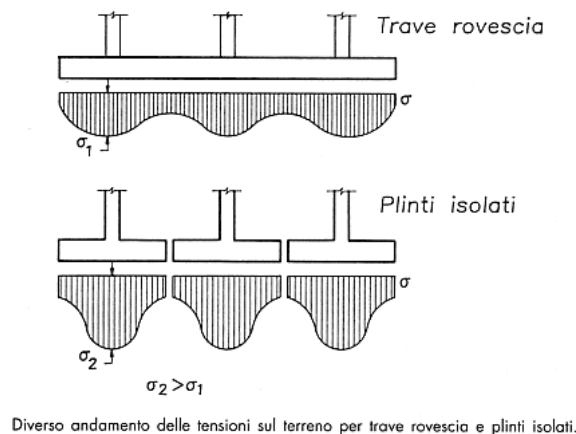
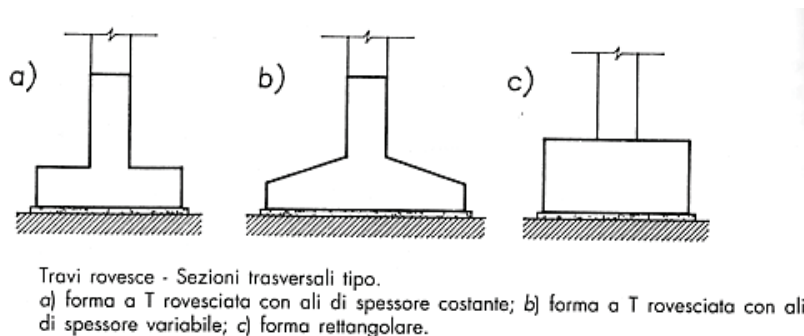


6.2.8. La Trave di Fondazione

Le Travi di Fondazione (dette anche travi rovesce) sono elementi strutturali a prevalente sviluppo longitudinale; possono essere adottate quando si verifica una o più delle seguenti situazioni:

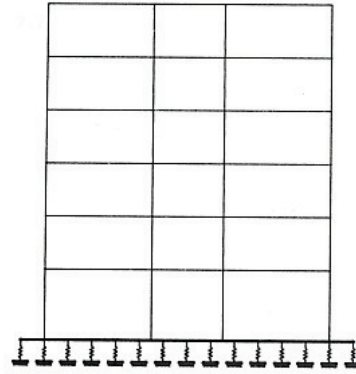
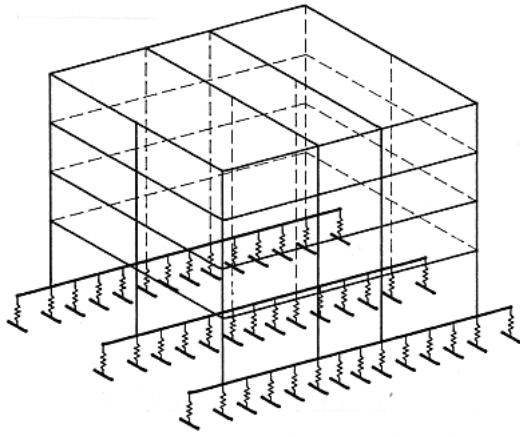
- si vogliono diminuire le tensioni massime sul terreno con elementi di maggiore rigidezza;
- si vuole contenere l'entità dei possibili cedimenti differenziali;
- si vuole ridurre le dimensioni delle strutture di fondazione ottimizzando la sezione, a volte, a fronte di maggiore complessità realizzativa;
- si verifica il caso che, in relazione alla mutua distanza tra i pilastri ed alle dimensioni in pianta dei possibili plinti, questi elementi si troverebbero adiacenti o addirittura compenetranti.



Il modello di calcolo più aderente al reale comportamento dell'insieme terreno-fondazione-struttura in elevazione è quello che li considera contemporaneamente interagenti. A tal fine la struttura può essere modellata come un telaio spaziale appoggiato su vincoli elastici (molle) che rappresentano il comportamento del terreno.

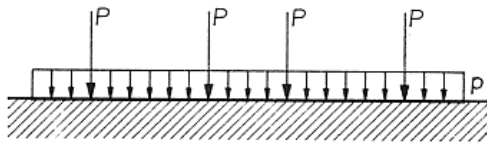
Più spesso si ricorre a modelli semplificati, quali ad esempio:

- telaio piano su appoggi elastici (molle);
- trave su suolo elastico;
- trave continua su appoggi fissi.

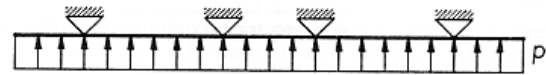


P = carichi provenienti dai pilastri
 p = peso proprio della struttura di fondazione e degli eventuali carichi uniformemente distribuiti applicati su di essa

$p = R/A$
 R = risultante dei carichi provenienti dall' elevazione a meno dei carichi uniformemente ripartiti agenti sulla trave di fondazione
 A = area della superficie di contatto fondazioni-terreno



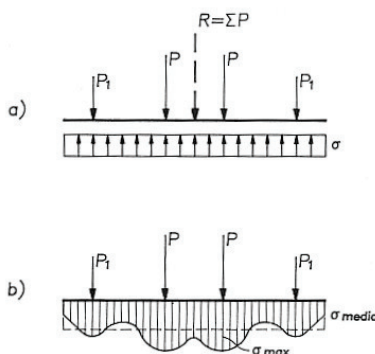
Modello di calcolo a trave su suolo elastico.



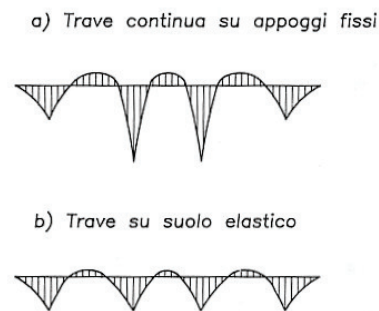
Modello di calcolo a trave continua su appoggi fissi.

Il fatto di considerare la fondazione come una trave continua su appoggi fissi costituiti dai pilastri, caricata dalla reazione del terreno, rappresenta certamente una semplificazione; equivale ad assumere le strutture in elevazione notevolmente rigide e le strutture di fondazione rigide rispetto al terreno. In questo caso le tensioni massime sul terreno vengono sottostimate, in quanto il modello fornisce il valore della tensione media e non del valore massimo.

Lo schema a trave continua su suolo elastico, considera la deformabilità della trave e del terreno, valutando correttamente l'entità dei picchi delle tensioni sul terreno; viceversa le sollecitazioni nella struttura di fondazione (momento M e taglio T) risultano essere meno penalizzanti di quelle della trave su appoggi fissi in cui i picchi di sollecitazione non vengono smorzati dalla deformabilità del terreno.



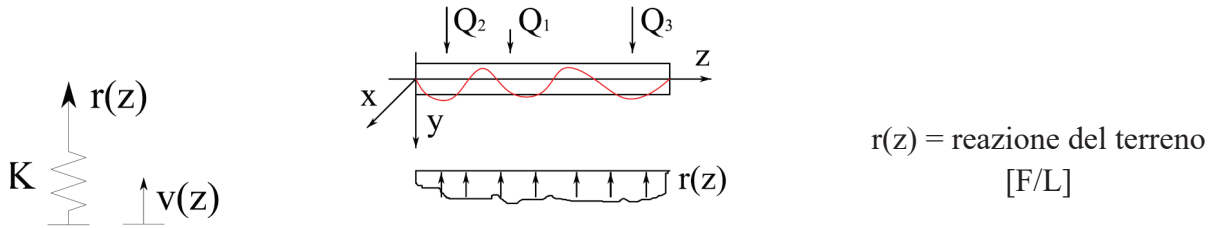
Differente andamento delle tensioni nel terreno lungo la trave in relazione al modello di calcolo adottato.
 a) Trave continua infinitamente rigida; b) Trave su suolo elastico.



Differente andamento del diagramma dei momenti lungo la trave in relazione al modello di calcolo adottato.
 a) Trave continua su appoggi fissi; b) Trave su suolo elastico.

6.2.9. Terreno alla Winkler

Il terreno viene in genere rappresentato attraverso vincoli elastici (letto di molle - ipotesi di Winkler) posti ad interasse scelto in relazione alla luce delle travi di fondazione.



Terreno alla Winkler: mezzo elastico lineare la cui superficie di separazione in ogni punto reagisce con una forza proporzionale al cedimento

$$r(z) = K \cdot v(z) \qquad \text{1ª ipotesi di Winkler}$$

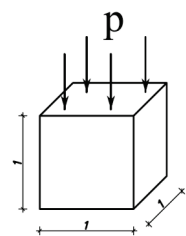
dove:

- r(z) è a reazione distribuita del terreno immediatamente sottostante alla fondazione;
- K è la rigidezza della molla elastica, dipendente dalle caratteristiche del terreno e della fondazione; se il terreno è omogeneo, la rigidezza K rimane costante lungo tutta la trave;
- v(z) è il cedimento del terreno sotto la trave ;

Dal punto di vista dimensionale si ha: $\left[\frac{F}{L} \right] = \left[\frac{F}{L^2} \right] \times [L]$

La rigidezza K della molla vale: $K = k_w \cdot b$ $\rightarrow \left[\frac{F}{L^2} \right] = \left[\frac{F}{L^3} \right] \times [L]$

dove:

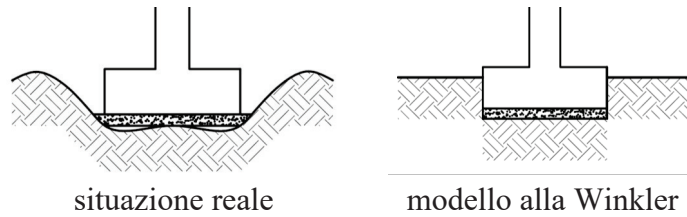


k_w si chiama COEFFICIENTE DI SOTTOFONDO o COSTANTE DI WINKLER: è la pressione che bisogna esercitare su una superficie unitaria di terreno per determinare un cedimento unitario;

b è la larghezza della fondazione: aumentare “b” significa aumentare la resistenza che la trave oppone al terreno.

Ipotesi di Winkler: 1) LETTO DI MOLLE: solamente le molle sollecitate si abbassano, mentre quelle non sollecitate non “lavorano” (vedi figura): le molle sono indipendenti una rispetto all’altra.

Per piccole fondazioni è un’ipotesi cautelativa, in quanto si trascura il contributo delle zone non direttamente caricate.



Ipotesi di Winkler: 2) **ELASTICITÀ LINEARE**

L'ipotesi può essere ragionevole nel caso di sollecitazioni di breve durata, rapide.

Per sollecitazioni di lunga durata non si può prescindere dal comportamento viscoso del terreno.

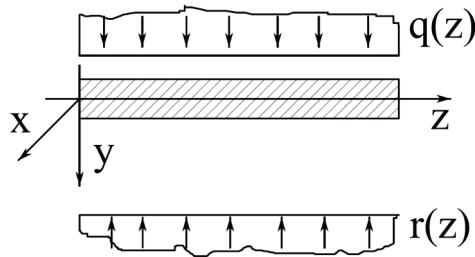
Ipotesi di Winkler: 3) **VINCOLO BIDIREZIONALE**

Si considera che la molla elastica reagisce sia a compressione sia a trazione, mentre nella realtà il terreno non reagisce a trazione; per tale motivo è necessario fare un controllo a posteriori sullo stato tensionale del terreno (deve essere sempre compresso).

Nella tabella seguente si riportano alcuni valori orientativi del coefficiente di sottofondo per alcune tipologie di terreno:

Coefficienti di sottofondo	
Sabbia molto compatta	$>15 \text{ kg/cm}^3$
Sabbia compatta	$15 \div 7.5 \text{ kg/cm}^3$
Sabbia mediamente compatta	$7.5 \div 3 \text{ kg/cm}^3$
Sabbia mediamente sciolta	$3 \div 1.25 \text{ kg/cm}^3$
Sabbia sciolta	$1.25 \div 0.4 \text{ kg/cm}^3$
Sabbia molto sciolta	$<0.4 \text{ kg/cm}^3$
Sabbia e ghiaia compatta	$10 \div 30 \text{ kg/cm}^3$
Terreno coerente normalconsolidato	$1 \div 5 \text{ kg/cm}^3$
Terreno coerente sovraconsolidato	$15 \div 25 \text{ kg/cm}^3$

Consideriamo una trave di fondazione, soggetta ad un carico distribuito generico $q(z)$ all'estradosso (carico proveniente dalla struttura in elevazione) e soggetta alla reazione del terreno $r(z)$ agente all'intradosso:



linea elastica

$$v(z)$$

rotazione

$$\varphi = -\frac{dv}{dz}$$

curvatura

$$\chi = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M(z)}{EJ} = -\frac{d^2v}{dz^2}$$

$$T(z) = \frac{dM(z)}{dz} \quad \frac{T(z)}{EJ} = -\frac{d^3v}{dz^3}$$

Eq. della linea elastica:

$$p(z) = -\frac{dT(z)}{dz} = EJ \frac{d^4v}{dz^4}$$

$$EJ \frac{d^4v}{dz^4} = p(z) = q(z) - r(z) \quad r(z) = k \cdot v(z)$$

Equazione differenziale in $v(z)$ del 4° ordine

$$EJ \frac{d^4v}{dz^4} + k \cdot v(z) = q(z)$$

$v(z)$ è l'espressione della generica deformata della trave (integrale generale):

$$v(z) = v_0(z) + v_1(z)$$

$$v_0(z) \quad \text{è soluzione della eq. omogenea associata;} \quad EJ \frac{d^4v}{dz^4} + k \cdot v(z) = 0$$

$$v_1(z) \quad \text{è soluzione particolare dell'eq. differenziale completa}$$

calcoliamo $v_1(z)$:

Assumendo che $q(z)$ al più è un'equazione di 3° grado $q(z) = C_3 z^3 + C_2 z^2 + C_1 z^1 + C_0$

$$\text{si ha che } v_1(z) = \frac{q(z)}{k} = \frac{C_3 z^3 + C_2 z^2 + C_1 z^1 + C_0}{k}$$

$$\text{per carico costante : } v_1(z) = \frac{C_0}{k}$$

$$\text{per carico lineare : } v_1(z) = \frac{C_1 \cdot z + C_0}{k}$$

calcoliamo $v_0(z)$:

$$EJ \frac{d^4 v}{dz^4} + k \cdot v(z) = 0$$

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + 4\alpha^4 \cdot v(z) = 0 \quad \text{con } \alpha^4 = \frac{k}{4EJ}, \text{ cioè } \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$$

$$\lambda^4 + 4\alpha^4 = 0 \quad \text{equazione caratteristica con soluzioni } \lambda_{1,2,3,4} = \pm \alpha \pm i\alpha$$

$$v_0(z) = B_1 e^{\lambda_1 z} + B_2 e^{\lambda_2 z} + B_3 e^{\lambda_3 z} + B_4 e^{\lambda_4 z}$$

$$v_0(z) = B_1 \sin(\alpha z) e^{\alpha z} + B_2 \cos(\alpha z) e^{\alpha z} + B_3 \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + B_4 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$$

Riassumendo l'integrale dell'equazione è pari a :

$$v(z) = v_0(z) + v_1(z)$$

dove :

$$v_1(z) = \frac{q(z)}{k} = \frac{C_3 z^3 + C_2 z^2 + C_1 z^1 + C_0}{k}$$

$$v_0(z) = B_1 \sin(\alpha z) e^{\alpha z} + B_2 \cos(\alpha z) e^{\alpha z} + B_3 \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + B_4 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$$

mentre le costanti vengono determinate in funzione delle condizioni al contorno.

OSS:

- l'integrale particolare dell'omogenea completa $v_1(z)$ tiene conto dei carichi distribuiti sulla trave;
- l'integrale generale dell'omogenea associata $v_2(z)$ considera gli effetti dei carichi concentrati e delle condizioni al contorno;

Risolta l'equazione della linea elastica e nota la $v(z)$, si possono determinare facilmente le seguenti grandezze:

deformata

$$v(z)$$

rotazione

$$\varphi = -\frac{dv}{dz}$$

momento flettente

$$M(z) = -\frac{d^2 v}{dz^2}$$

taglio

$$T(z) = -\frac{d^3 v}{dz^3} EJ$$

TRAVE DI LUNGHEZZA INFINITA (SEMINFINITA)

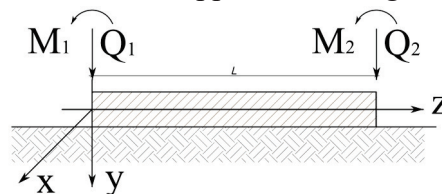


Per $z=+\infty$ $e^{\alpha z} = +\infty$ B_1 e $B_2 = 0$, in caso contrario avrei cedimenti infinti per carichi concentrati Q_1 e M_1 finiti, assurdo;
 Per $z=+\infty$ $e^{-\alpha z} = 0$ l'effetto dei carichi Q_1 e M_1 viene smorzato

Dunque per la trave infinita si ha: $v_0(z) = B_3 \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + B_4 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$

TRAVE DI LUNGHEZZA FINITA

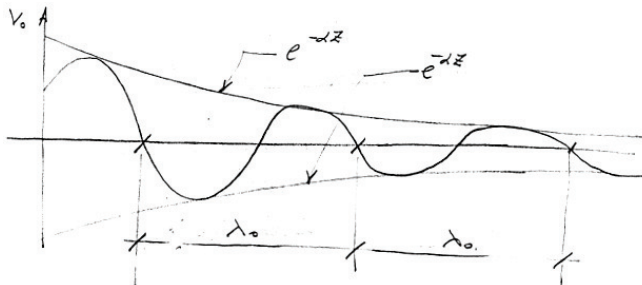
Possiamo ottenere la soluzione effettiva, sovrapponendo i singoli effetti:



se la trave è sufficientemente lunga, gli effetti di Q_1 e M_1 sono trascurabili da un certo punto in poi, quindi anche se la lunghezza L è finita possono essere trattate come travi infinite.

La distinzione dipende dalla lunghezza L rapportata alle caratteristiche del fenomeno fisico.

L'espressione $v_0(z) = B_3 \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + B_4 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$ rappresenta una funzione circolare smorzata (limitata) da una funzione esponenziale:



λ_0 viene chiamata lunghezza d'onda della trave o **lunghezza di estinzione:**

$$\alpha \lambda_0 = 2\pi$$

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\alpha}$$

$$\lambda_0 = 2\pi \sqrt{\frac{4EJ}{k}}$$

EJ = rigidezza trave
 k = rigidezza terreno

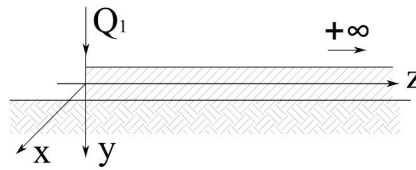
Per $z = 0$ $e^{-\alpha z} = 1$

Per $z = \lambda_0$ $e^{-\alpha \lambda_0} = e^{-2\pi} = 1/500$ ad una distanza pari a λ_0 gli effetti dei carichi sono ridotti di 500 volte: praticamente viene annullato lo spostamento.

Dunque se la luce L è paragonabile rispetto a λ_0 posso considerare la trave di lunghezza infinita.

3.2.9.1. Esempi

Trave di lunghezza infinita (seminfinita), $\lambda > \lambda_0$, con carico concentrato Q_1



Per la trave infinita si ha:

$$v_0(z) = B_3 \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + B_4 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$$

Condizioni al contorno:

per $z = 0$

$M = 0$ e $T = -Q$

cioè:

$$\begin{cases} M(z) = -\frac{d^2 v}{dz^2} EJ = 0 \\ T(z) = -\frac{d^3 v}{dz^3} EJ = -Q \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_0(z)}{dz} &= B_3 (\alpha \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} - \alpha \sin(\alpha z) e^{-\alpha z}) + B_4 (-\alpha \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} - \alpha \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}) \\ &= -\alpha (B_3 + B_4) \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + \alpha (B_3 - B_4) \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 v_0(z)}{dz^2} = 2\alpha^2 B_4 \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} - 2\alpha^2 B_3 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$$

$$\frac{d^3 v_0(z)}{dz^3} = -2\alpha^3 (B_4 - B_3) \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + 2\alpha^3 (B_4 + B_3) \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$$

per $z = 0$ $M(z) = 0$, cioè

$$\begin{cases} \frac{M(z)}{EJ} = -\frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \\ 2\alpha^2 B_3 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} = 0, \quad B_3 = 0 \end{cases}$$

per $z = 0$ $T(z) = -Q$, cioè

$$\begin{cases} \frac{T(z)}{EJ} = -\frac{d^3 v}{dz^3} = \frac{Q}{EJ} \\ 2\alpha^3 B_4 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} = \frac{Q}{EJ}, \quad B_4 = \frac{Q}{2\alpha^3 EJ} \end{cases}$$

Quindi la deformata vale:

$$v_0(z) = \frac{Q}{2\alpha^3 EJ} \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} \quad \text{con } \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$$

che rappresenta l'eq. della linea elastica di una trave infinita con un carico concentrato Q_1 .

Esempio di trave di lunghezza infinita (seminfinita), $\lambda > \lambda_0$, con coppia concentrata M_1



Per la trave infinita si ha:

$$v_0(z) = B_3 \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + B_4 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$$

Condizioni al contorno:

per $z = 0$ $M = M_1$ e $T = 0$

$$M(z) = -\frac{d^2 v}{dz^2} EJ = M_1,$$

$$-2\alpha^2 B_3 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} = -\frac{M_1}{EJ}, \quad B_3 = \frac{M_1}{2\alpha^2 EJ}$$

$$T(z) = -\frac{d^3 v}{dz^3} EJ = 0,$$

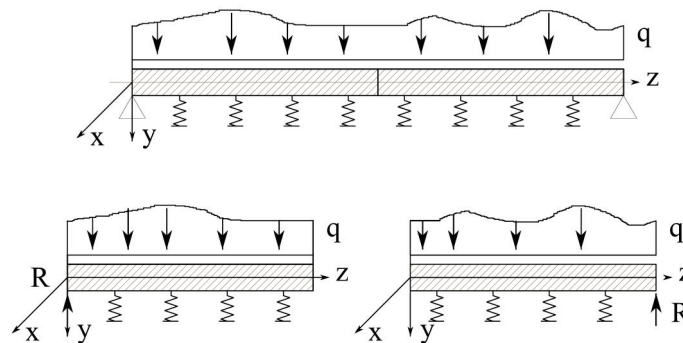
$$2\alpha^3 (B_4 + B_3) \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} = 0, \quad B_4 = -B_3 = -\frac{M_1}{2\alpha^2 EJ}$$

Quindi la deformata vale:

$$v_0(z) = \frac{M_1}{2\alpha^2 EJ} \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} - \frac{M_1}{2\alpha^2 EJ} \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} \quad \text{con } \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$$

che rappresenta l'equazione della linea elastica di una trave infinita con una coppia concentrata M_1 .

Esempio di trave su terreno elastico e appoggi fissi



Ipotizzo che la trave sia infinita e studio separatamente la trave di sinistra e quella di destra.

Per ciascun conio di trave ho una soluzione è del tipo:

$$v(z) = v_0(z) + v_1(z)$$

condizioni al contorno:

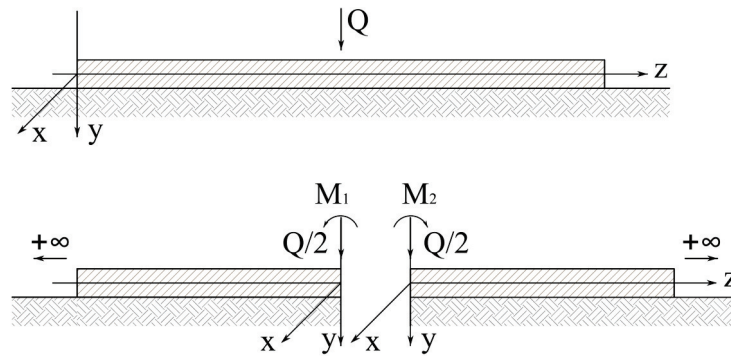
$$\text{per } z = 0 \quad \text{si ha } v = 0, M = 0, T = R$$

in tutto 3 equazioni e 3 incognite (B_3, B_4, R);

OSS:

se non avessi potuto considerare la trave di lunghezza infinita, le tre equazioni di un conio sarebbero state dipendenti dalle altre 3 del conio complementare, 6 equazioni e 6 incognite.

Esempio di trave su terreno elastico con carico concentrato a distanza a dal bordo libero

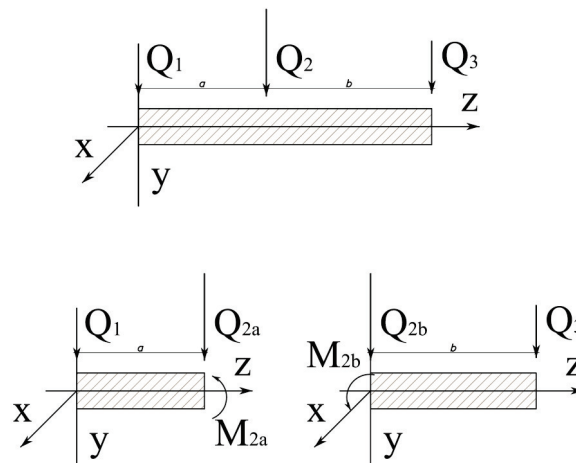


Si risolvono le due semitravi ipotizzate infinite, determinando le incognite Q_1 e M_1 , Q_2 e M_2 imponendo anche:

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= Q & M_1 &= M_2 \\ v_1 &= v_2 & \varphi_1 &= \varphi_2 \end{aligned}$$

Affinché le due semitravi si possano definire di lunghezza infinita, ciascun concio deve essere lungo almeno λ_0 .

Esempio di trave su terreno elastico con 3 carichi concentrati



Se la trave è assimilabile ad una trave infinita si può dividere in due concii e trattarli separatamente con le equazioni di congruenza nella sezione di separazione.

Se ciascun concio non è infinito, i carichi all'estremità non si possono considerare indipendenti da quelli centrali, quindi le equazioni da svolgere sono complete (4 incognite ciascuna).

Se anche le semitravi possono essere considerate infinite, si può ulteriormente scomporre il problema.

Esempi

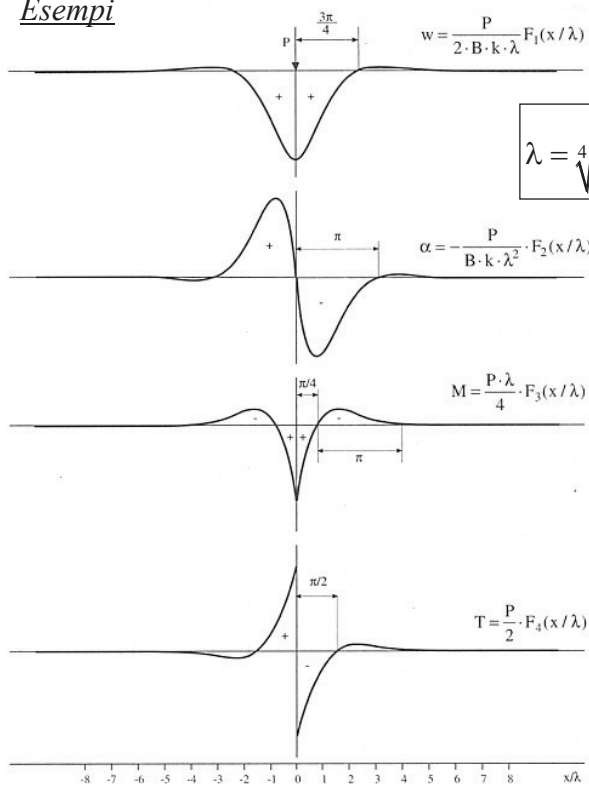


Fig. 9.3. Soluzioni per la trave di lunghezza infinita su suolo alla Winkler, caricata in una sezione qualsiasi da una forza concentrata

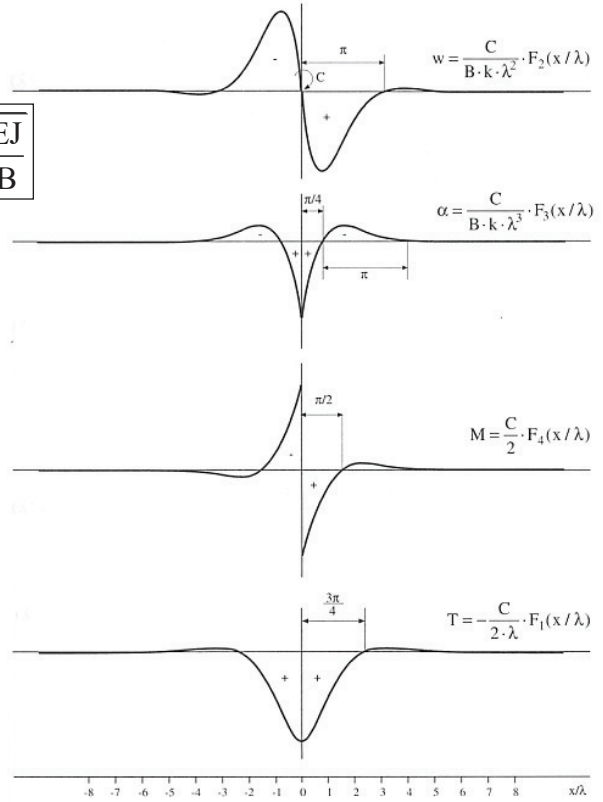


Fig. 9.4. Soluzioni per la trave di lunghezza infinita su suolo alla Winkler, caricata in una sezione qualsiasi da una coppia concentrata

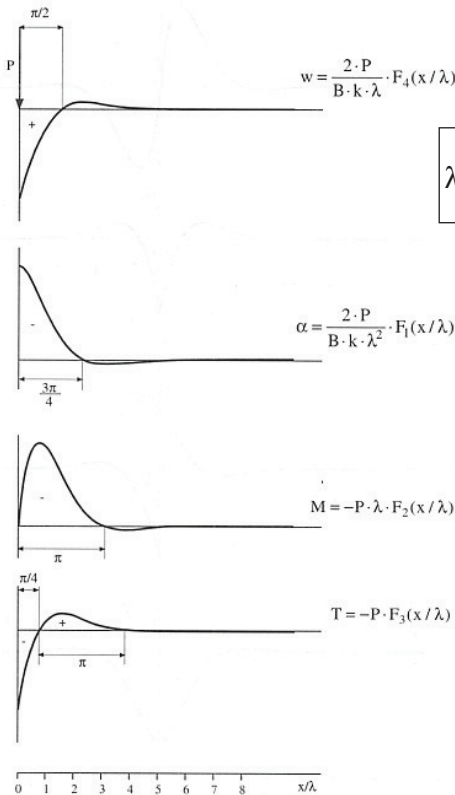


Fig. 9.5. Soluzioni per la trave di lunghezza infinita su suolo alla Winkler, caricata in una estremità da una forza concentrata

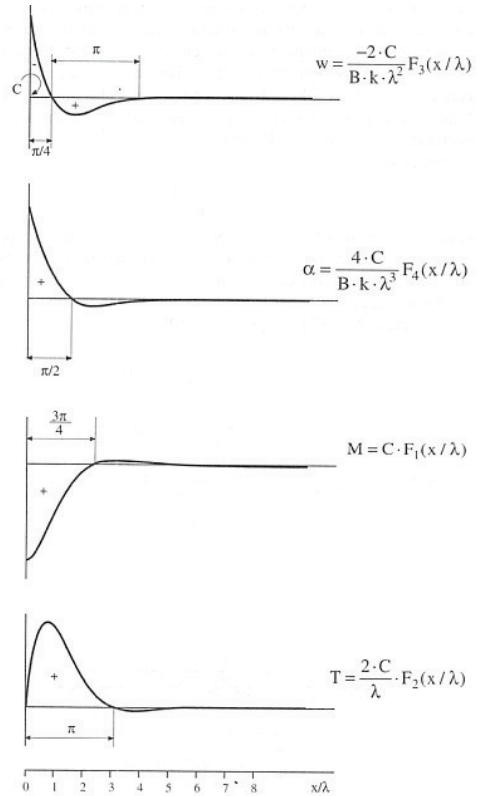


Fig. 9.6. Soluzioni per la trave di lunghezza infinita su suolo alla Winkler, caricata in una estremità da una coppia concentrata

3.2.9.2. Interazione terreno – fondazione – struttura

A completamento di quanto visto nel § 3.2.2., mettiamo in gioco anche la rigidità del terreno.

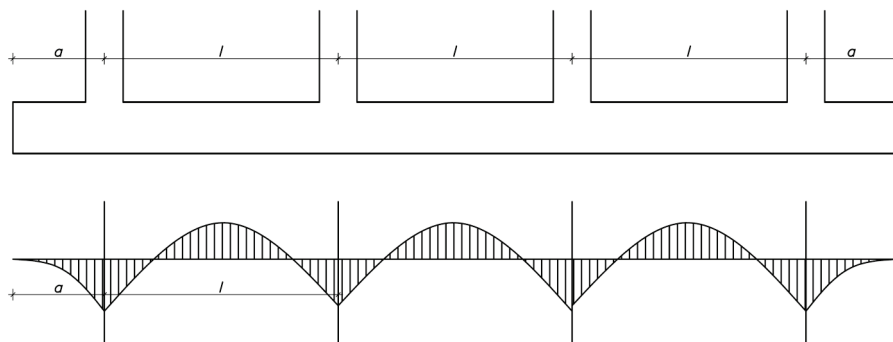
a) TRAVE RIGIDA RISPETTO AL TELAIO

- i) Trave rigida rispetto al suolo: si comporta come un plinto
- ii) Trave flessibile rispetto al suolo: si risolve con il metodo delle travi seminfinite

b) TRAVE FLESSIBILE RISPETTO AL TELAIO

- i) Trave rigida rispetto al suolo: distribuzioni delle tensioni nel terreno lineari;
- ii) Trave flessibile rispetto al suolo: distribuzioni delle sollecitazioni nel terreno variabili in funzione della deformata della trave e quindi del suo cedimento;

3.2.9.3. Criteri di progetto della trave di fondazione



Le travi di fondazione devono essere tozze e rigide ($H \approx 1/5 L$).

Per smorzare e ridurre le tensioni in corrispondenza dei pilastri di estremità, è bene (se possibile) prolungare la fondazione oltre l'ultimo pilastro:

$$\frac{qa^2}{2} = \frac{ql^2}{12}, \text{ quindi } a = \frac{l}{\sqrt{6}} = 0.4 \cdot l$$

La sezione della trave, tipicamente a T rovescio, va verificata a momento flettente positivo (in corrispondenza dei carichi) e momento negativo (in campata), oltre alla verifica a taglio.

Anche in questo caso si possono utilizzare diversi modelli numerici della struttura, dove il terreno viene rappresentato con una serie di **molle elastiche di rigidezza K** , espressa in funzione della **costante di sottofondo k (costante di Winkler)**.

Volendo risolvere il problema manualmente, si può considerare separatamente le travi attribuendo a ciascuna metà carico per i pilastri centrali, mentre 1/3 e 2/3 per quelli di bordo.

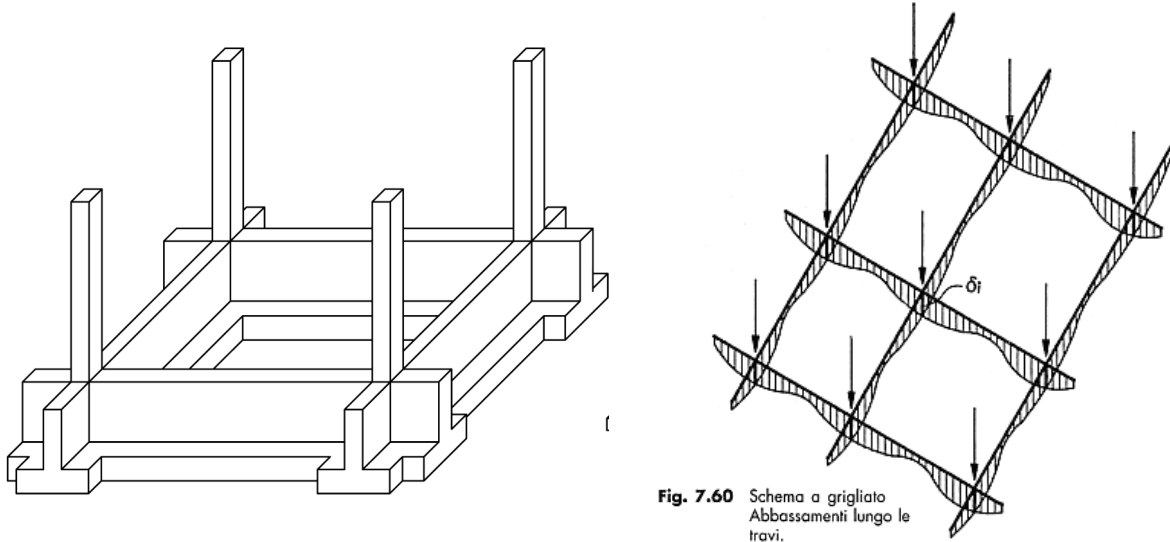
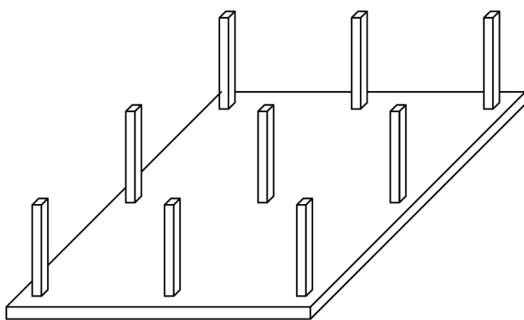


Fig. 7.60 Schema a grigliato
Abbassamenti lungo le travi.

6.2.11. Platea di fondazione

Le platee sono una particolare tipo di fondazione che va ad interessare tutti le strutture portanti dell'edificio: **una piastra uniforme che collega tutti i pilastri, setti**.

Generalmente vengono impiegate in terreni molto scadenti (scarse capacità resistenti e cedevoli).



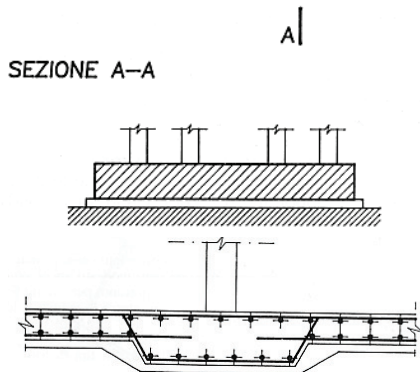
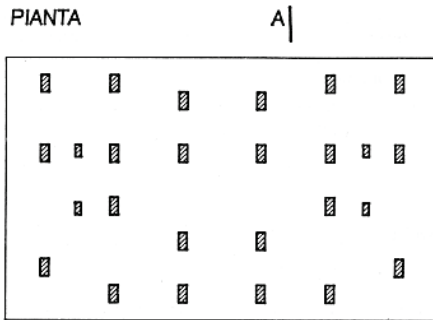
A parità di spessore con le altre tipologie di fondazione, le platee sono molto più rigide, perciò è importante centrare il baricentro della platea con la risultante dei carichi verticali, in modo da avere:

- un diagramma delle tensioni sul terreno uniforme;
- un cedimento uniforme.

A seconda dell'entità dei carichi e delle dimensioni, si può avere:

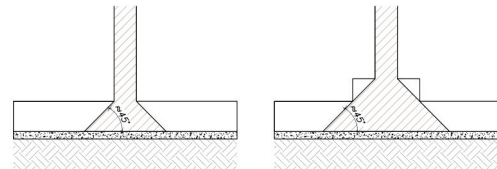
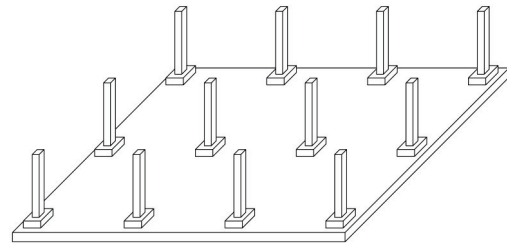
- **platea**: "solettone" in c.a.
- **platea nervata**: soletta inferiore in c.a. irrigidita da nervature disposte nelle due direzioni;
- **platea a fungo**: soletta inferiore con locali ingrossamenti superiori in corrispondenza dei pilastri;
- **platea nervata con doppia soletta**: soletta inferiore, nervature e soletta superiore.

Platea: soletta in c.a.



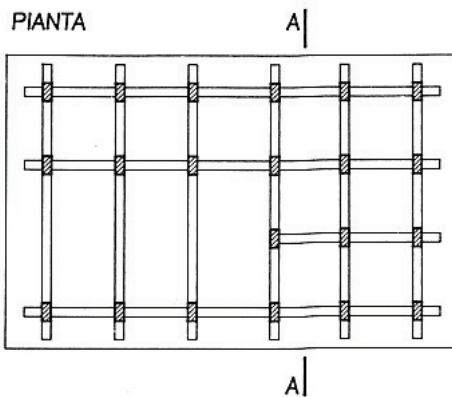
Eventuali ingrossamenti se lo spessore è molto ridotto (solitamente $s=30\div 100$ cm).

Platea a fungo



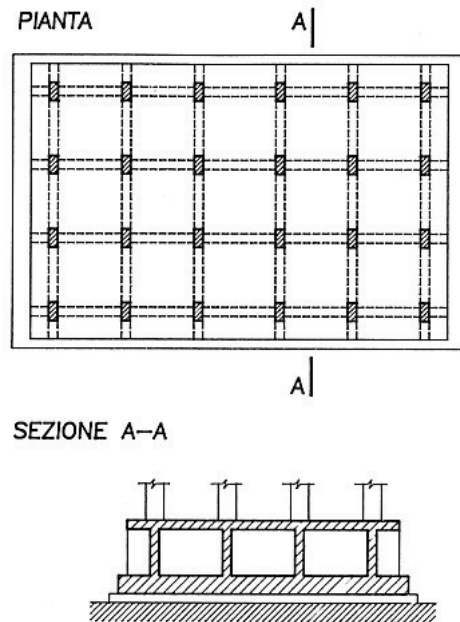
Soletta inferiore in c.a. con locali ingrossamenti in corrispondenza di ogni pilastro per distribuire meglio il carico concentrato, contrastando il fenomeno del punzonamento.

Platea nervata



Richiedono maggior onere in fase di realizzazione, ma consentono un considerevole risparmio di materiale; è necessario disporre di una maglia strutturale regolare.

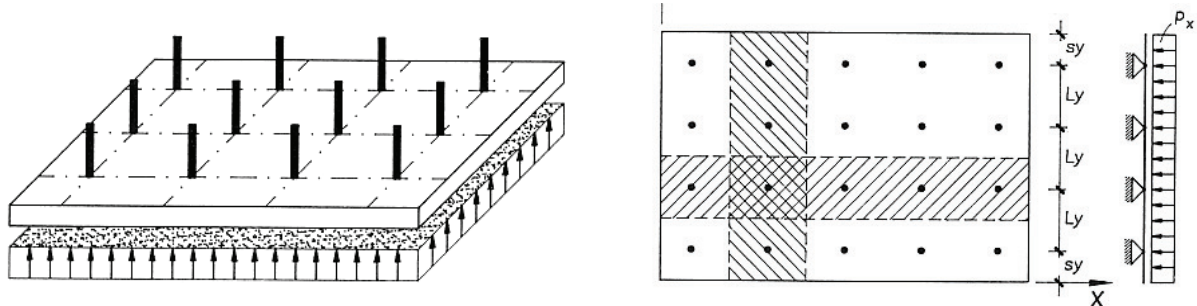
Platea nervata con doppia soletta in c.a.



Vengono impiegate al posto delle platee piene quando è richiesta un notevole spessore ($>100\div 120$ cm).

3.2.11.1. Modelli di calcolo

Si possono adottare diversi metodi a seconda del grado di complessità ed onere computazionale. Quello più preciso è certamente il **modello completo agli elementi finiti (F.E.M.)**, in cui viene schematizzata la struttura in elevazione, la platea di fondazione ed il terreno con una serie di molle elastiche di rigidezza K.



Semplificando sempre più il modello di calcolo, si può considerare:

- piastra su suolo elastico caricata con i carichi provenienti dai pilastri;
- piastra su appoggi fissi (pilastri) caricata da un carico distribuito approssimativamente costante (sollecitazione nel terreno);
- la platea viene scomposta in una serie di strisce longitudinali e trasversali, ciascuna calcolata a trave continua su appoggi fissi.

