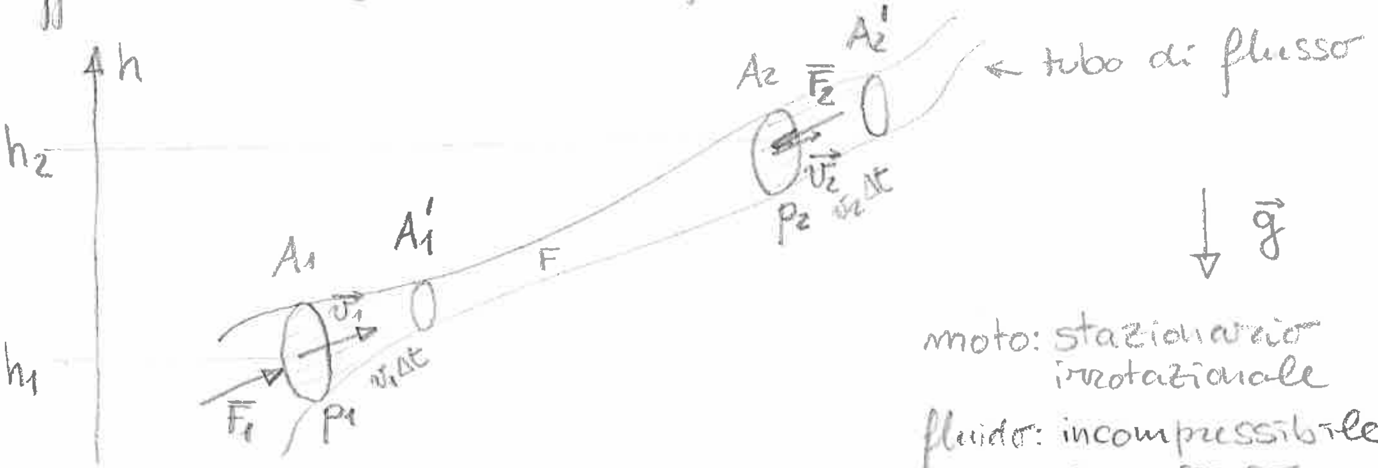
LEZIONE 4.3: TEOREMA DI BERNOULLI ED APPLICAZIONI (#19)

4.3.1 Teorema di Bernoulli

Di nuovo consideriamo un tubo di flusso, come quando abbiamo ricavato l'equazione di continuità (→ pag. 81)
Questa volta però rivolgiamo la nostra attenzione all'effetto della gravità, della forza peso:



moto: stazionario, irrotazionale

fluido: incompressibile (ρ = cost), non viscoso ($\eta = 0$)

→ Di nuovo osservo il moto del fluido tra t e $t+\Delta t$.

→ Quali forze agiscono sul volume di fluido compreso tra...

A_1 e A_2 all'istante t
A_1' e A_2' all'istante $t+\Delta t$
} è lo stesso! ...?
LO CHIAMO FLUIDO F

- Forze di superficie: $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$, normali ad A_1 ed A_2 (il fluido è non viscoso e quindi non può sostenere sforzi di taglio)
  $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$ sono esercitate dal fluido esterno al volume considerato.
  Per lo stesso motivo non vi possono essere forze di superficie sulle pareti laterali
- Forze di volume: la gravità

→ Per l'equazione di continuità si ha:

$$\Delta m_1 = \rho\, \Delta V_1 = \rho\, A_1 v_1 \cdot \Delta t = \Delta m_2 = \rho\, \Delta V_2 = \rho\, A_2 v_2 \cdot \Delta t$$

→ Applico il teorema delle forze vive (dell'energia cinetica)

$$L = \Delta K$$

$$L_S + L_V = \Delta K$$

lavoro forze di superficie (L_S) — lavoro forze di volume (L_V)

- $L_S = \vec{F_1} \cdot \Delta\vec{x_1} + \vec{F_2} \cdot \Delta\vec{x_2}$
$$\stackrel{!}{=} p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t$$
$$\stackrel{!}{=} (p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2) = (p_1 - p_2) \cdot \Delta V$$
- L_V : notiamo che il fluido F tra t e $t + \Delta t$:
  - acquisisce ΔV_2 a quota h_2
  - perde ΔV_1 a quota h_1
  - resta uguale nel tratto tra A_1' ed A_2

Quindi : $L_V \stackrel{!}{=} -\Delta V_g$ ($\leftarrow$ variazione en. potenziale gravitazionale !)
$$\stackrel{!}{=} -(\Delta m_2 g h_2 - \Delta m_1 g h_1)$$
$$\stackrel{!}{=} (\Delta m_1 h_1 - \Delta m_2 h_2) g$$
$$\stackrel{!}{=} \Delta m g (h_1 - h_2)$$
$$\stackrel{!}{=} \rho \Delta V g (h_1 - h_2)$$

- ΔK : come per L_V, notiamo che il fluido F tra t e $t + \Delta t$:
  - acquisisce Δm_2 a velocità $\bar{v}_2$
  - perde Δm_1 a velocità $\bar{v}_1$
  - resta uguale nel tratto tra A_1' e A_2

Quindi : $\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m_1 v_1^2$
$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

Mettendo tutto assieme :
$$L_S + L_V = \Delta K$$
$$(p_1 - p_2) \cancel{\Delta V} + \rho g (h_1 - h_2) \cancel{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \cancel{\Delta V}$$
$$\boxed{p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2}$$
Poiché A_1 e A_2 sono generici, questo implica :
$$\boxed{p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cost}}$$
o anche
$$\frac{p}{\rho g} + h + \frac{1}{2g} v^2 = \text{cost}$$
altezza piezometrica altezza cinetica

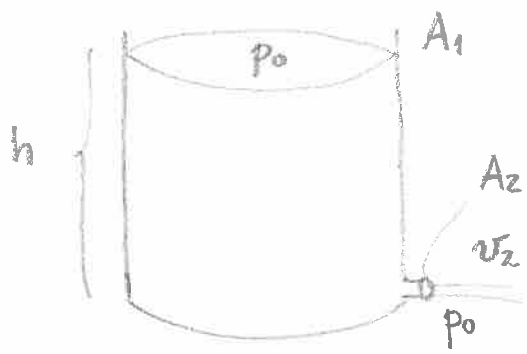
Note: • se il fluido è in quiete ($v_1 = v_2 = 0$) si ritrova Stevino:*

$$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2$$
$$p_1 = p_2 + \rho g (h_2 - h_1)$$

• l'altezza piezometrica $h_{piez} = \frac{p}{\rho g}$ è l'altezza di una colonna di fluido alla cui base si ha la pressione (relativa) p:

$$p = p_0 + \rho g h_{piez}$$

• l'altezza cinetica $h_{cin} = \frac{v^2}{2g}$ è l'altezza di una colonna di fluido alla cui base il fluido esce con velocità v (teorema di Torricelli)



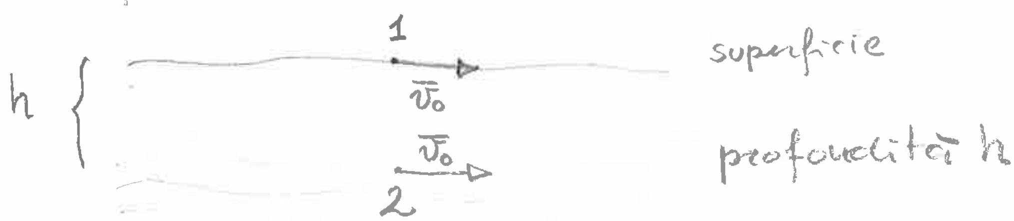
$A_1 \gg A_2$
$v_1 \ll v_2$

Applico Bernoulli tra A_1 e A_2:

$$\cancel{p_0} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \cancel{p_0} + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$
$$\frac{1}{2}\cancel{\rho}(v_2^2 - v_1^2) \cong \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_2^2 = \cancel{\rho} g h$$
$$v_2^2 = 2gh$$
$$v = \sqrt{2gh}$$

---

* In realtà si ritrova Stevino anche se $v_1 = v_2 \neq 0$
Ad es. in un fiume che scorre con $\vec{v}(x,y,z) = \vec{v}_0$ in ogni punto:



Applico Bernoulli tra 1 e 2

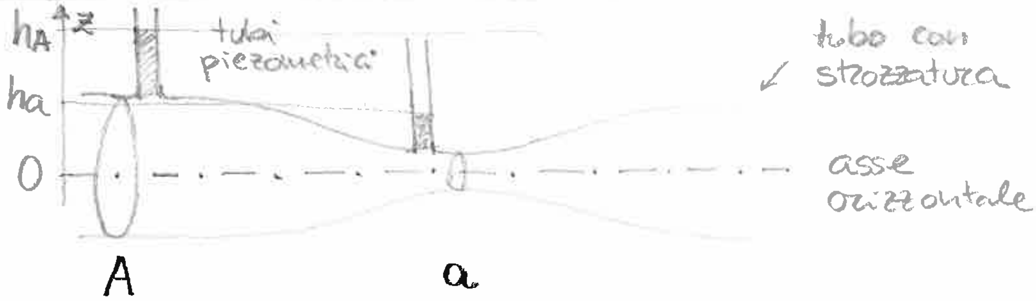
$$p_1 + \rho g h_1 + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_0^2} = p_2 + \rho g h_2 + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_0^2}$$

$$p_2 = p_1 + \rho g (h_1 - h_2)$$

$$p_2 \overset{!}{=} p_1 + \rho g h$$

4.32 Applicazioni del teorema di Bernoulli

Tubo di Venturi



Il fluido risale nei tubi piezometrici per un'altezza $h = \frac{p}{\rho g}$

Applico l'eq. di continuità e Bernoulli tra A ed a:

$$\begin{cases} A v_A = a v_a \\ \dfrac{p_A}{\rho g} + \cancel{z_A} + \dfrac{v_A^2}{2g} = \dfrac{p_a}{\rho g} + \cancel{z_a} + \dfrac{v_a^2}{2g} \end{cases} \qquad z_A = z_a = 0$$

$$\begin{cases} v_a = \dfrac{A}{a} v_A \\ \dfrac{1}{2g}\left(v_A^2 - \dfrac{A^2}{a^2} v_A^2\right) = \overset{h_a}{\dfrac{p_a}{\rho g}} - \overset{h_A}{\dfrac{p_A}{\rho g}} \end{cases}$$

$$v_A^2 \left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right) = 2g (h_A - h_a)$$

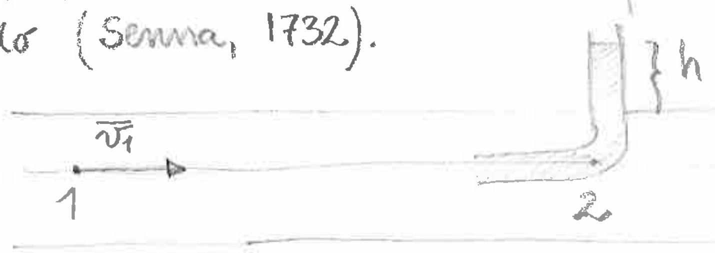
$$v_A = \sqrt{\frac{2g}{\frac{A^2}{a^2} - 1}} \cdot \sqrt{h_A - h_a} = \text{cost} \sqrt{h_A - h_a}$$

costante che dipende soltanto da g e dalla forma del tubo

$\Rightarrow$ se espongo il tubo di Venturi ad un flusso di un fluido (ad es. immergendolo in un fiume) misuro $(h_A - h_a)$ e ricavo immediatamente una misura di v_A, velocità con cui il fluido entra nel tubo $\rightarrow$ velocità del fluido

Tubo di Pitot

Alternativa al tubo di Venturi per misurare la velocità di un fluido (Senna, 1732).



(} H   vedi * ↓ tra parentesi perché il risultato non dipende da H)

Il fluido che entra nel tubo si ferma.
Applico Bernoulli tra 1 e 2:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \cancel{h_1} = p_2 + \frac{1}{2}\rho \cancel{v_2^2} + \cancel{h_2} \qquad h_1 = h_2 \quad v_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 - p_1 \overset{*}{=} \rho g h$$

Da cui
$$v_1^2 = 2gh$$
$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

La scrittura dell'eq. di Bernoulli con le altezze rende l'interpretazione fisica ancora più immediata:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g}$$

$$h_{piez\,1} + h_{cin\,1} = h_{piez\,2}$$

In pratica, in 2 $h_{cin\,1}$ viene "convertita" in h_{piez} e costituisce la differenza: $\quad h_{cin\,1} = h_{piez\,2} - h_{piez\,1} = h$

---

* Che $p_2 - p_1 = \rho g h$ è evidente per studenti "esperti".
Se non dovesse essere evidente, lo si può facilmente dimostrare:

$$p_1 = p_{atm} + \rho g H \qquad \text{(vedi * a pag. 85)}$$
$$p_2 = p_{atm} + \rho g (h + H)$$
$$p_2 - p_1 = p_{atm} + \rho g (h+H) - (p_{atm} + \rho g H)$$
$$= \cancel{p_{atm}} + \rho g h + \cancel{\rho g H} - \cancel{p_{atm}} - \cancel{\rho g H}$$
$$= \rho g h$$