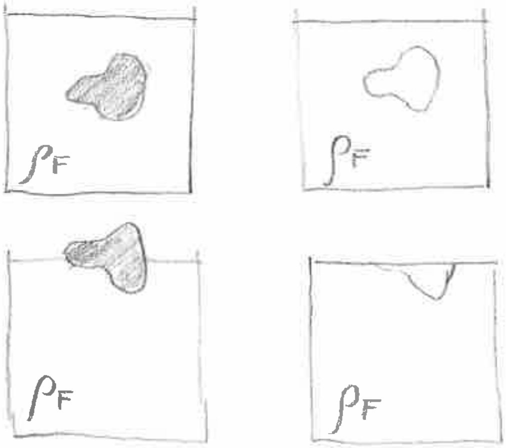
LEZIONE 4.2: PRINCIPIO DI ARCHIMEDE E FLUSSO (# 18)

4.2.1 Principio di Archimede

"Ogni corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del fluido spostato."

(Archimede di Siracusa, 287-212 a.C)

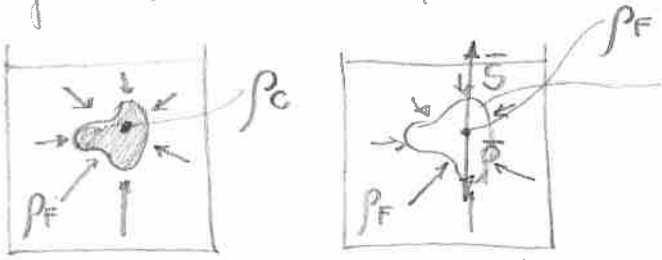
fluido spostato:



volume del corpo V se completamente immerso

volume immerso V_i se galleggiante

La spinta di Archimede è la risultante delle forze di superficie. Sia il corpo C completamente immerso ($V_i = V$)



superficie immaginaria a forma dell'oggetto

con oggetto   senza oggetto

Ragionamento: la risultante delle forze di superficie deve bilanciare esattamente la forza peso (di volume) del fluido, NON del corpo!

$$\vec{S} = -\vec{P}_F = -m_F\vec{g} = -\rho_F V \vec{g}$$

$$\vec{W} = m_C\vec{g} = \rho_C V \vec{g} \quad \rightarrow V = \text{volume del corpo}$$

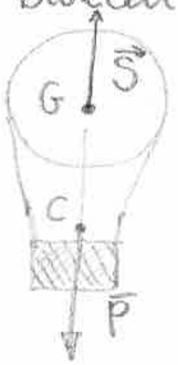
$$\Sigma\vec{F} = \vec{S} + \vec{W} = \underbrace{(\rho_C - \rho_F)}_{\substack{>0 \text{ affonda} \\ <0 \text{ galleggia}}} V\vec{g}$$

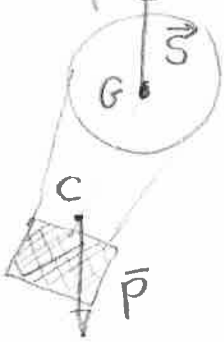
Equilibrio stabile

Sempre per lo stesso ragionamento $\vec{S}$ è applicata nel baricentro del fluido spostato (centro di galleggiamento).

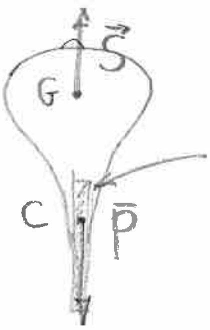
G → centro di galleggiamento

C → baricentro del corpo

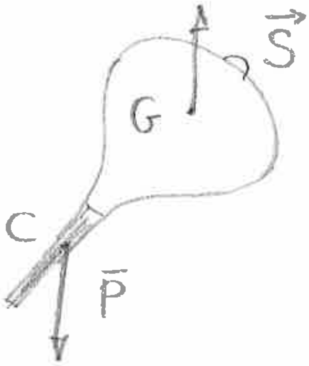




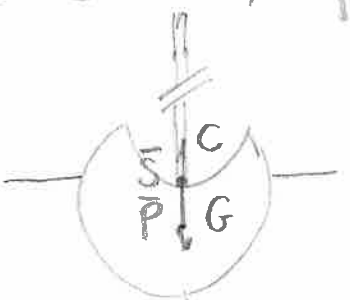
G è più alto di C: la coppia $(\bar{P}, \bar{S})$ tende a raddrizzare la mongolfiera

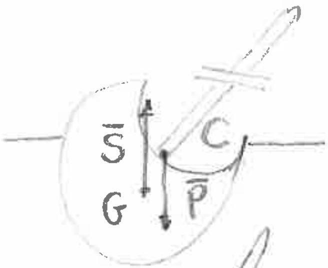


inserto metallico

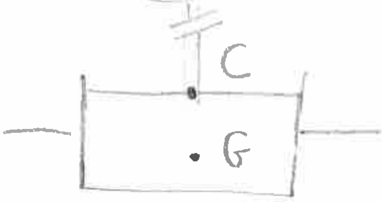


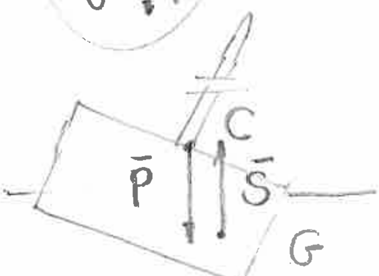
Se G è più in basso rispetto a C, come nelle barche o nelle navi, è fondamentale la forma dello scafo:





il momento fa rovesciare la barca con scafo cilindrico





invece raddrizza la barca a fondo piatto

4.2.2 Considerazioni energetiche

Corpo con massa M e centro di massa C ad altezza h_C rispetto alla superficie del liquido "costa" energia $E_g = Mgh_C$

Inoltre sposta $\rho_F V_i = M$ di liquido da h_G (<0) a 0 (superficie)

Questo spostamento "costa" energia $E_{FE} = Mg|h_G|$.

Complessivamente, il corpo per galleggiare richiede energia

$$E = E_g + E_{FE} = Mg\left(h_C + |h_G|\right)$$

Il minimo di questa funzione di costo indica equilibrio stabile.

Esempio: un cilindro di raggio R ed altezza h galleggia con asse verticale o orizzontale? Dipende da R ed h. Ovviamente:

$R \gg h$: asse verticale $\qquad\qquad$ $R \ll h$: asse orizzontale

Calcoliamo E nei due casi; per semplificare $\rho_C = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}$

$\Rightarrow V_i = \frac{1}{2} V$

C è sulla superficie $\Rightarrow h_C = 0 \Rightarrow E_g = 0$

Per quanto riguarda E_{FE}:

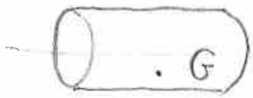
1) Asse verticale

← cilindro metà immerso metà sommerso

$|h_G| = h/4$

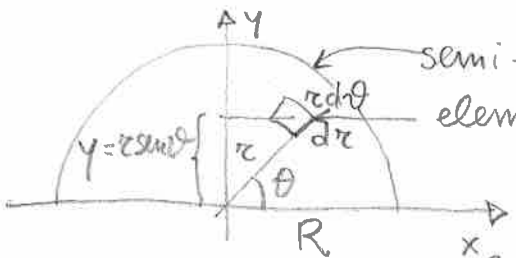
$$E_{FE}^{(v)} = Mg\frac{h}{4}$$ con $M = \rho_C V$ massa del cilindro (e del fluido spostato)

2) Asse orizzontale



$|h_G| = ?$

Per trovare $|h_G|$ devo fare un integrale:



← semi-cilindro immerso

elemento di superficie $dS = r\,dr\,d\theta$

$$\Rightarrow dm = \rho_C dV = \rho_C h\,dS = \rho_C h\,r\,dr\,d\theta$$

$$h_G = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\int_0^R r\,dr \int_0^\pi d\theta\, r\,\mathrm{sen}\theta\, \cancel{\rho_C h}}{\int_0^R r\,dr\int_0^\pi d\theta\, \cancel{\rho_C h}} = \frac{\int_0^R r^2 dr \left[-\cos\theta\right]_0^\pi {}^{=2}}{\int_0^R r\,dr\,(\pi - 0)}$$

$$= \frac{2R^3/3}{\pi R^2/2} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$E_{FE}^{(o)} = Mg\frac{4R}{3\pi}$$

Il cilindro si dispone con asse verticale se:

$$E_{Fe}^{(v)} < E_{Fe}^{(o)}$$

$$\cancel{Mg}\frac{h}{4} < \cancel{Mg}\frac{4R}{3\pi}$$

$$h < \frac{16}{3\pi} R \qquad \text{o} \qquad R > \frac{3}{16}\pi h$$

4.2.3 Dinamica dei Fluidi - Linee e tubi di flusso

Per descrivere il moto di un fluido non è pensabile di seguire il moto di ciascuna molecola (descrizione lagrangiana).
Si usa invece una descrizione euleriana: si descrivono alcune grandezze fisiche in funzione della posizione e del tempo.

Esempi:

$$\rho(x,y,z,t)$$
$$\vec{v}(x,y,z,t) \quad \Rightarrow$$
$$p(x,y,z,t)$$

NON seguo le singole particelle, MA descrivo il comportamento locale del fluido

Ci limiteremo a trattare il <u>regime stazionario</u>, in cui queste grandezze fisiche <u>non</u> dipendono dal tempo:

$\rho = \rho(x,y,z) \longrightarrow$ campo scalare

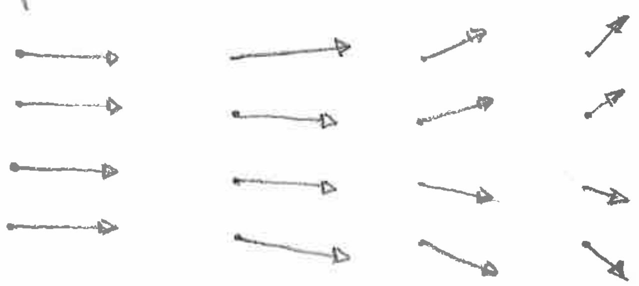
$\vec{v} = \vec{v}(x,y,z) \longrightarrow$ campo vettoriale

$p = p(x,y,z)$

In altre parole, il moto del fluido resta sempre uguale a se stesso.

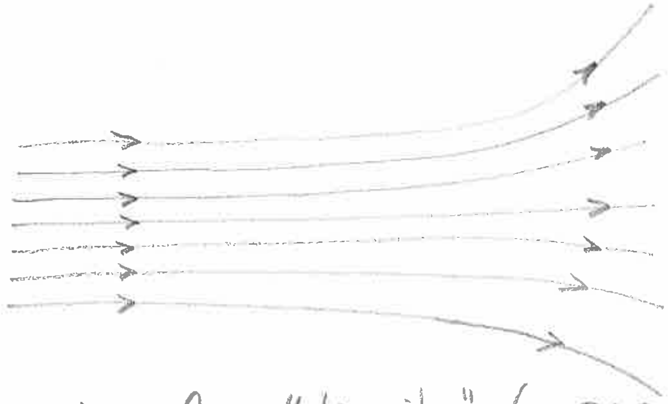
$\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$ è un campo vettoriale. Come posso rappresentarlo graficamente? Due modi:

1. Scelgo un certo numero di posizioni e disegno $\vec{v}$ su ognuna di queste:



in modulo, direzione, e verso

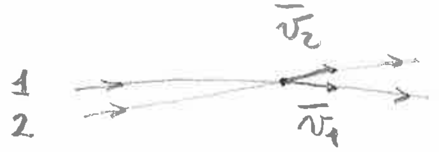
2. Traccio delle linee di flusso, tali che $\vec{v}$ è tangente alla linea in ogni punto:



Si assume che la "densità" (= quanto sono fitte) delle linee sia proporzionale al modulo di $\vec{v}$.

Nei moti stazionari le linee di flusso non cambiano nel tempo.

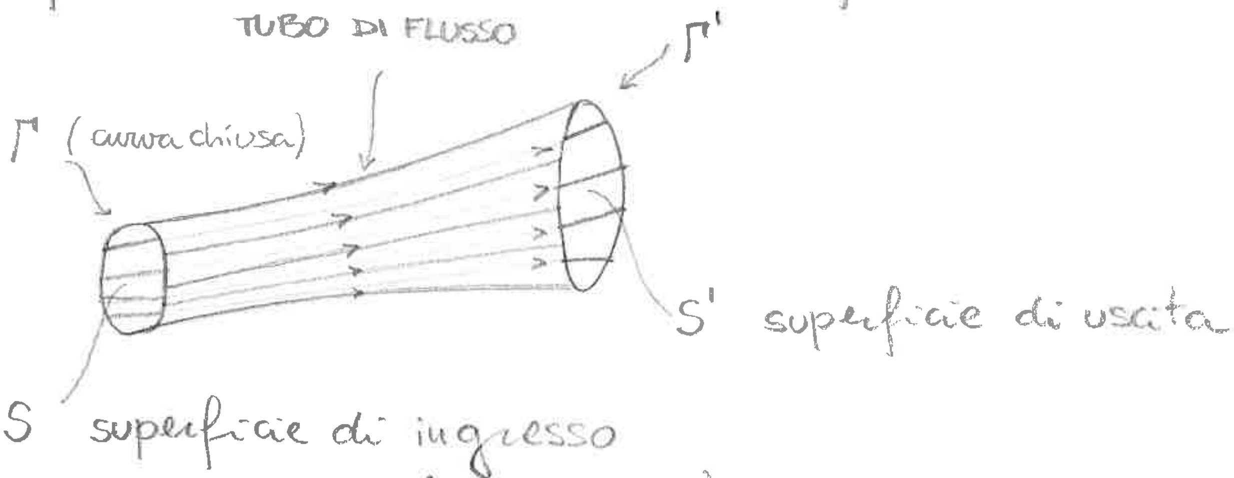
Le linee di flusso non possono intersecarsi ($\vec{v}$ avrebbe nello stesso punto due direzioni diverse)



$\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$

ma per ogni punto devo avere un solo $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$.

Tubo di flusso, delimitato da linee di flusso.



Il fluido non può uscire (né entrare) dalla parete del tubo di flusso: separa il fluido che scorre dentro al tubo da quello esterno.

Distinguiamo tra fluidi: incompressibili $\rho = \text{cost}$ (liquidi)

compressibili $\rho = \rho(x,y,z)$ (gas)

Distinguiamo inoltre tra fluidi:

- non viscosi ("ideali", "acqua asciutta") $\eta = 0$, $\vec{T} = 0$ ← il fluido non può sostenere sforzi di taglio
- viscosi ("reali", "acqua bagnata") $\eta > 0$, $\vec{T} \neq 0$

↓ viscosità o attrito interno del fluido

Riguardo invece alle caratteristiche del moto, distinguiamo:

- stazionario $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$
- non stazionario $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$

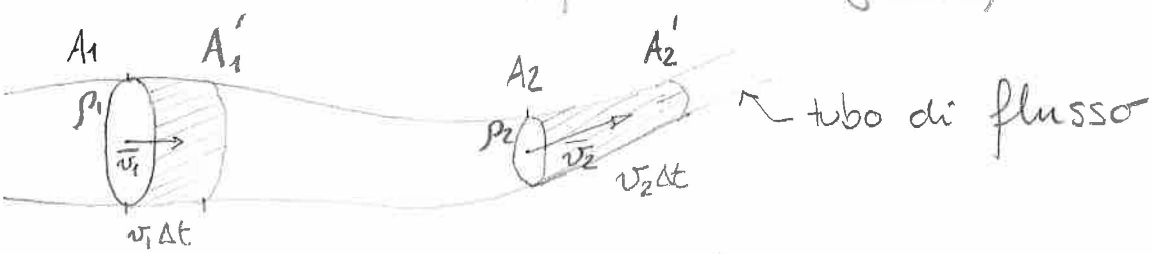
ed inoltre:

- rotazionale $\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0$
- irrotazionale $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ ovunque
  (un micromulinello collocato nel fluido non gira)

ed infine (per i fluidi viscosi), si parla di moto
- laminare: scorrimento di strati senza rimescolamento
- turbolento: rimescolamento e vortici

es: fumo sigaretta:

4.24 Equazione di continuità (forma integrale)



moto stazionario.
osservo la scena per un intervallo di tempo Δt, tra t e $t + \Delta t$

Volume di fluido che attraversa A_1 in Δt: $\Delta V_1 = A_1 v_1 \Delta t$

con relativa massa: $\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1$

Volume di fluido che attraversa A_2 in Δt: $\Delta V_2 = A_2 v_2 \Delta t$

con relativa massa: $\Delta m_2 = \rho_2 \Delta V_2$

→ Il fluido che all'istante t sta tra A_1 e A_2 è lo stesso che all'istante $t+\Delta t$ sta tra A_1' e A_2'

⇒ per il principio di conservazione della massa, la massa del fluido tra A_1 e A_2 è la stessa del fluido tra A_1' e A_2'.

⇒ poiché il tratto tra A_1' e A_2 è in comune, deve essere:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2$$

massa del fluido tra A_1 e A_1'

massa del fluido tra A_2 e A_2'

$$\rho_1 A_1 v_1 \cancel{\Delta t} = \rho_2 A_2 v_2 \cancel{\Delta t}$$

$$\boxed{\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2}$$

eq. di continuità (legge di Leonardo)

Poiché A_1 e A_2 sono generici, questo implica

$$\boxed{\rho A v = \text{cost}}$$

→ PORTATA MASSICA (o in massa)

lungo qualunque tubo di flusso.

Se il fluido è incompressibile, $\rho_1 = \rho_2$, e quindi:

$$\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2}$$

e

$$\boxed{A v = \text{cost.}}$$

→ PORTATA VOLUMETRICA (o in volume)

Portata massica $[\rho A v] = kg/s$

massa di fluido che attraversa A nell'unità di tempo

volumetrica $[A v] = m^3/s$

volume di fluido che attraversa A nell'unità di tempo

→ Equazione di continuità (forma differenziale)

→ Approfondimenti 4.2.4