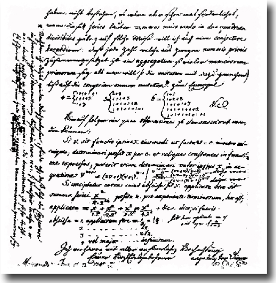
Due esercizi sui linguaggi predicativi

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI



Trieste, 13/04/2016

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

1. Enunciare in $\overbrace{\text{una teoria del } 1^o \text{ ordine}}$ la

   Congettura di Goldbach

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

1. Enunciare in $\overbrace{\text{una teoria del } 1^o \text{ ordine}}$ la

   Congettura di Goldbach

   - Discussione

1. Enunciare in $\overbrace{\text{una teoria del } 1^{o} \text{ ordine}}$ la

   Congettura di Goldbach

   - Discussione
   - La soluzione proposta

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

1. Enunciare in $\overbrace{\text{una teoria del 1º ordine}}$ la

   Congettura di Goldbach

   - Discussione
   - La soluzione proposta
   - Altre soluzioni proponibili

1. Enunciare in $\overbrace{\text{una teoria del } 1^{\mathrm{o}} \text{ ordine}}^{\text{un'aritmetica}}$ la

   Congettura di Goldbach

   - Discussione
   - La soluzione proposta
   - Altre soluzioni proponibili

2. Modellare un'aritmetica derogando dal suo 'standard'

1. Enunciare in $\overbrace{\text{una teoria del 1° ordine}}^{\text{un'aritmetica}}$ la

   Congettura di Goldbach

   - Discussione
   - La soluzione proposta
   - Altre soluzioni proponibili

2. Modellare un'aritmetica derogando dal suo 'standard'

Riferim. bibliografico: [Enderton(2001), pp. 182–193 e 202 segg.]

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Interpretando il linguaggio di A_E nella struttura

$$\mathfrak{N} \;=\; (\,\mathbb{N}, 0; S\,, +\,, \cdot, E\,; <\,)\,,$$

esprimervi la congettura di Christian Goldbach (del 1742):

Interpretando il linguaggio di A_E nella struttura

$$\mathfrak{N} \;=\; (\,\mathbb{N}\,,\,0\,;\,S\,,\,+\,,\,\cdot\,,\,E\,;\,<\,)\,,$$

esprimervi la congettura di Christian Goldbach (del 1742):

Ogni numero intero pari $n > 2$ può venir scomposto come

$$n \;=\; p + q\,,$$

con p, q numeri primi.

where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$\forall x$	$\mathbf{S}x \neq \mathbf{0}$	(S1)
$\forall x \forall y$	$(\mathbf{S}x = \mathbf{S}y \rightarrow x = y)$	(S2)
$\forall x \forall y$	$(x < \mathbf{S}y \leftrightarrow x \leq y)$	(L1)
$\forall x$	$x \not< \mathbf{0}$	(L2)
$\forall x \forall y$	$(x < y \vee x = y \vee y < x)$	(L3)
$\forall x$	$x + \mathbf{0} = x$	(A1)
$\forall x \forall y$	$x + \mathbf{S}y = \mathbf{S}(x + y)$	(A2)
$\forall x$	$x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$	(M1)
$\forall x \forall y$	$x \cdot \mathbf{S}y = x \cdot y + x$	(M2)
$\forall x$	$x\mathbf{E}\mathbf{0} = \mathbf{S}\mathbf{0}$	(E1)
$\forall x \forall y$	$x\,\mathbf{E}\,\mathbf{S}y = x\,\mathbf{E}\,y \cdot x$	(E2)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Richiamo: Es. di ling. interpretato / teoria

where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$\forall x$	$\mathbf{S}x \neq \mathbf{0}$	(S1)
$\forall x \forall y$	$(\mathbf{S}x = \mathbf{S}y \to x = y)$	(S2)
$\forall x \forall y$	$(x < \mathbf{S}y \leftrightarrow x \leq y)$	(L1)
$\forall x$	$x \not< \mathbf{0}$	(L2)
$\forall x \forall y$	$(x < y \vee x = y \vee y < x)$	(L3)
$\forall x$	$x + \mathbf{0} = x$	(A1)
$\forall x \forall y$	$x + \mathbf{S}y = \mathbf{S}(x + y)$	(A2)
$\forall x$	$x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$	(M1)
$\forall x \forall y$	$x \cdot \mathbf{S}y = x \cdot y + x$	(M2)
$\forall x$	$x\mathbf{E}\mathbf{0} = \mathbf{S}\mathbf{0}$	(E1)
$\forall x \forall y$	$x\,\mathbf{E}\,\mathbf{S}y = x\,\mathbf{E}\,y \cdot x$	(E2)

(Julia Hall Bowman Robinson , 1919–1985)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$\forall x$	$\mathbf{S}x \neq \mathbf{0}$	(S1)
$\forall x \forall y$	$(\mathbf{S}x = \mathbf{S}y \rightarrow x = y)$	(S2)
$\forall x \forall y$	$(x < \mathbf{S}y \leftrightarrow x \leq y)$	(L1)
$\forall x$	$x \not< \mathbf{0}$	(L2)
$\forall x \forall y$	$(x < y \vee x = y \vee y < x)$	(L3)
$\forall x$	$x + \mathbf{0} = x$	(A1)
$\forall x \forall y$	$x + \mathbf{S}y = \mathbf{S}(x + y)$	(A2)
$\forall x$	$x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$	(M1)
$\forall x \forall y$	$x \cdot \mathbf{S}y = x \cdot y + x$	(M2)
$\forall x$	$x\mathbf{E}\mathbf{0} = \mathbf{S}\mathbf{0}$	(E1)
$\forall x \forall y$	$x\,\mathbf{E}\,\mathbf{S}y = x\,\mathbf{E}\,y \cdot x$	(E2)

$$\forall^{\mathfrak{I}} \;=\; \mathbb{N}$$

$$x \;\overset{\mathrm{S}^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto}\; x+1$$

$$\ddots$$

$$(x, y) \;\overset{\mathrm{E}^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto}\; x^y$$

(Julia Hall Bowman Robinson , 1919–1985)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

La struttura interpretativa

$$\mathfrak{N} \;=\; (\,\mathbb{N}\,,\,0;\,S\,,\,+\,,\,\cdot,\,E\,;<\,)\,,$$

è definita cosí:

La struttura interpretativa

$$\mathfrak{N} \;=\; (\, \mathbb{N}\,,\, 0\,;\, S\,,\, +\,,\, \cdot\,,\, E\,;\, <\,)\,,$$

è definita cosí:

$$\forall^{\mathfrak{I}} \;=\; \mathbb{N}\,, \qquad\qquad \mathbf{0}^{\mathfrak{I}} \;=\; 0\,,$$

La struttura interpretativa

$$\mathfrak{N} \quad = \quad (\,\mathbb{N}\,,\,0;\,S\,,\,+\,,\,\cdot\,,\,E\,;\,<\,)\,,$$

è definita cosí:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\forall^{\mathfrak{I}} & = & \mathbb{N}\,, & \mathbf{0}^{\mathfrak{I}} & = & 0\,, & x & \stackrel{S^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} & x+1\,, \\
(x,y) & \stackrel{+^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} & x+y\,, & (x,y) & \stackrel{\cdot^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} & x\,y\,, & (x,y) & \stackrel{E^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} & x^{y}\,,
\end{array}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

La struttura interpretativa

$$\mathfrak{N} \;=\; (\,\mathbb{N}\,,\,0;\,S\,,\,+\,,\,\cdot\,,\,E\,;\,<\,)\,,$$

è definita cosí:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcl}
\forall^{\mathfrak{I}} & = & \mathbb{N}\,, & \mathbf{0}^{\mathfrak{I}} & = & 0\,, & x & \stackrel{\mathrm{S}^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} & x+1\,, \\
(x,y) & \stackrel{+^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} & x+y\,, & (x,y) & \stackrel{\cdot^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} & x\,y\,, & (x,y) & \stackrel{\mathrm{E}^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} & x^{y}\,, \\
x <^{\mathfrak{I}} y & \text{sse} & x<y\,. & & & & & &
\end{array}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Ogni numero intero pari $n > 2$ può venir scomposto come

$$n \quad = \quad p + q \,,$$

con p, q numeri primi.

$$\forall x \Big(\mathrm{S}\,\mathrm{S}\,\mathbf{0} < x \,\&\, \exists y\, x = y + y \rightarrow$$
$$\exists p\, \exists q \,\big(x = p + q \,\&\, \mathrm{Pr}(\,p\,) \,\&\, \mathrm{Pr}(\,q\,)\big)\Big)$$

ove

$$\mathrm{Pr}(\,X\,) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad ???$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

$$\forall x \Big(\mathrm{S}\,\mathrm{S}\,\mathbf{0} < x \,\&\, \exists y\; x = y + y \rightarrow \exists p\, \exists q\, \big(x = p + q \,\&\, \mathrm{Pr}(p) \,\&\, \mathrm{Pr}(q) \big) \Big)$$

ove

$$\mathrm{Pr}(X) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \forall u\, \forall v\, \big(X = u \cdot v \rightarrow (u = \mathrm{S}\,\mathbf{0} \;\leftrightarrow\; v \neq \mathrm{S}\,\mathbf{0}) \big)$$

$$\forall x\, \forall y\, \Big(\mathrm{S}\,\mathrm{S}\,\mathbf{0} < x \mathbin{\&} x = y + y \rightarrow \exists p\, \exists q\, \big(x = p + q \mathbin{\&} \mathrm{Pr}(\,p\,) \mathbin{\&} \mathrm{Pr}(\,q\,) \big) \Big)$$

(‘Pr’ come sopra)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

$$\forall x \, \forall y \left(\mathrm{S}\,\mathrm{S}\,\mathbf{0} < x \,\&\, x = y + y \rightarrow \right.$$
$$\left. \exists p \, \exists q \left(x = p + q \,\&\, \mathrm{Pr}(\, p \,) \,\&\, \mathrm{Pr}(\, q \,) \right) \right)$$

(‘Pr’ come sopra), oppure

$$\forall x \, \forall y \left(\mathrm{S}\,\mathrm{S}\,\mathbf{0} < x \,\&\, x = y + y \rightarrow \exists p \, \exists q \; \forall u \, \forall v \left(x = p + q \,\& \right. \right.$$
$$\left((p = u \cdot v \vee q = u \cdot v) \rightarrow \right.$$
$$\left. \left. \left. (\, u = \mathrm{S}\,\mathbf{0} \;\leftrightarrow\; v \neq \mathrm{S}\,\mathbf{0} \,)\right) \right) \right)$$

Proviamone un'altra ancora: Equivalente ?

$$\forall\, x\, \cancel{\forall\, y} \exists\, y\, \Big(\mathrm{S}\,\mathrm{S}\,\mathbf{0} < x \;\&\; x = y + y \rightarrow$$
$$\exists\, p\, \exists\, q\, \big(x = p + q \;\&\; \mathrm{Pr}(\, p\,) \;\&\; \mathrm{Pr}(\, q\,) \big) \Big)$$

('Pr' come sopra).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Proviamone un'altra ancora: Equivalente ?

$$\forall\, x\, \cancel{\forall\, y} \exists\, y \left(\mathrm{S\,S}\,\mathbf{0} < x \;\&\; x = y + y \rightarrow \exists\, p\, \exists\, q\, \big(x = p + q \;\&\; \mathrm{Pr}(\, p\,) \;\&\; \mathrm{Pr}(\, q\,) \big) \right)$$

Questo enunciato è banalmente vero in $\mathfrak{N}$.

$$\forall x\, \cancel{\forall y} \exists y \Big(\mathrm{S}\,\mathrm{S}\,\mathbf{0} < x \,\&\, x = y + y \rightarrow$$
$$\exists p\, \exists q\, \big(x = p + q \,\&\, \mathrm{Pr}(p) \,\&\, \mathrm{Pr}(q) \big) \Big)$$

Questo enunciato è banalmente vero in $\mathfrak{N}$. Si prenda come valore per la y, indipendentemente dal val. di x:

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

$$\forall x\, \cancel{\forall y} \exists y \Big(\mathrm{S}\,\mathrm{S}\,\mathbf{0} < x \,\&\, x = y + y \rightarrow \\ \exists p \exists q \,(\, x = p + q \,\&\, \mathrm{Pr}(\,p\,) \,\&\, \mathrm{Pr}(\,q\,)\,)\Big)$$

Questo enunciato è banalmente vero in $\mathfrak{N}$. Si prenda come valore per la y, indipendentemente dal val. di x: lo 0.

$$\forall x \, \forall y \left(\mathrm{S}\, \mathbf{0} < y \,\&\, x = y \cdot \mathrm{S}\,\mathrm{S}\,\mathbf{0} \rightarrow \right.$$
$$\left. \exists p \, \exists q \, (x = p + q \,\&\, \mathrm{Pm}(\, p \,) \,\&\, \mathrm{Pm}(\, q \,)) \right)$$

ove

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Un'ultima soluz.: Equivalente ?

$$\forall x \, \forall y \left(\mathrm{S}\,\mathbf{0} < y \;\&\; x = y \cdot \mathrm{S}\,\mathrm{S}\,\mathbf{0} \rightarrow \exists p \, \exists q \, (\, x = p + q \;\&\; \mathrm{Pm}(\, p\,) \;\&\; \mathrm{Pm}(\, q\,)\,) \right)$$

ove

$$\mathrm{Pm}(\, X\,) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \forall u \, \forall v \, (X = u \cdot v \rightarrow X = u \;\vee\; X = v) \;\&$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

$$\forall x\,\forall y\,\Big(\mathrm{S}\,\mathbf{0} < y \;\&\; x = y \cdot \mathrm{S}\,\mathrm{S}\,\mathbf{0} \rightarrow$$
$$\exists p\,\exists q\,\big(x = p + q \;\&\; \mathrm{Pm}(\,p\,) \;\&\; \mathrm{Pm}(\,q\,)\big)\Big)$$

ove

$$\mathrm{Pm}(\,X\,) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \forall u\,\forall v\,\big(X = u \cdot v \rightarrow X = u \;\vee\; X = v\big) \;\&\; \mathrm{S}\,\mathbf{0} < X$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

$$\forall x \, \forall y \left(\mathrm{S}\,\mathbf{0} < y \;\&\; x = y \cdot \mathrm{S}\,\mathrm{S}\,\mathbf{0} \rightarrow \right.$$
$$\left. \exists p \, \exists q \left(x = p + q \;\&\; \mathrm{Pm}(\, p\,) \;\&\; \mathrm{Pm}(\, q\,) \right) \right)$$

ove

$$\mathrm{Pm}(\, X\,) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \forall u \, \forall v \, \big(X = u \cdot v \rightarrow X = u \;\vee\; X = v\big) \;\&\; \mathrm{S}\,\mathbf{0} < X$$

Qui interviene sapere piú specifico, riguardante

- $\mathfrak{N}$ o, quanto meno,

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

$$\forall x \, \forall y \left(\mathrm{S}\,\mathbf{0} < y \;\&\; x = y \cdot \mathrm{S}\,\mathrm{S}\,\mathbf{0} \rightarrow \\ \exists p \, \exists q \, (x = p + q \;\&\; \mathrm{Pm}(p) \;\&\; \mathrm{Pm}(q)) \right)$$

ove

$$\mathrm{Pm}(X) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \forall u \, \forall v \, \big(X = u \cdot v \rightarrow X = u \,\vee\, X = v \big) \;\&\; \mathrm{S}\,\mathbf{0} < X$$

Qui interviene sapere piú specifico, riguardante

- $\mathfrak{N}$ o, quanto meno,
- una struttura in cui tutti gli assiomi di A_E siano veri

Trovare una struttura interpretativa *significativamente* diversa dall'interpretazione privilegiata (quale?) in cui risultino tutti contemporaneamente veri i segg. enunciati:[1]

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{S}\,x & \neq & \mathbf{0} \\ \mathsf{S}\,x = \mathsf{S}\,y & \rightarrow & x = y \\ y \neq \mathbf{0} & \rightarrow & \exists\, x\; y = \mathsf{S}\,x \\ \underbrace{\mathsf{S}\,\mathsf{S}\cdots\mathsf{S}}_{n+1 \text{ volte}}\,x & \neq & x \end{array}$$

[1] Enunciati davvero? Omessi per brevità quantificatori universali all'inizio.

Possiamo, per $\ell = 1, 2, 3, 4, \ldots$, individuare una distinta struttura

$$\mathfrak{Z}_\ell \;=\; (\,\mathbb{Z} \setminus \{-\ell, -2 \cdot \ell, -3 \cdot \ell, \ldots\}, \quad , \qquad\qquad\qquad)\,,$$

ove

$$\mathbb{Z} \;=\; \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

(interi *dotati di segno*).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Possiamo, per $\ell = 1, 2, 3, 4, \ldots$, individuare una distinta struttura

$$\mathfrak{Z}_\ell \;=\; (\, \mathbb{Z} \setminus \{-\ell, -2 \cdot \ell, -3 \cdot \ell, \ldots\},\, 0\,, \qquad\qquad\qquad)\,,$$

ove

$$\mathbb{Z} \;=\; \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

(interi *dotati di segno*).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Possiamo, per $\ell = 1, 2, 3, 4, \ldots$, individuare una distinta struttura

$$\mathfrak{Z}_\ell \;=\; (\, \mathbb{Z} \setminus \{-\ell, -2\cdot\ell, -3\cdot\ell, \ldots\},\, 0\,,\, m \overset{\mathtt{S}^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} m + \ell\,)\,,$$

ove

$$\mathbb{Z} \;=\; \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

(interi *dotati di segno*).

Possiamo, per $\ell = 1, 2, 3, 4, \ldots$, individuare una distinta struttura

$$\mathfrak{Z}_\ell \;=\; (\,\mathbb{Z} \setminus \{-\ell, -2\cdot\ell, -3\cdot\ell, \ldots\}\,,\; 0\,,\; m \overset{\mathrm{S}^{\Im}}{\mapsto} m + \ell\,)\,,$$

ove

$$\mathbb{Z} \;=\; \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

(interi *dotati di segno*).

Il dominio risulta, cosí, ripartito in una catena isomorfa al dominio $\mathbb{N}$ dei naturali (con l'operazione di incremento unitario) e da $\ell - 1$ catene isomorfe al dominio degli interi (con la stessa operaz.).

Possiamo, per $\ell = 1, 2, 3, 4, \ldots$, individuare una distinta struttura

$$\mathfrak{Z}_\ell \;=\; (\,\mathbb{Z} \setminus \{-\ell, -2\cdot\ell, -3\cdot\ell, \ldots\}\,,\; 0\,,\; m \overset{\mathrm{S}^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} m+\ell\,)\,,$$

ove

$$\mathbb{Z} \;=\; \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

(interi *dotati di segno*).

Il dominio risulta, cosí, ripartito in una catena isomorfa al dominio $\mathbb{N}$ dei naturali (con l'operazione di incremento unitario) e da $\ell - 1$ catene isomorfe al dominio degli interi (con la stessa operaz.).

Ogni $\mathfrak{Z}_\ell$ modella gli assiomi della 'teoria del Successore'.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Possiamo, per $\ell = 1, 2, 3, 4, \ldots$, individuare una distinta struttura

$$\mathfrak{Z}_\ell \;=\; (\,\mathbb{Z} \setminus \{-\ell, -2\cdot\ell, -3\cdot\ell, \ldots\}\,,\; 0\,,\; m \overset{\mathrm{S}^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} m+\ell\,)\,,$$

ove

$$\mathbb{Z} \;=\; \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

(interi *dotati di segno*).

Il dominio risulta, cosí, ripartito in una catena isomorfa al dominio $\mathbb{N}$ dei naturali (con l'operazione di incremento unitario) e da $\ell - 1$ catene isomorfe al dominio degli interi (con la stessa operaz.).

Ogni $\mathfrak{Z}_\ell$ modella gli assiomi della 'teoria del Successore'.

Si potrebbe andare oltre, e considerare modelli con *infinite* catene isomorfe a $\mathbb{Z}$.

La teoria del successore vista sopra, come anche la sue variante che incorpora il relatore $<$ di confronto, assiomatizzabile cosí:

$$
\boxed{\begin{array}{c}
y \neq \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \exists x \; y = \mathrm{S}\, x \\
x < \mathrm{S}\, x \quad \leftrightarrow \quad x < y \vee x = y \\
\neg \quad x < \mathbf{0} \\
x < y \quad \vee \quad x = y \quad \vee \quad y < x \\
x < y \quad \rightarrow \quad \neg\; y < x \\
x < y \quad \rightarrow \quad y < z \quad \rightarrow \quad x < z
\end{array}}
$$

(da chiudersi universalmente !) sono ***complete*** nel senso che, in esse, ogni enunciato γ è ***dimostrabile*** o ***refutabile***:

$$\{ \text{assiomi} \} \;\vdash\; \gamma \qquad \text{oppure} \qquad \{ \text{assiomi} \} \;\vdash\; \neg\gamma\,.$$

(Vedi [Enderton(2001), pagg. 187–196])

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Tenuto conto dell' $\boxed{\textit{enumerabilità effettiva}}$ delle deduzioni da un insieme decidibile di premesse, otteniamo che dette teorie—in quanto complete—sono entrambe $\boxed{\textit{decidibili}}$.

E. . .

Tenuto conto dell' $\boxed{\textit{enumerabilità effettiva}}$ delle deduzioni da un insieme decidibile di premesse, otteniamo che dette teorie—in quanto complete—sono entrambe $\boxed{\textit{decidibili}}$.

E. . .

. . . che altro si ricava, dalla completezza della teoria, alla luce del teor. di correttezza ?

Si può decidere—vedi [Cegielski and Richard(2001)]—la teoria della struttura

$$\left(\mathbb{N} \,,\ \mathsf{paio}_{/2} \,,\ \bigtriangleup \right)$$

ove

$$\mathsf{paio} : \quad \mathbb{N}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{N}$$

è la biiezione di Cantor

$$(\, x \,,\ y \,) \quad \overset{\mathit{paio}}{\longmapsto} \quad \frac{(x+y)\,(x+y+1)+y}{2}$$

e $\bigtriangleup$ è una qualsiasi delle seguenti relazioni o funzioni:

- moltiplicazione,
- divisibilità,
- addizione,
- ordine,
- successore.

Patrick Cegielski and Denis Richard.
Decidability of the theory of the natural integers with the Cantor pairing function and the successor.
Theoretical Computer Science, 257:51–77, 2001.

Herbert B. Enderton.
A Mathematical Introduction to Logic.
Hartcourt/Academic Press, Burlington, MA, USA, 2nd edition, 2001.