

EQ. DI HAMILTON-JACOBI

Le trasformazioni canoniche (o) coniugano

l'Hamiltoniana $H(p, q, t)$ nell'Hamiltoniana

$$K(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = H(u(\tilde{p}, \tilde{q}, t), v(\tilde{p}, \tilde{q}, t), t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(\tilde{p}, v(\tilde{p}, \tilde{q}, t), t)$$

↳ Qta espressione può essere anche scritta nelle coord. $\tilde{p}, \tilde{q}$:

$$K\left(\tilde{p}, \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}}, t\right) = H\left(\frac{\partial F_2}{\partial \tilde{q}}, \tilde{q}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(\tilde{p}, \tilde{q}) \quad (*)$$

Un problema importante da risolvere è:

→ dato un sist. Ham. con Hamiltoniana H , qual è
la trasf. canonica (se $\exists$) che coniuga H in $K=0$?

Trovate qta trasf. can., diciamo $p = u(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$ e $q = v(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$
che coniuga H in $K=0$, allora le eq. di Hamilton in K
sono triviali:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}}_k = 0 \\ \dot{\tilde{q}}_h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{p}_k(t) = \tilde{p}_k^0 \\ \tilde{q}_h(t) = \tilde{q}_h^0 \end{cases}$$

Nelle coordinate (p, q) il moto è dunque dato da

$$\begin{cases} p_e(t) = u_e(\tilde{p}^0, \tilde{q}^0, t) \\ q_e(t) = v_e(\tilde{p}^0, \tilde{q}^0, t) \end{cases}$$

← moto determinato completamente
dalla trasf. canonica

Le funzioni generatrici ci danno un'equazione che ci permette di determinare tale transf. canonica.

In effetti, guardando la relazione (*) si vede che se $F_2(\tilde{p}, q, t)$ soddisfa

$$H\left(\frac{\partial F_2}{\partial q}(\tilde{p}, q, t), q, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(\tilde{p}, q) = 0 \quad (*)$$

allora F_2 genera una transf. can. che coniuga H in $K=0$.

L'eq. (*) è chiamata **EQ. DI HAMILTON-JACOBI** ed è un'eq. alle derivate partiell. per F_2 .

Risolvere l'eq. di Hamilton-Jacobi è un modo alternativo di risolvere le equazioni del moto.

ES. : OSCILLATORE ARMONICO

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2) \rightarrow \text{eq. H-J: } \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

H non dip. dal tempo $\leadsto$ provo una soluzione
del tipo $F_2(\tilde{p}, q, t) = W(\tilde{p}, q) - Q(\tilde{p})t$

Inseriamo in H-J eq e otteniamo un'eq. per W

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] = Q(\tilde{p})$$

$\uparrow$ scelgo $\tilde{p}$ t.c. $Q(\tilde{p}) = \omega \tilde{p}$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 = 2m\omega \tilde{p} - m^2 \omega^2 q^2$$

$$W(\tilde{p}, q) = \sqrt{2m\omega \tilde{p}} \int_{q_0}^q \sqrt{1 - \frac{m\omega q'^2}{2\tilde{p}}} dq' = \int_{q_0}^q \sqrt{2m\omega \tilde{p} - m^2 \omega^2 q'^2} dq'$$

Non occorre risolvere l'integrale : a noi interessano
le derivate di $F_2 = W(\tilde{p}, q) - \omega \tilde{p}t$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \sqrt{2m\omega \tilde{p}} \sqrt{1 - \frac{m\omega q^2}{2\tilde{p}}}$$

$$\tilde{q} = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}} = \int_{q_0}^q \frac{2m\omega dq'}{2 \sqrt{2m\omega \tilde{p} - m^2 \omega^2 q'^2}} - \omega t =$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\tilde{p}}} \int_{q_0}^q \frac{dq'}{\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2\tilde{p}} q'^2}} - \omega t$$

$$x \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\tilde{p}}} q'$$

$$= \int_{\sqrt{\frac{m\omega}{2\tilde{p}}} q_0}^{\sqrt{\frac{m\omega}{2\tilde{p}}} q} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \omega t = \arcsen\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\tilde{p}}} q\right) - \tilde{q}_c - \omega t$$

• Invertiamo $\tilde{q} = \dots$ in relazione q

$$q = \sqrt{\frac{2\tilde{p}}{m\omega}} \operatorname{sen}(\tilde{q} + \tilde{q}_c + \omega t)$$

• Sostituisco in $p = \dots$ e ottengo

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2m\omega\tilde{p}} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\tilde{q} + \tilde{q}_c + \omega t)} = \\ &= \sqrt{2m\omega\tilde{p}} \cos(\tilde{q} + \tilde{q}_c + \omega t) \end{aligned}$$

L'Ham. coniugata è ora $K=0$ e può

$$\tilde{p}(t) = \tilde{p}_0$$

$$\tilde{q}(t) = \tilde{q}_0$$

$\leadsto$ sostituendo nella transf. can. otteniamo le $p(t), q(t)$

$$\Rightarrow p(t) = \sqrt{2m\omega\tilde{p}_0} \cos(\omega t + \tilde{q}_0')$$

$$\tilde{q}_0' = q_0 + q_c$$

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\tilde{p}_0}{m\omega}} \operatorname{sen}(\omega t + \tilde{q}_0')$$

Che sono le note soluzioni per l'oscillatore armonico.

SISTEMI INTEGRABILI

Un sistema Ham. a n gradi di libertà è detto **INTEGRABILE** se esiste una trasf. canonica

$$p_h = u_h(J, \psi)$$

$$q_h = v_h(J, \psi)$$

con u e v periodiche nelle coord. ψ_h

con $(J_1, \dots, J_n, \psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n \times T^n$ dette **variabili AZIONE-ANGOLO**,
← **TORO** n -dimensionale

t.c. l'Hamiltoniana coniugata ad $H(p, q)$ è una funt. K che dipende solo dalle $J \rightarrow K = K(J)$.

Allora nelle coord. AZIONE-ANGOLO le eq. di Ham. sono (ψ sono coord. cicliche)

$$\begin{cases} \dot{J}_h = 0 \\ \dot{\psi}_h = \frac{\partial K(J)}{\partial J_h} \equiv \omega_h(J) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_h(t) = J_h^0 \\ \psi_h(t) = \omega_h(J^0)t + \psi_0 \end{cases}$$

In qta situazione, $J_1, \dots, J_n$ sono n cost. del moto che sono in INVOLUZIONE, cioè $\{J_h, J_k\} = 0 \quad \forall h, k$.

T^n è un TORO n -dim. ($T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-volte}}$):

le variabili ψ_h sono degli ANGOLI di PERIODO 2π

$\Rightarrow \psi_h(t)$ sono funzioni PERIODICHE di periodo $T_h = \frac{2\pi}{\omega_h(J)}$
(T_h è il tempo in cui $\psi_h(T_h) = \psi_h(0) + 2\pi$.)

$\rightarrow$ Per un SIST. INTEGRABILE, le traiettorie in T^*Q sono LIMITATE e QUASI-PERIODICHE. Le traiettorie giacciono su insiemi di livello $J_h = J_h^0$ e sono dei cerchi nelle dir. ψ_h .

Tali insiemi di livelli sono copie di T^n . Le traiettorie sono curve in tale T^n .

Es. $n=2$ T^2



Il moto è periodico se il rapporto tra le freq. ω_i è RAZIONALE.

Siccome le traiettorie sono indipendenti del sistema di coord. che uso per descriverle, il moto in (p, q) è pure un moto limitato e quasi-periodico (è ovviam. difficile vederlo in tal'coord.).

TEOREMA. Preso sist. Ham. a n grad. di lib. .

- Ammettiamo che ESISTANO n COST. DEL MOTO

$f_i(p, q)$ $i=1, \dots, n$ INDIPENDENTI e IN INVOLUZIONE
 $\{f_i, f_j\} = 0 \quad \forall i, j=1, \dots, n$

- Inoltre ammettiamo che per un $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, l'insieme di livelli
 $M_{\bar{a}} = \{ f_i(p, q) = a_i \}$ sia COMPATTO e CONNESSO

$\Rightarrow$ Il sistema è INTEGRABILE
 (Arnold)

$M_{\bar{a}}$ è parametrizzato dagli angoli ψ_h . Variando ψ_h ottengo una curva γ_h in $M_{\bar{a}}$.

Def. Le VARIABILI AZIONE sono def. da $J_h = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_h} \sum_{l=1}^n p_l dq_l$

J_h dipendono solo dalle cost. del moto f_i e sono anche loro indep. e in involuzione.

→ si dimostra che le variabili CANONICHE CONIUGATE alle J_h sono proprio ANGOLI DI PERIODO 2π .

$$\Rightarrow T_h = \frac{2\pi}{\omega_h(J)}$$

Esempi di sistemi INTEGRABILI

- Corpo in un campo di FORZE CENTRALI con $V=V(r)$ in $\mathbb{R}^3$ ($n=3$),

Esistono 3 cost. del moto in involuzione:

$$\{H, M_z\} = 0 \quad \{H, \bar{M}^2\} = 0 \quad \{M_z, \bar{M}^2\} = 0.$$

- Trattola di Lagrange ($n=3$).

Esistono 3 cost. del moto in involuzione:

$$\{H, p_\varphi\} = 0 \quad \{H, p_\psi\} = 0 \quad \underbrace{\{p_\varphi, p_\psi\}} = 0$$

p_φ e p_ψ sono mom. coniugati

- Tutti i sistemi a 1-dim. ($n=1$) con H indep. da t .

Esiste 1 cost. del moto H .

Osservazione. I sistemi integrabili sopra elencati

sono in genere risolvibili con altri approcci rispetto quello Hamiltoniano. Uno potrebbe domandersi perché sviluppare un tale formalismo allora.

Inoltre, i sistemi in natura sono tipicamente non-integrabili.

Però, spesso sono APPROSSIMABILI con sist. integrabili e il formalismo Hamiltoniano è molto utile per trattare una tale approssimazione (TEORIA DELLE PERTURBAZIONI).

ES: PUNTO MATERIALE in $\mathbb{R}^3$ soggetto a POTENZIALE KEPLERIANO

In coordinate POLARI su $\mathbb{R}^3$, l'Hamiltoniana di tale sistema è:

$$H(p_r, p_\theta, p_\varphi, r, \theta, \varphi) = \underbrace{\frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right)}_T - \underbrace{\frac{k}{r}}_V$$

Eq. di Ham:

$$\dot{p}_r = \frac{1}{m} \frac{p_\varphi^2}{r^3 \sin^2 \theta} - \frac{k}{r^2}$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{1}{m} \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta}$$

$$\dot{p}_\varphi = 0$$

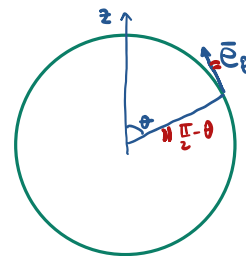
$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta}$$

Le cost. del moto sono H e

$$\begin{aligned} |\bar{M}|^2 &= |\bar{r} \times \bar{p}|^2 = \left| r \bar{e}_r \times \left(p_r \bar{e}_r + \frac{p_\theta}{r} \bar{e}_\theta + \frac{p_\varphi}{r \sin \theta} \bar{e}_\varphi \right) \right|^2 \\ &= \left| -r \frac{p_\theta}{r} \bar{e}_\varphi + r \frac{p_\varphi}{r \sin \theta} \bar{e}_\theta \right|^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \end{aligned}$$



$$M_z = \left(-p_\theta \bar{e}_\varphi + \frac{p_\varphi}{\sin \theta} \bar{e}_\theta \right) \cdot \bar{e}_z = \frac{p_\varphi}{\sin \theta} \cos(\pi - \theta) = p_\varphi$$

- Ci sono tre cost. del moto in involuz.

$$|\bar{M}|^2, M_z, H \rightarrow (l, l_z, E)$$

- Le variabili azione saranno funz. di tal. cost. del moto.

- Consideriamo l'ins. di l'inv. $|\bar{M}|^2 = l, M_z = l_z, H = E$ (o)

Per ch. negative lo sp. permesso M_a su cui si muovono le frazioni è compatto.

- Def. γ_φ la curva ottenuta variando φ e tenendo fisse θ, r (p_φ, p_θ, p_r sono det. in funz. di φ dalle condit. (•)).
- Analogam. def. γ_θ, γ_r
- Calcoliamo le variab. azione (in funz. di l, l_z, E):

$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_\varphi} p_\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi} l_z 2\pi = l_z$$

$\uparrow$ cost. in ins. livello

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_\theta} p_\theta d\theta = \dots = l - l_z$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_r} p_r dr = \dots = -l + k \sqrt{\frac{m}{-2E}}$$

$\uparrow$ vedi sotto (•)

$$\Rightarrow E = - \frac{mk^2}{2(J_r + J_\theta + J_\varphi)^2}$$

VEDI
FASANO-MARMI
per conti
espliciti

- Per trovare $K(J)$ notiamo che essa sarà una funzione dei J_r, J_θ, J_φ t.c. una volta che ad essi sostituiamo le loro espressioni in funz. di l, l_z, E , otteniamo $K(J) = E$.

$$\Rightarrow K(J) = - \frac{mk^2}{2(J_r + J_\theta + J_\varphi)^2}$$

• Da qui possiamo calcolarci le freq.

$$\omega_r = \frac{\partial K}{\partial J_r} \quad \omega_\theta = \frac{\partial K}{\partial J_\theta} \quad \omega_\varphi = \frac{\partial K}{\partial J_\varphi}$$

Qte derivate sono tutte uguali $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega_r = \omega_\theta = \omega_\varphi \equiv \omega = \frac{m k^2}{(J_r + J_\theta + J_\varphi)^3} = m k^2 \left(\frac{-2E}{m k^2} \right)^{3/2}$$

$\Rightarrow$ Il periodo in cui la traiettoria in T^*Q si chiude (che è anche il periodo dell'orbita) è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{m k^2} \left(\frac{m k^2}{-2E} \right)^{3/2} = \frac{2\pi (m k^2)^{1/2}}{(-2E)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m k^2}{(-2E)^3} \frac{(-2E)^3}{k^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}$$

$\nwarrow_{(*)}$

$\Rightarrow$ Otteniamo il periodo delle orbite dei pianeti (e la terza legge di Keplero) senza risolvere esplicitam. il problema di determinare l'orbita (che corrisponde a invertire la transf. canonica).

(*):

$$a = \frac{\eta}{1-e^2} = \left(\frac{\ell^2}{m k} \right) \left(\frac{m k^2}{-2E \ell^2} \right) = \frac{k}{-2E}$$

$$e^2 = 1 + \frac{2E \ell^2}{m k^2}$$

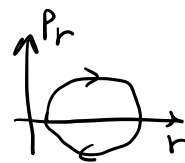
(*) Insieme di livelli:

$$\frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{k}{r} = E$$

$$l^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}$$

$$p_\varphi = l_z$$

$$1) \frac{p_r^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = E \rightarrow \gamma_r \text{ su piano } (p_r, r)$$



$$2) p_\theta^2 + \frac{l_z^2}{\sin^2 \theta} = l^2 \rightarrow \gamma_\theta \text{ su piano } (p_\theta, \theta)$$

$$3) p_\varphi = l_z \rightarrow \gamma_\varphi \text{ su piano } (p_\varphi, \varphi) \quad (p_\varphi \text{ cart. e } \varphi \text{ variab. angolare})$$

Note: la 1) descrive il problema unidim. del sist. centrale.

1) La γ_r è la variabile angolare che descrive il pto sulla curva nel piano (p_r, r) .

$$\oint_{\gamma_r} \vec{p} \cdot d\vec{q} = \oint_{\gamma_r} p_r dr = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} p_r(r) dr$$

↑
 θ e φ sono cost. lungo γ_r

$$p_r(r) \text{ determinato da 1) : } p_r(r) = \sqrt{2m \left(E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} \right)}$$