\cos y\,, \sin y)\,,$$

quindi

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)\,.$$

Questa è la **Formula di Eulero**.

Si può facilmente verificare che

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\,, \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\,.$$

Queste formule possono essere utilizzate per estendere le funzioni cos e sin al campo complesso, semplicemente considerando $t \in \mathbb{C}$. Le funzioni iperboliche possono anch'esse essere estese a $\mathbb{C}$, mediante le formule

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}\,, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}\,.$$

Notiamo che

$$\cos t = \cosh(it)\,, \qquad \sin t = -i\, \sinh(it)\,.$$

A questo punto si capisce bene lo stretto legame tra le funzioni trigonometriche e le funzioni iperboliche.

36 Serie di funzioni

Siano E uno spazio metrico e F uno spazio vettoriale normato. Se abbiamo una successione di funzioni $f_k : E \to F$, per ogni $x \in E$ possiamo chiederci se la serie $\sum_k f_k(x)$ converge o meno. Se esiste un sottoinsieme $U \subseteq E$ e una funzione $f : U \to F$ tale che

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = f(x)\,, \qquad \text{per ogni } x \in U\,,$$

diciamo che la serie "converge puntualmente" a f su U; ciò accade quando, ponendo $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, la successione $(s_n)_n$ converge puntualmente a f su U. Diciamo che la serie "converge uniformemente" a f su U se la convergenza di $(s_n)_n$ a f è uniforme su U, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall x \in U \quad n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; \left\| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x) \right\| < \varepsilon\,.$$

Teorema 110 *Se ogni funzione $f_k : E \to F$ è continua su $U \subseteq E$ e la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente a f su U, allora anche f è continua su U.*

Dimostrazione. È una conseguenza diretta dell'analogo teorema sulle successioni di funzioni. ■

Teorema 111 *Siano E un compatto, F uno spazio di Banach, e supponiamo che tutte le funzioni $f_k : E \to F$ siano continue. Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ converge, allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente a una funzione continua su E.*

Dimostrazione. Sappiamo che $V = \mathcal{C}(E, F)$ è uno spazio di Banach, e $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ è una serie in V che converge in norma. Quindi, converge in V, il che significa che converge uniformemente. ■

Esempio. Siano $E = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ e consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin(e^{3kx-1} + \arctan(x^2 + \sqrt{k}\,))\,.$$

Studiamo la serie delle norme in $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Abbiamo che

$$\sup \left\{ \left| \frac{1}{k^2} \sin(e^{3kx-1} + \arctan(x^2 + \sqrt{k}\,)) \right| : x \in [a, b] \right\} \leq \frac{1}{k^2}\,,$$

e la serie $\sum_k \frac{1}{k^2}$ converge. Quindi la serie converge in norma, pertanto anche uniformemente.

Adattiamo ora i due teoremi visti precedentemente al contesto delle serie.

Teorema 112 *Sia* $(f_k)_k$ *una successione in* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *tale che la serie* $\sum_k f_k$ *è uniformemente convergente. Allora,*

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(t)\,dt\,.$$

Dimostrazione. È una conseguenza diretta del teorema sul passaggio al limite sotto segno di integrale, quando applicato alla successione di funzioni $(s_n)_n$. ■

Teorema 113 *Sia* $(f_k)_k$ *una successione in* $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$*. Supponiamo che la serie* $\sum_k f_k$ *e la serie delle derivate* $\sum_k f_k'$ *convergano uniformemente a delle funzioni* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *e* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$*, rispettivamente. Allora,* f *è di classe* $\mathcal{C}^1$*, e* $f'=g$*. Di conseguenza, possiamo scrivere*

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$. Allora, $(s_n)_n$ è in $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$, e $s_n' = \sum_{k=0}^n f_k'$. Per ipotesi, $\lim_n s_n = f$ e $\lim_n s_n' = g$ uniformemente su I. Quindi, per il teorema sullo scambio limite-derivata, deve essere che $f\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ e $f'=g$. ■

Iterando lo stesso argomento, possiamo facilmente generalizzare il precedente teorema.

Teorema 114 *Sia* $(f_k)_k$ *una successione in* $\mathcal{C}^m([a,b],\mathbb{R})$*. Supponiamo che le serie*

$$\sum_k f_k\,,\quad \sum_k f_k'\,,\quad \sum_k f_k''\,,\ \ldots\,,\ \sum_k f_k^{(m)}$$

convergano tutte uniformemente su $[a,b]$ *a delle funzioni* f*,* g_1*,* g_2*, …,* g_m*, rispettivamente. Allora,* f *è di classe* $\mathcal{C}^m$*, e*

$$f'=g_1\,,\quad f''=g_2\,,\ \ldots\,,\ f^{(m)}=g_m\,.$$

36.1 Serie di potenze

Un esempio importante di serie di funzioni è fornito dalle "serie di potenze"

$$(PS)_{\mathbb{C}} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\,,$$

i cui termini sono funzioni $f_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definite da $f_k(z) = a_k z^k$, per opportuni coefficienti $a_k \in \mathbb{C}$. Analizziamo dapprima la convergenza puntuale di una tale serie.

Teorema 115 *Ponendo*

$$L = \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}\,,$$

abbiamo le seguenti possibilità:

a) se $L = +\infty$, la serie $(PS)_\mathbb{C}$ converge solo per $z = 0$;

b) se $L = 0$, la serie $(PS)_\mathbb{C}$ converge per ogni $z \in \mathbb{C}$;

c) se $L \in]0, +\infty[$, la serie $(PS)_\mathbb{C}$ $\begin{cases} \text{converge se } |z| < \frac{1}{L}\,, \\ \text{non converge se } |z| > \frac{1}{L}\,. \end{cases}$

Dimostrazione. Se $L = +\infty$ e $z \neq 0$, allora $\sqrt[k]{|a_k|} > \frac{1}{|z|}$ per infiniti valori di k, quindi

$$|a_k z^k| = (\sqrt[k]{|a_k|}\,|z|)^k > 1\,, \qquad \text{per infiniti valori di } k\,.$$

Se la serie dovesse convergere, allora dovrebbe essere $\lim_k a_k z^k = 0$, ma non è così. Quindi, se $L = +\infty$, la serie converge solo per $z = 0$.

Se $L = 0$, per ogni $z \in \mathbb{C}$ abbiamo che

$$\limsup_k \sqrt[k]{|a_k z^k|} = |z| \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} = 0\,,$$

quindi la serie converge assolutamente, per il Criterio della Radice.

Assumiamo ora $L \in]0, +\infty[$. Se $|z| < \frac{1}{L}$, allora

$$\limsup_k \sqrt[k]{|a_k z^k|} = |z| \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} = |z|\, L < 1\,,$$

e la serie converge assolutamente, per il Criterio della Radice. Al contrario, se $|z| > \frac{1}{L}$, ossia $L > \frac{1}{|z|}$, allora $\sqrt[k]{|a_k|} > \frac{1}{|z|}$ per infiniti valori di k, quindi

$$|a_k z^k| = (\sqrt[k]{|a_k|}|z|)^k > 1\,, \qquad \text{per infiniti valori di } k\,.$$

Se la serie dovesse convergere, allora dovremmo avere che $\lim_k a_k z^k = 0$, ma non è così. ∎

Definiamo il "raggio di convergenza" r della serie $(PS)_\mathbb{C}$ come segue:

$$r = \begin{cases} 0 & \text{se } L = +\infty\,, \\ +\infty & \text{se } L = 0\,, \\ \dfrac{1}{L} & \text{se } L \in]0, +\infty[\,. \end{cases}$$

Se $r > 0$, diremo che $B(0, r)$ è il "disco di convergenza" della serie. Sottolineiamo che esso è una palla aperta. Se $r = +\infty$, poniamo $B(0, r) = \mathbb{C}$.

Se $r > 0$, la serie $(PS)_{\mathbb{C}}$ converge puntualmente in $B(0, r)$. Tuttavia, questa convergenza potrebbe non essere uniforme. Vediamo ora che la convergenza sarà uniforme su qualsiasi disco più piccolo.

Teorema 116 *Supponiamo che sia $r > 0$. Allora, per ogni $\rho \in]0, r[$ la serie $(PS)_{\mathbb{C}}$ converge in norma, quindi uniformemente, su $\overline{B}(0, \rho)$.*

Dimostrazione. Sia $\rho \in]0, r[$ fissato. Allora,

$$\sup\{|a_k z^k| : |z| \leq \rho\} = |a_k|\rho^k,$$

e poiché

$$\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|\rho^k} = \rho \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} = \rho L < 1\,,$$

la serie $\sum_k |a_k|\rho^k$ converge, per il criterio della radice. Abbiamo così dimostrato che la serie $(PS)_{\mathbb{C}}$ converge in norma su $\overline{B}(0, \rho)$. ■

Corollario 117 *Se $r > 0$ e $f : B(0, r) \to \mathbb{C}$ è definita da*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\,,$$

allora f è continua su $B(0, r)$.

Dimostrazione. Dal teorema precedente, per ogni $\rho \in]0, r[$ la convergenza è uniforme su $\overline{B}(0, \rho)$, quindi f è continua su $\overline{B}(0, \rho)$. Essendo $\rho \in]0, r[$ arbitrario, f è dunque continua in ogni punto di $B(0, r)$. ■

Osservazione 118 *La precedente teoria può essere facilmente adattata a serie del tipo*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

dove $z_0 \in \mathbb{C}$ è un punto fissato. (In effetti, il cambio di variabile $u = z - z_0$ ci riporta al caso considerato precedentemente.) Il disco di convergenza, in questo caso, è $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.

36.2 Serie di Taylor

Consideriamo ora la serie di potenze

$$(PS)_{\mathbb{R}} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \,,$$

dove $x \in \mathbb{R}$ e tutti i coefficienti a_k sono anch'essi numeri reali. Stiamo quindi considerando la serie $\sum_k f_k$, dove le funzioni $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono definite da $f_k(x) = a_k x^k$. Pertanto, se $r > 0$, il disco di convergenza $B(0,r)$ risulta ora ridotto all'intervallo $]-r, r[$ e, se $r = +\infty$, esso coincide con l'intera retta reale $\mathbb{R}$. In questi casi, ci si potrebbe chiedere se la somma della serie $(PS)_{\mathbb{R}}$ sia derivabile su $]-r, r[$.

Teorema 119 *Sia $r > 0$ il raggio di convergenza della serie $(PS)_{\mathbb{R}}$, e sia*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad \text{per ogni } x \in]-r, r[\,.$$

Allora, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza r. Inoltre, la funzione $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ è derivabile, e

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \qquad \text{per ogni } x \in]-r, r[\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Essendo

$$\limsup_k \sqrt[k]{|k a_k|} = \lim_k \sqrt[k]{k}\, \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}\,,$$

vediamo che il raggio di convergenza per la serie $\sum_k k a_k x^{k-1}$ è uguale a r. Possiamo quindi definire la nuova funzione $g :]-r, r[\to \mathbb{R}$ come $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$. Per ogni $\rho \in]0, r[$, sappiamo che la convergenza della serie è uniforme su $[-\rho, \rho]$.

Ponendo $f_k(x) = a_k x^k$, abbiamo che $f = \sum_k f_k$ e $g = \sum_k f_k'$, la convergenza essendo uniforme su $[-\rho, \rho]$. Per il Teorema 113, f è derivabile su $[-\rho, \rho]$ e $f'(x) = g(x)$, per ogni $x \in [-\rho, \rho]$. La conclusione segue, poiché $\rho \in]0, r[$ è arbitrario. ■

Iterando lo stesso argomento e facendo uso del Teorema 114 si ottiene facilmente la seguente generalizzazione.

Teorema 120 *Sia $r > 0$ il raggio di convergenza della serie $(PS)_{\mathbb{R}}$, e sia*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad \text{per ogni } x \in]-r, r[\,.$$

Allora, le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}\,, \quad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}\,, \quad \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3}\,, \quad \dots \quad ,$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1) a_k x^{k-m}\,, \quad \dots$$

hanno tutte lo stesso raggio di convergenza r. Inoltre, la funzione $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ è infinitamente derivabile e, per ogni intero positivo j,

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-j+1) a_k x^{k-j}, \quad \text{per ogni } x \in]-r, r[\,.$$

Osserviamo ora che, prendendo $x = 0$ nella formula precedente, otteniamo

$$f^{(j)}(0) = j!\, a_j\,,$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$ (ricordando che $f^{(0)} = f$). Ecco allora che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k\,.$$

Questa è la "serie di Taylor" associata alla funzione f in $x_0 = 0$. Abbiamo quindi dimostrato che qualsiasi serie di potenze con raggio di convergenza positivo r definisce una funzione f che è analitica su $]-r, r[$.

Osservazione 121 *Riferendosi al Remark 118, possiamo estendere le considerazioni fatte per la serie $(PS)_{\mathbb{R}}$ anche alle serie di potenze del tipo*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k\,,$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto fissato. Se il raggio di convergenza r è positivo, il disco di convergenza è $]x_0 - r, x_0 + r[$ e la funzione $f :]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R}$ definita dalla somma della serie può essere scritta come

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k\,,$$

cioè, $f(x) = \lim_n p_n(x)$, dove $p_n(x)$ è il polinomio di Taylor.

36.3 Serie di Fourier

Consideriamo ora i "polinomi trigonometrici" con un periodo fissato $T > 0$. Essi sono definiti dalla formula

$$f_n(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right),$$

dove c_0, a_k e b_k sono costanti reali. Siamo interessati a studiare la convergenza della successione di funzioni $(f_n)_n$.

Teorema 122 *Se esiste una funzione $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_n f_n(t) = f(t) \quad \textit{uniformemente su } [0, T],$$

allora necessariamente

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt,$$
$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt,$$
$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt.$$

Dimostrazione. Per il Teorema 112,

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)\, dt &= \int_0^T \left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right) \right) dt \\ &= c_0 T + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right) dt = c_0 T,\end{aligned}$$

da cui segue la formula per c_0. Analogamente, per ogni intero $j \geq 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi j}{T} t\right) dt &= \int_0^T \left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right) \right) \cos\left(\frac{2\pi j}{T} t\right) dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right) \cos\left(\frac{2\pi j}{T} t\right) dt.\end{aligned}$$

D'altra parte, integrando per parti due volte, vediamo che per ogni intero positivo $k \neq j$,

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \cos\left(\frac{2\pi j}{T} t\right) dt = 0, \quad \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \cos\left(\frac{2\pi j}{T} t\right) dt = 0,$$

mentre se $k = j$,

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi j}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right)dt = 0\,, \quad \int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi j}{T}t\right)dt = \frac{T}{2}\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right)\,dt = \frac{T}{2}a_j\,,$$

da cui si ottiene la formula per a_j. Analogamente si può vedere che

$$\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi j}{T}t\right)dt = \frac{T}{2}b_j\,,$$

che ci fornisce la formula per b_j. ■

Per ogni funzione continua $f : [0,T] \to \mathbb{R}$, definiamo i suoi "coefficienti di Fourier"

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt\,, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt\,,$$

e la sua "serie di Fourier"

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right).$$

Il problema è: questa serie converge per ogni $t \in [0,T]$?

La risposta è, in generale, negativa: esistono funzioni continue $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ per le quali la serie di Fourier non converge in alcuni punti $t \in [0,T]$. Tuttavia, ci sono molti modi per superare questa difficoltà. Ne vedremo rapidamente alcuni.

Definiamo le somme parziali della serie di Fourier come

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right).$$

Possiamo ora introdurre le "medie di Cesàro"

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1}\left[f_0(t) + f_1(t) + \cdots + f_n(t)\right]\,,$$

per poter enunciare, senza dimostrazione, quanto segue.

Teorema 123 (Teorema di Fejer) *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e periodica di periodo T, allora*

$$\lim_n \sigma_n(t) = f(t)\,, \qquad \textit{uniformemente su } \mathbb{R}\,.$$

Eccone una conseguenza diretta.

Corollario 124 *Siano $f, \tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue e periodiche di periodo T. Se i rispettivi coefficienti di Fourier sono tali che $a_k = \tilde{a}_k$ e $b_k = \tilde{b}_k$ per ogni k, allora f e $\tilde{f}$ coincidono.*

Dimostrazione. Con le notazioni adattate a questa situazione, avremo che $\sigma_n(t) = \tilde{\sigma}_n(t)$, per ogni n, quindi

$$f(t) - \tilde{f}(t) = \lim_n (\sigma_n(t) - \tilde{\sigma}_n(t)) = 0\,,$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. ■

Potremmo anche definire i "coefficienti di Fourier complessi"

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi k}{T} t}\, dt\,,$$

per $k \in \mathbb{Z}$. Ponendo $b_0 = 0$, vediamo che

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{se } k < 0\,, \\ \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{se } k \geq 0\,, \end{cases}$$

così che

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T} t}\,.$$

Nel seguito, usiamo la notazione

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} \sigma_k \right).$$

Corollario 125 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo T. Se la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$ converge, allora*

$$\lim_n f_n(t) = f(t)\,, \qquad \textit{uniformemente su } \mathbb{R}\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\left| c_k e^{i\frac{2\pi k}{T} t} \right| = |c_k|\,.$$

Pertanto, se la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$ converge, per il Teorema 111 la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente a qualche funzione continua $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che è periodica di periodo T. D'altra parte, per questa funzione,

$$\begin{aligned}\tilde{c}_k &= \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}(t)e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\Big)\,e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f_n(t)e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\,dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{i\frac{2\pi j}{T}t}e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=-n}^{n}\frac{1}{T}\int_0^T c_j e^{i\frac{2\pi(j-k)}{T}t}\,dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T c_k\,dt = c_k\,,\end{aligned}$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Per il Corollario 124, le due funzioni f e $\tilde{f}$ coincidono, per cui la dimostrazione è completa. ■

Nel seguente teorema, la funzione f potrebbe essere discontinua in alcuni punti.

Teorema 126 (Teorema di Dirichlet) *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo T. Si supponga che ci siano un numero finito di punti $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$, con*

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T\,,$$

tali che f è derivabile con continuità su ogni intervallo $]t_{j-1}, t_j[$, con $j = 1, 2, \dots, N$. Nei punti t_j (dove la funzione potrebbe non essere continua, oppure, se continua, potrebbe non essere derivabile), esistano e siano finiti i seguenti limiti:

$$\lim_{s\to t_j^-} f(s)\,, \quad \lim_{s\to t_j^+} f(s)\,, \quad \lim_{s\to t_j^-} f'(s)\,, \quad \lim_{s\to t_j^+} f'(s)\,.$$

Allora, per ogni $t \in [0, T]$,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\Big(\frac{2\pi k}{T}t\Big) + b_k\sin\Big(\frac{2\pi k}{T}t\Big)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{s\to t^-} f(s) + \lim_{s\to t^+} f(s)\Big)\,.$$

Inoltre, la convergenza è uniforme su ogni intervallo compatto su cui f è continua.

Osserviamo che, se f è continua in t, allora

$$f(t) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{s\to t^-} f(s) + \lim_{s\to t^+} f(s)\Big)\,.$$

Per le dimostrazioni dei Teoremi 123 e 126, si rimanda al libro di Körner [4].

Forniamo ora due esempi di applicazioni del teorema precedente.

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita da

$$f(t) = t\,, \qquad \text{se} \;\; t \in [-\pi, \pi[\,.$$

Si verifica facilmente che le ipotesi del Teorema di Dirichlet sono soddisfatte. Calcoliamo

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t\, dt = 0\,,$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(kt)\, dt = 0\,,$$

poiché $t \mapsto t \cos(kt)$ è una funzione dispari; inoltre, integrando per parti,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(kt)\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-t\, \frac{\cos(kt)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kt)}{k}\, dt \right) = \frac{2\,(-1)^{k+1}}{k}\,. \end{aligned}$$

Possiamo quindi affermare che

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt)\,, \qquad \text{per ogni } t \in \,]-\pi, \pi[\,.$$

Come caso particolare, prendendo $t = \frac{\pi}{2}$, otteniamo la bella formula

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Esempio 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita da

$$f(t) = t^2\,, \quad \text{se } t \in [-\pi, \pi[\,.$$

Si vede subito che sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Dirichlet. Calcoliamo

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \frac{\pi^2}{3}\,,$$

e, integrando per parti,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(kt)\, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[t^2\, \frac{\sin(kt)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t\, \frac{\sin(kt)}{k}\, dt \right) = -\frac{2}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} t\, \sin(kt)\, dt = \\ &= -\frac{2}{\pi k} \left(\left[-t\, \frac{\cos(kt)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kt)}{k}\, dt \right) = \frac{4\,(-1)^k}{k^2}\,. \end{aligned}$$

D'altronde,

$$b_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(kt)\, dt = 0\,,$$

poiché $t \mapsto t^2 \sin(kt)$ è una funzione dispari. Essendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, possiamo quindi affermare che

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\,(-1)^k}{k^2} \cos(kt)\,, \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}\,.$$

Concentriamoci su due casi interessanti. Se $t = \pi$, otteniamo la formula

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}\,,$$

che ci dà

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,;$$

d'altra parte, se $t = 0$, abbiamo

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\,(-1)^k}{k^2}\,,$$

che ci fornisce la formula

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$