# FISICA GENERALE

## — Parte 3 —

## Statistica

**Link moodle**: https://moodle2.units.it/course/view.php?id=16681

Codice Teams del corso: gz0wuf4

# Programma delle lezioni

**Lezione 1:** Introduzione al corso, ai concetti generali e all'analisi degli errori; stima delle incertezze

**Lezione 2:** Errori casuali e sistematici, rappresentazione degli errori, cifre significative, discrepanza

**Lezione 3:** Errori assoluti e relativi, applicazioni particolari della propagazione degli errori, somma in quadratura

**Lezione 4:** Propagazione degli errori, funzioni di una o più variabili, formula generale; esempi ed esercizi

**Lezione 5:** Analisi statistica degli errori casuali; media, deviazione standard; errori sistematici

**Lezione 6:** Rappresentazione dei dati; istogrammi e distribuzioni, distribuzione limite

**Lezione 7:** Distribuzione normale o gaussiana (prima parte); livelli di confidenza

**Lezione 8:** Distribuzione gaussiana (seconda parte) e principio di massima verosimiglianza; rigetto dei dati

**Lezione 9:** Distribuzione binomiale

**Lezione 10:** Distribuzione di Poisson

**Lezione 11:** Metodo dei minimi quadrati; ripasso di eventuali argomenti a richiesta; esercizi

# Tipi di errore

Nella realtà quotidiana gli errori sono spesso trascurati, ma nelle scienze non è possibile ignorarli.

Tipi di errore di misura:

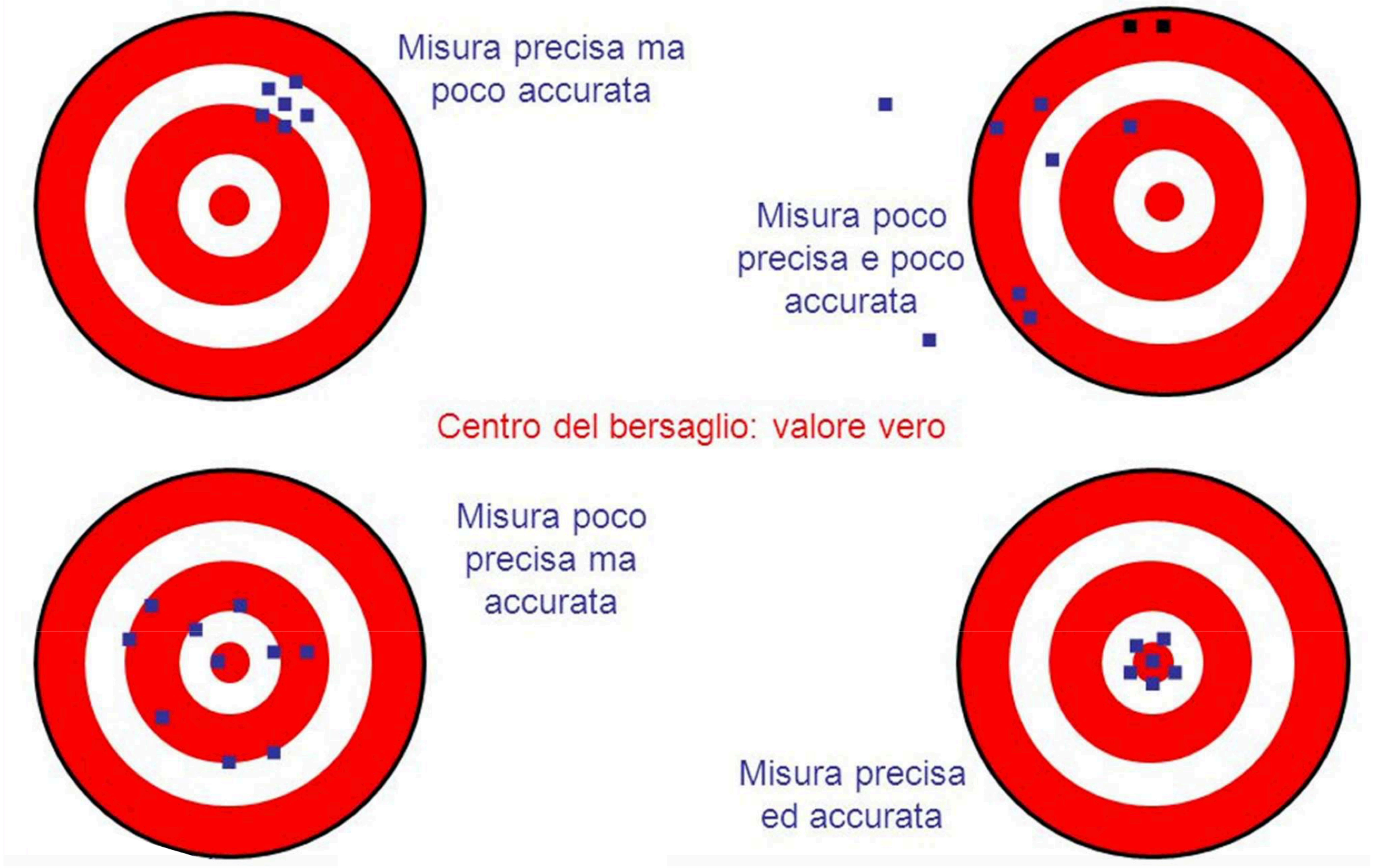
- errore sistematico
- incertezza di lettura
- incertezza casuale

- **Errore sistematico**: è presente quando uno o più fattori incontrollati agiscono su tutte le misure determinando una sottostima o una sovrastima sistematica dei risultati. Esempio: strumento tarato male.

- **Incertezza di lettura**: deriva dalla risoluzione limitata della scala graduata sullo strumento. Connessa all'ordine del sottomultiplo più piccolo dell'unità di misura disponibile.

- **Incertezza casuale**: si ha perché misure della medesima grandezza ripetute da uno o più osservatori indipendenti possono dare risultati leggermente diversi. L'intervallo dei valori della grandezza misurata rappresenta sempre un intervallo di incertezza, dai limiti non netti. La determinazione dell'incertezza casuale richiede una trattazione statistica.

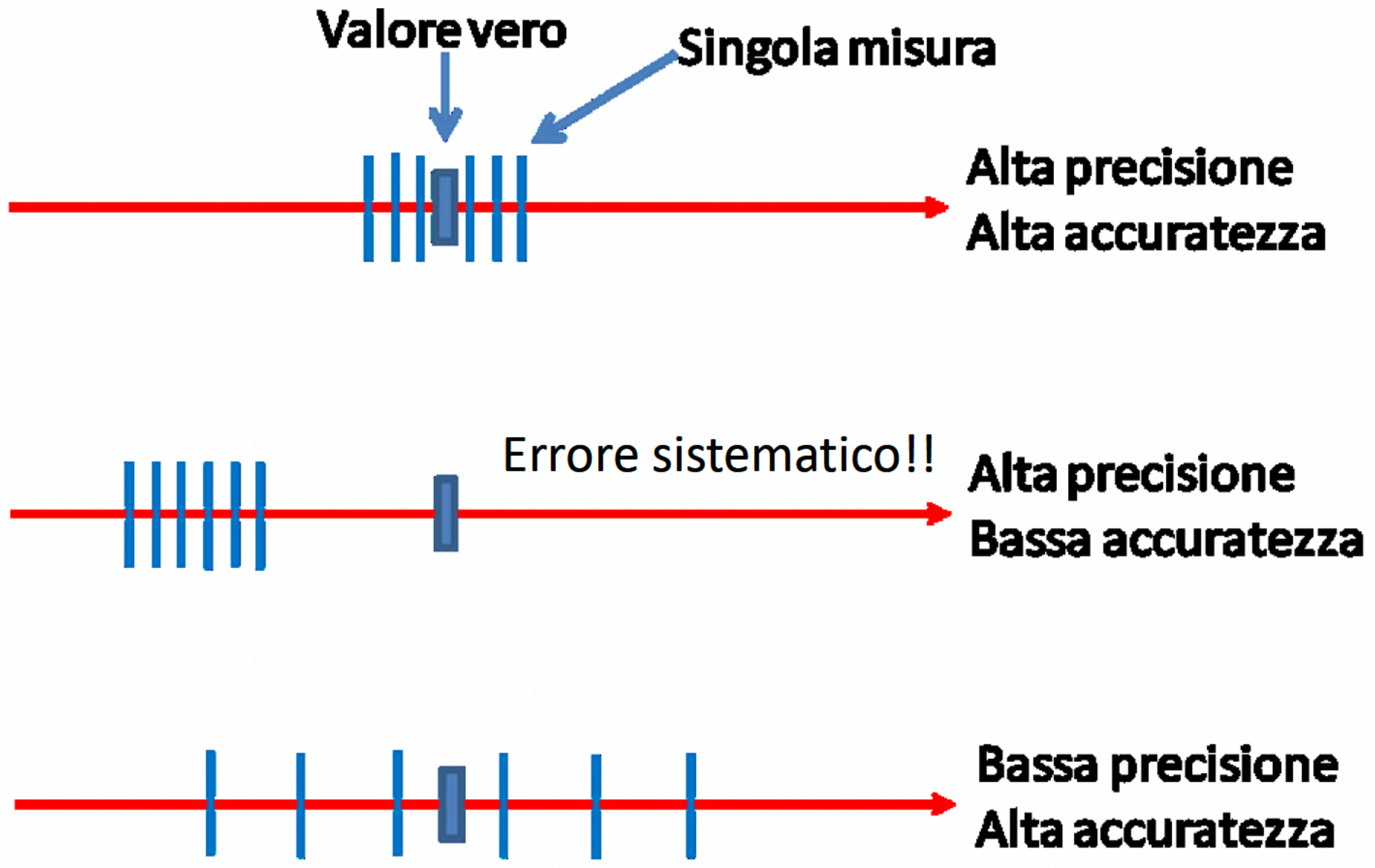
# Precisione VS accuratezza




**Precisione** ↔ presenza **errori casuali**
È precisa una misura per la quale è piccola l'ampiezza dei valori misurati intorno al valore vero o atteso

**Accuratezza** ↔ entità **errori sistematici**
È accurata una misura per la quale il contributo degli errori sistematici è ridotto al minimo

# Precisione VS accuratezza



# Errori nella misura di una grandezza

In generale, una misura può essere affetta contemporaneamente da più sorgenti di incertezze.

In una buona misura di una grandezza, ci si aspetta che l'errore sistematico sia << di quello casuale.

Gli errori casuali sono inevitabili e non eliminabili, a differenza di quelli sistematici.

La misura di ogni grandezza richiede:

- migliore stima del valore vero della grandezza;
- valutazione dell'incertezza su tale stima.

# Come rappresentare gli errori

Il modo corretto di fornire il risultato di qualunque misura consiste nel dare la stima migliore della misura e fornire l'intervallo all'interno del quale si è fiduciosi che la misura si trovi

**(valore misurato di x)** = $x_{\text{best}} \pm \delta x$

miglior stima
dello sperimentatore

$\delta x$ : **incertezza o errore**
nella misura di x

ci si aspetta con fiducia
che la quantità misurata si trovi tra
$x_{\text{best}} - \delta x$ e $x_{\text{best}} + \delta x$

**Esempio:** valore misurato di una lunghezza

L = 3.5 ± 0.2 m
miglior stima della lunghezza = 3.5 m
intervallo probabile: 3.3 — 3.7 m

# Come rappresentare gli errori

Convenzionalmente, $\delta x$ è definito positivo

Per come abbiamo introdotto l'incertezza, si è certi che il valore di x si trovi sempre tra $x_{\text{best}} + \delta x$ (valore più grande) e $x_{\text{best}} - \delta x$ (valore più basso)

Non è sempre possibile o non è sempre conveniente associare ad $x_{\text{best}}$ l'incertezza che descrive l'intervallo all'interno del quale ***sicuramente*** si trova la quantità misurata, perché l'errore sarebbe troppo grande.

Spesso conviene associare ad $x_{\text{best}}$ l'incertezza che descrive l'intervallo all'interno del quale si è ***confidenti ad esempio al 70%*** che si trovi l'effettivo valore della misura.

# Cifre significative

Nel riportare i dati sperimentali ci si avvale di una nozione molto importante, che è quella di **cifre significative**. Queste cifre sono quelle che ha senso scrivere, ossia determinate con sufficiente certezza.

Se rappresento l'incertezza di misura nella forma $x_{\text{best}} \pm \delta x$, non ha senso scrivere $\delta x$ con più di una cifra significativa.

**Esempio:** Se misuro l'accelerazione di gravità $g$, sarebbe non logico dare il suo risultato nella forma:

$$g = 9.82 \pm 0.02385 \text{ m/s}^2$$

È impensabile che l'errore sulla misura possa essere conosciuto con una precisione che raggiunge le 4 cifre significative.

Gli errori sono a volte noti con due cifre significative, ma possiamo qui assumere che **gli errori sperimentali vengono di regola arrotondati ad una cifra significativa**.

La suddetta misura di g andrebbe quindi riscritta come: $g = 9.82 \pm 0.02 \text{ m/s}^2$

# Cifre significative

Nel riportare i dati sperimentali ci si avvale di una nozione molto importante, che è quella di **cifre significative**. Queste cifre sono quelle che ha senso scrivere, ossia determinate con sufficiente certezza.

Se rappresento l'incertezza di misura nella forma $x_{\text{best}} \pm \delta x$ , non ha senso scrivere $\delta x$ con più di una cifra significativa.

Gli errori sono a volte noti con due cifre significative, ma possiamo qui assumere che **gli errori sperimentali vengono di regola arrotondati ad una cifra significativa**.

Un'eccezione a ciò si ha nel caso in cui la prima cifra di $\delta x$ sia 1: in questo caso si ammette la possibilità di specificare una seconda cifra (per es. nel caso dei decimi tra ±0.1 e ±0.2 è lecito utilizzare ±0.15).

Le cifre significative sono eventualmente precedute da un numero opportuno di zeri che le colloca nella posizione decimale corretta (esempio: $g = 9.82 \pm 0.02$ m/s$^2$).

# Cifre significative

Nel riportare i dati sperimentali ci si avvale di una nozione molto importante, che è quella di **cifre significative**. Queste cifre sono quelle che ha senso scrivere, ossia determinate con sufficiente certezza.

Se rappresento l'incertezza di misura nella forma $x_{\text{best}} \pm \delta x$ , non ha senso scrivere $\delta x$ con più di una cifra significativa.

Una volta valutato l'errore della misura, bisogna considerare *quali sono le cifre significative nel valore misurato*.

Si definiscono **cifre significative** di un'operazione di misura le cifre note con certezza più la prima cifra incerta.

Il numero di cifre significative si determina contando la cifra incerta e tutte quelle alla sua sinistra fino all'ultima cifra diversa da zero.

Sono cifre significative gli zeri finali a destra della virgola decimale.

L'ultima cifra significativa del risultato di una misura è quella del sottomultiplo corrispondente all'intervallo di incertezza.

# Cifre significative

Nel riportare i dati sperimentali ci si avvale di una nozione molto importante, che è quella di **cifre significative**. Queste cifre sono quelle che ha senso scrivere, ossia determinate con sufficiente certezza.

Se rappresento l'incertezza di misura nella forma $x_{\text{best}} \pm \delta x$ , non ha senso scrivere $\delta x$ con più di una cifra significativa.

Si definiscono **cifre significative** di un'operazione di misura le cifre note con certezza più la prima cifra incerta.

L'ultima cifra significativa del risultato di una misura è quella del sottomultiplo corrispondente all'intervallo di incertezza.

**Esempi:**

| | |
|---|---|
| $l = 4.56775 \pm 0.00842$ m | notazione errata |
| $l = 4.56775 \pm 0.008$ m | notazione errata |
| $l = 4.568 \pm 0.008$ m | notazione corretta |
| $v = 6051.78 \pm 30$ m/s | notazione errata |
| $v = 6050 \pm 30$ m/s | notazione corretta |

# Cifre significative

Nel riportare i dati sperimentali ci si avvale di una nozione molto importante, che è quella di **cifre significative**. Queste cifre sono quelle che ha senso scrivere, ossia determinate con sufficiente certezza.

Se rappresento l'incertezza di misura nella forma $x_{\text{best}} \pm \delta x$, non ha senso scrivere $\delta x$ con più di una cifra significativa.

Si definiscono **cifre significative** di un'operazione di misura le cifre note con certezza più la prima cifra incerta.

L'ultima cifra significativa del risultato di una misura è quella del sottomultiplo corrispondente all'intervallo di incertezza.

**Regola generale:** Per valutare i risultati, **l'ultima cifra significativa** in qualunque risultato **deve essere dello stesso ordine di grandezza (= nella stessa posizione decimale) dell'errore.**

Esempio: A seconda dell'errore, il risultato $l = 103.72$ cm dovrebbe essere arrotondato a:

$$l = 103.72 \pm 0.02 \text{ cm}, \; l = 103.7 \pm 0.2 \text{ cm}, \; l = 104 \pm 2 \text{ cm}, \; l = 100 \pm 20 \text{ cm},$$

# Cifre significative

I numeri usati nei calcoli dovrebbero generalmente essere tenuti con una cifra significativa in più di quella richiesta nel risultato finale. Così, si ridurrà l'inaccuratezza introdotta arrotondando i numeri.
Alla fine del calcolo, il risultato dovrebbe essere arrotondato per rimuovere questa cifra extra, non significativa.

**L'errore sulla misura** ha le stesse dimensioni della misura stessa.

In genere si riporta come segue:

$$M = 256.8 \pm 0.5 \text{ g}$$
$$M = (2.0 \pm 0.1) \cdot 10^{33} \text{ g}$$

# Discrepanza

**Discrepanza:** differenza tra due valori misurati della stessa grandezza.
Indica il disaccordo tra due misure della stessa grandezza.

La discrepanza può essere o non essere *significativa*.

Esempio: Considero le seguenti due misure:

$l_1 = 37 \pm 8$ mm
$l_2 = 35 \pm 5$ mm

La discrepanza tra le due misure $(l_1 - l_2)$ è minore dei loro errori: le misure sono consistenti e la loro *discrepanza* è *non significativa*.

Queste altre due misure, invece:

$m_1 = 29 \pm 2$ g
$m_2 = 25 \pm 1$ g

sono incompatibili e la loro *discrepanza* è *significativa*.

# Confronto tra valori misurati e accettati

**Esempio 1.**
Problema: Confrontare due o più numeri, ad esempio la misura di una grandezza o di una proprietà con il suo valore noto/accettato o previsto teoricamente.

Procedimento: Esperimento —> stima grandezza —> stima errore sperimentale da associarci —> confronto —> conclusione su eventuale accordo/compatibilità o discrepanza.

Se la misura accettata giace all'interno dell'intervallo stimato della quantità misurata, allora la misura è soddisfacente.

# Confronto tra due misure di una grandezza fisica

**Esempio 2.**
Confrontare due misure di una stessa grandezza fisica.
Supponiamo che due misure indipendenti di una certa grandezza fisica $l$ con dimensioni di una lunghezza abbiano fornito i seguenti risultati:

$$l_1 = 135 \pm 8 \text{ m} \qquad \text{e} \qquad l_2 = 142 \pm 3 \text{ m}$$

I risultati sono diversi, ma il confronto dei valori del centro di ciascun intervallo non è sufficiente per verificare se sono compatibili.

Rappresentazione grafica unidimensionale delle misure: punto sperimentale e barra dell'incertezza.

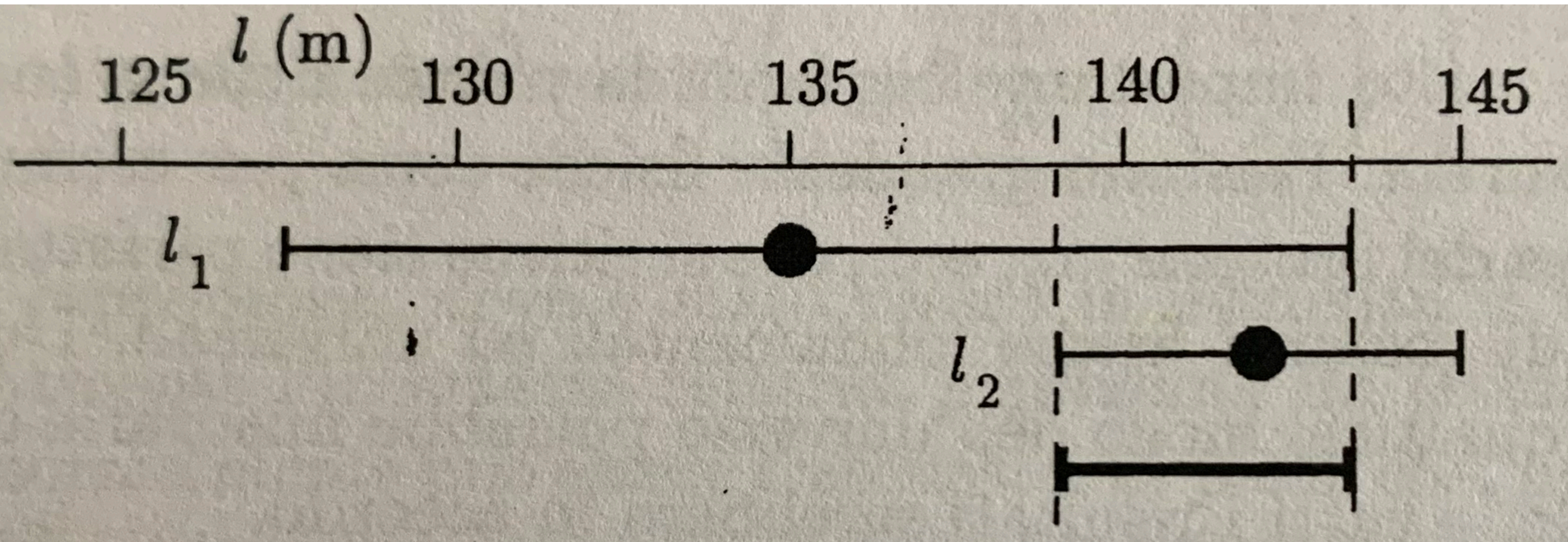



Figura 2.6. Diagramma unidimensionale per verificare la compatibilità fra due (o più) misure della medesima grandezza fisica. L'intervallo di compatibilità è dato dall'intersezione degli intervalli di incertezza (linee verticali tratteggiate).

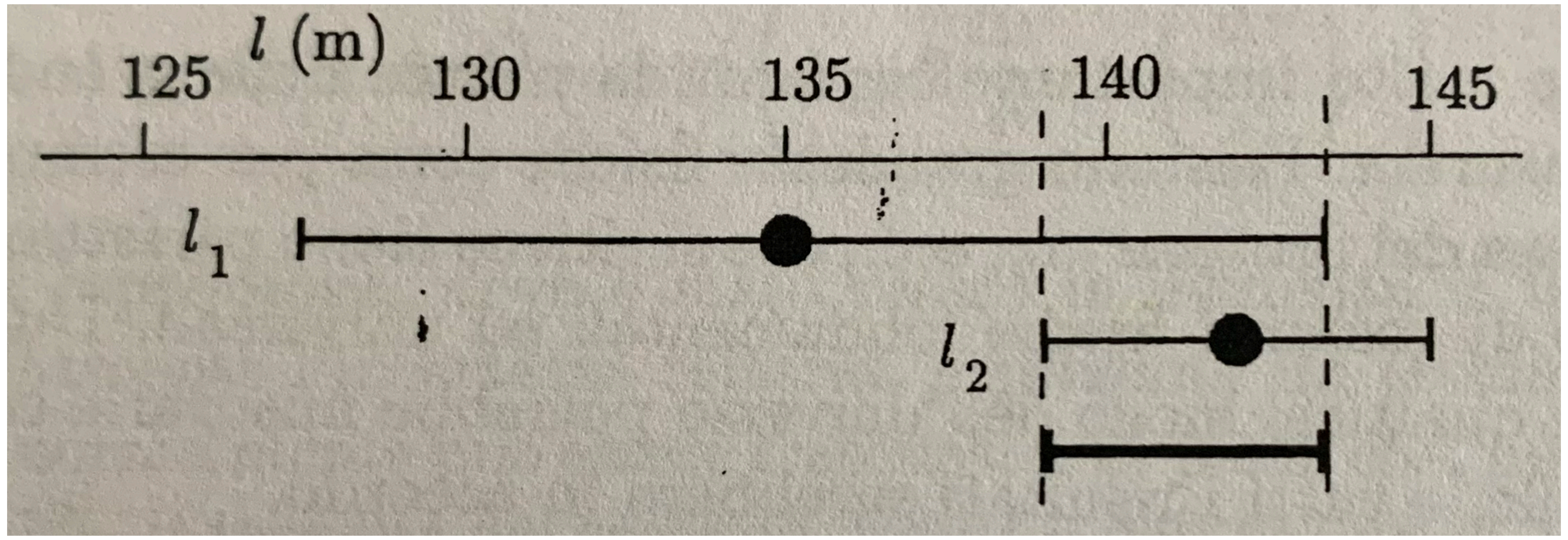
# Confronto tra due misure di una grandezza fisica

**Esempio 2.**
Confrontare due misure di una stessa grandezza fisica.
Supponiamo che due misure indipendenti di una certa grandezza fisica $l$ con dimensioni di una lunghezza abbiano fornito i seguenti risultati:

$$l_1 = 135 \pm 8 \text{ m} \qquad \text{e} \qquad l_2 = 142 \pm 3 \text{ m}$$

I risultati sono diversi, ma il confronto dei valori del centro di ciascun intervallo non è sufficiente per verificare se sono compatibili.

Rappresentazione grafica unidimensionale delle misure: punto sperimentale e barra dell'incertezza.




Combinare le due misure significa determinare l'intersezione di $l_1$ e $l_2$.

Nel caso in cui i due intervalli fossero disgiunti le misure risulterebbero incompatibili (o inconsistenti).

Nel caso in cui un intervallo sia compreso nell'altro, la misura con barra di incertezza maggiore è ininfluente.

# Confronto di due misure

Spesso per determinare una misura si procede ripetendo **più volte** la misura della stessa grandezza.

**Esempio:**
Verificare la conservazione della quantità di moto in un esperimento.
Posso pensare di misurare la quantità di moto *p* prima che due carrelli (che in laboratorio si muovono su una rotaia priva di attrito) collidano, e la quantità di moto *p'* post collisione.
Verifico poi che *p* = *p'* entro le incertezze sperimentali.

Penso di ripetere la coppia di misure *p* e *p'* più volte, e di riportarle in una tabella con due colonne.

Tabella 2.1. **Quantità di moto misurate (tutte in kg. m/sec).**

| *p iniziale* ($\pm$ 0.04) | *p' finale* ($\pm$ 0.06) |
|---|---|
| 1.49 | 1.56 |
| 2.10 | 2.12 |
| 1.16 | 1.05 |
| etc. | etc. |

Se l'errore differisce molto poco tra le misure, posso assumerne uno per tutte

# Confronto di due misure

Tabella 2.1. **Quantità di moto misurate (tutte in kg. m/sec).**

| *p iniziale* ($\pm$ 0.04) | *p' finale* ($\pm$ 0.06) |
|---|---|
| 1.49 | 1.56 |
| 2.10 | 2.12 |
| 1.16 | 1.05 |
| etc. | etc. |

Per ciascuna coppia di misure, l'intervallo di valori di *p* si interseca con quello di *p'* ?
I risultati possono essere dichiarati consistenti con la conservazione della quantità di moto per tutte le misure?

($p$ misurata) $= p_{\text{best}} \pm \delta p$
($p'$ misurata) $= p'_{\text{best}} \pm \delta p'$

Per trovare l'errore in $(p - p')$ :
valore massimo probabile $= (p_{\text{best}} - p'_{\text{best}}) + (\delta p + \delta p')$
valore minimo probabile $= (p_{\text{best}} - p'_{\text{best}}) - (\delta p + \delta p')$

# Confronto di due misure: primo esempio di propagazione degli errori

Tabella 2.2. **Quantità di moto misurate (tutte in kg. m/sec.)**

| *p iniziale* ($\pm 0.04$) | *p′ finale* ($\pm 0.06$) | *differenza p-p′* ($\pm 0.1$) |
|---|---|---|
| 1.49 | 1.56 | − 0.07 |
| 2.10 | 2.12 | − 0.02 |
| 1.16 | 1.05 | − 0.11 |
| etc. | etc. | etc. |

→ Perché la conservazione della quantità di moto sia verificata, questi risultati devono essere consistenti con 0

Per trovare l'errore in $(p - p')$ :

valore massimo probabile $= (p_{\text{best}} - p'_{\text{best}}) + (\delta p + \delta p')$

valore minimo probabile $= (p_{\text{best}} - p'_{\text{best}}) - (\delta p + \delta p')$

Regola generale che si applica alla differenza di qualsiasi coppia di misure:

Se le grandezze $x$ ed $y$ sono misurate con degli errori $\delta x$ e $\delta y$,
e se i valori misurati di x ed y sono utilizzati per calcolare $q = x - y$,
allora $\delta q \simeq \delta x + \delta y$

→ **Errore in una differenza**

# Verifica della proporzionalità con un grafico

Molte leggi fisiche predicono la **proporzionalità tra due grandezze**.

Studio dell'allungamento x di una molla in funzione del carico m per verificare la legge di Hooke:

$$F = kx \implies x = \frac{g}{k}m,$$

dove g è l'accelerazione di gravità e k la costante di forza della molla.

Verifico la relazione misurando l'allungamento x per diversi carichi m.

Tabella 2.3. **Carico e allungamento**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Carico $m$ (gm) ($\delta m$ trascurabile) | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
| Allungamento $x$ (cm) ($\delta x = 0.3$) | 1.1 | 1.5 | 1.9 | 2.8 | 3.4 | 3.5 | 4.6 | 5.4 |

# Verifica della proporzionalità con un grafico

Molte leggi fisiche predicono la **proporzionalità tra due grandezze**.

Studio dell'allungamento x di una molla in funzione del carico m per verificare la legge di Hooke:

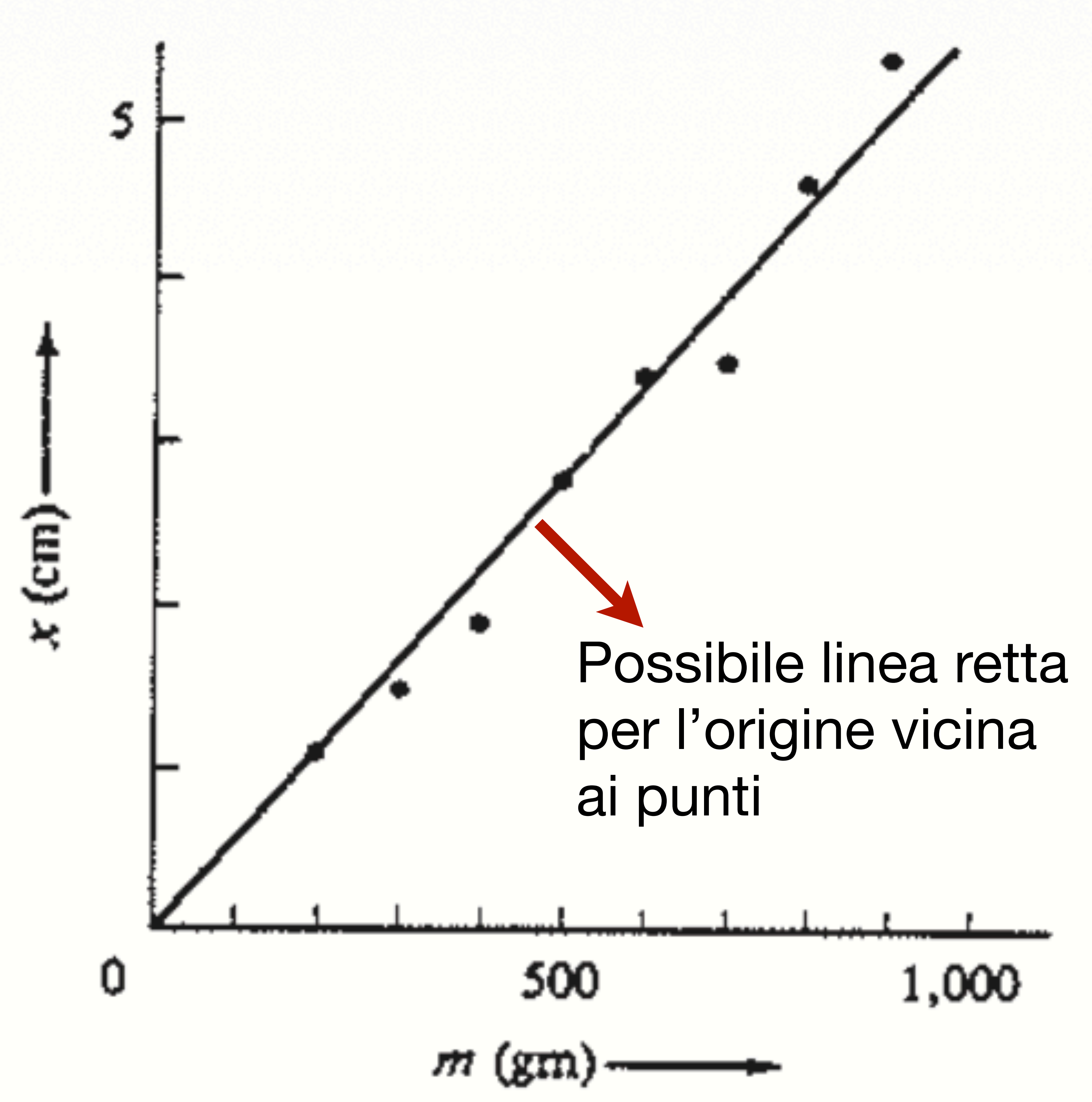
$$F = kx \implies x = \frac{g}{k}m,$$

dove g è l'accelerazione di gravità e k la costante di forza della molla.

Verifico la relazione misurando l'allungamento x per diversi carichi m.

**Tabella 2.3. Carico e allungamento**

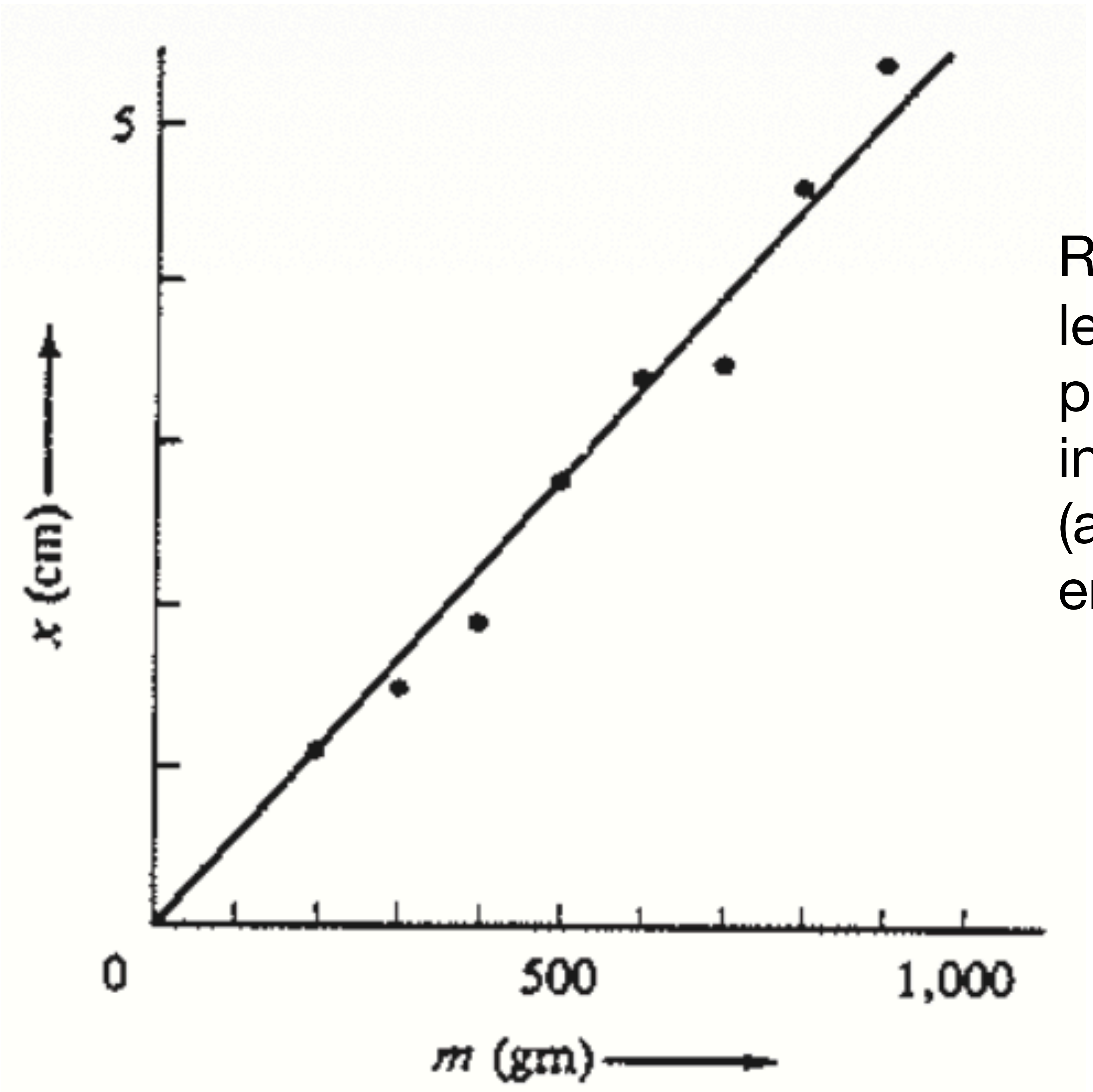
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Carico $m$ (gm) ($\delta m$ trascurabile) | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
| Allungamento $x$ (cm) ($\delta x = 0.3$) | 1.1 | 1.5 | 1.9 | 2.8 | 3.4 | 3.5 | 4.6 | 5.4 |



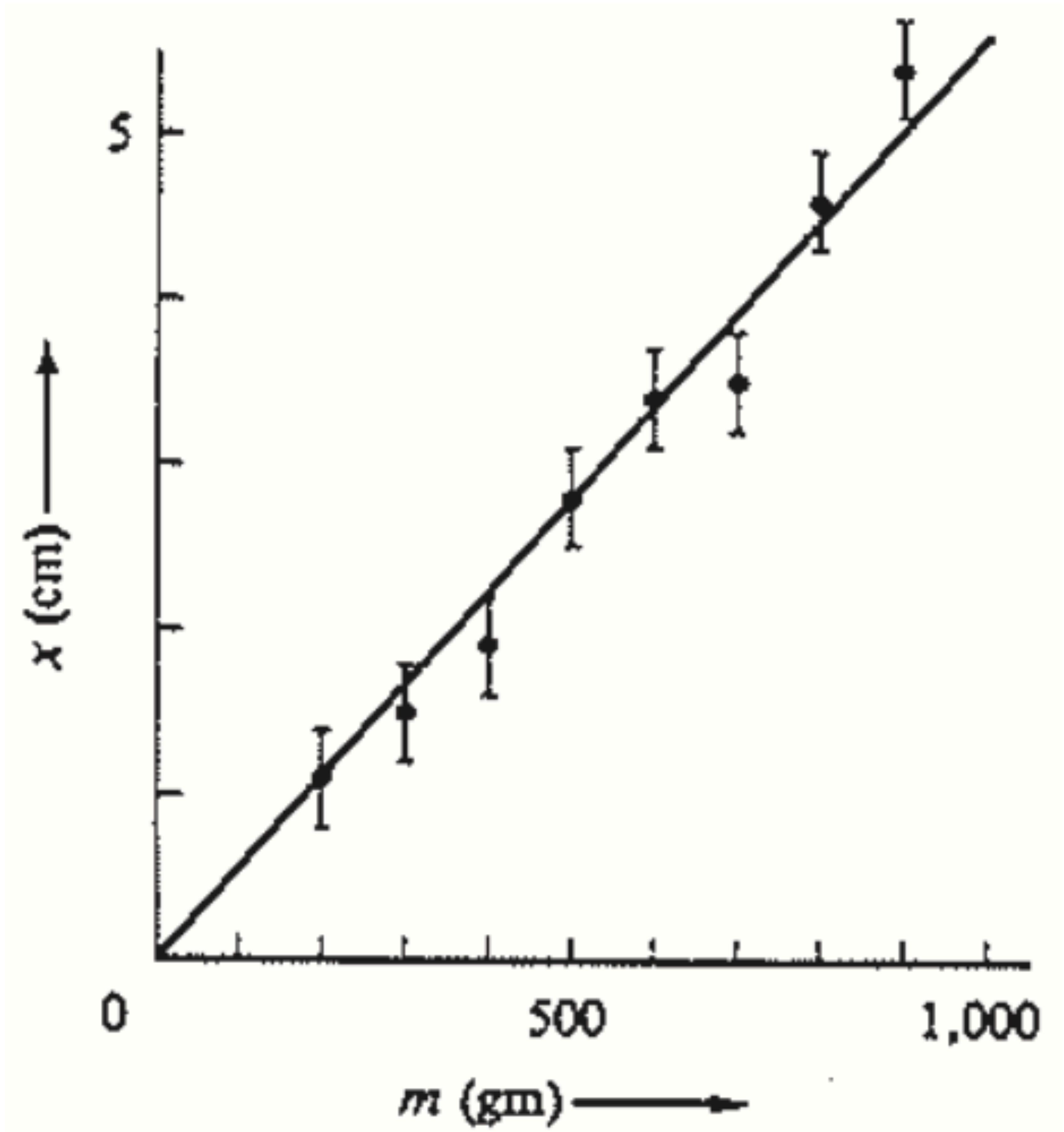
# Verifica della proporzionalità con un grafico

Molte leggi fisiche predicono la **proporzionalità tra due grandezze**.

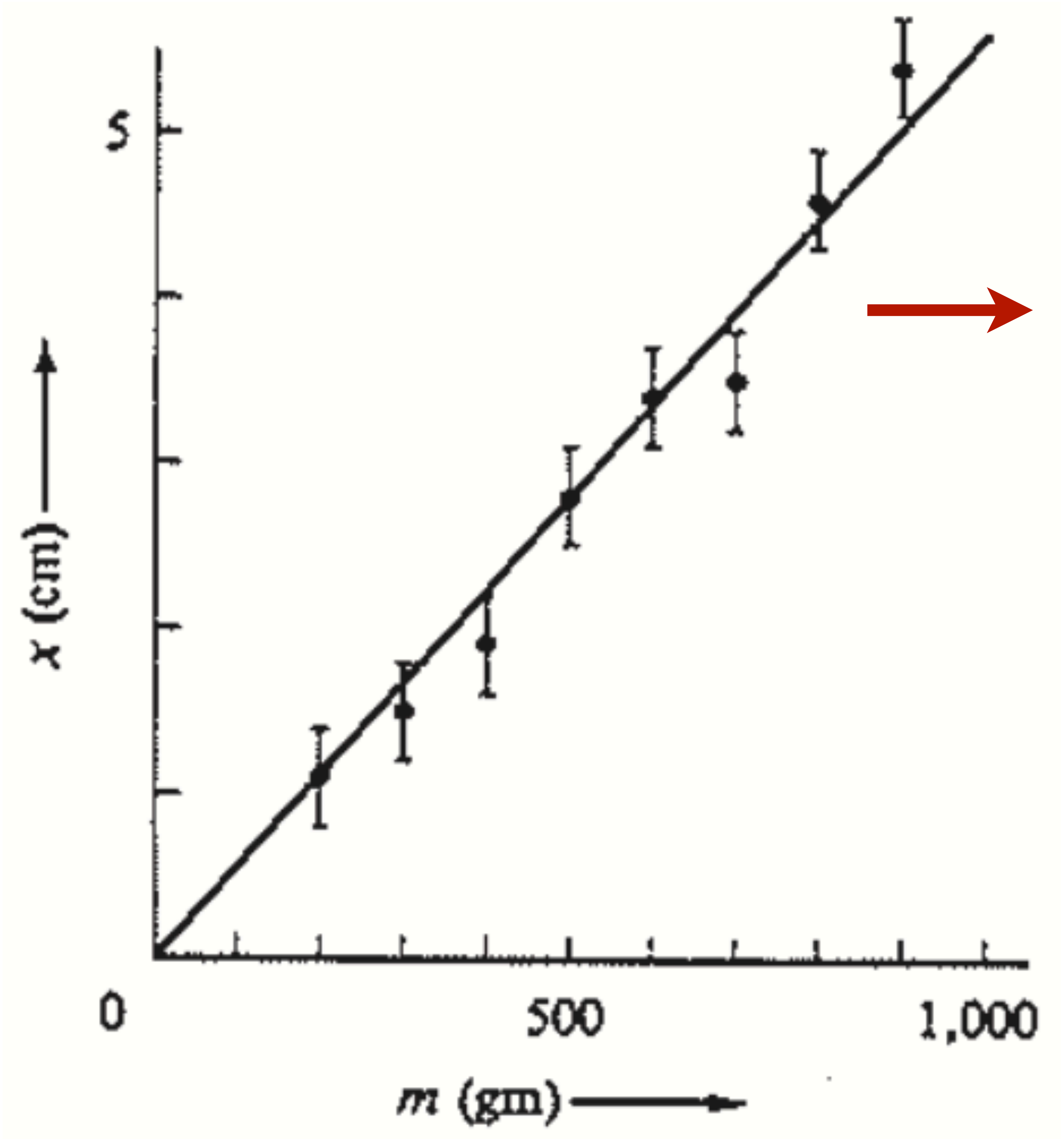
Non tutti i punti giacciono sulla retta: ciò è dovuto agli errori sperimentali oppure al fatto che la relazione in alcuni casi non è verificata?



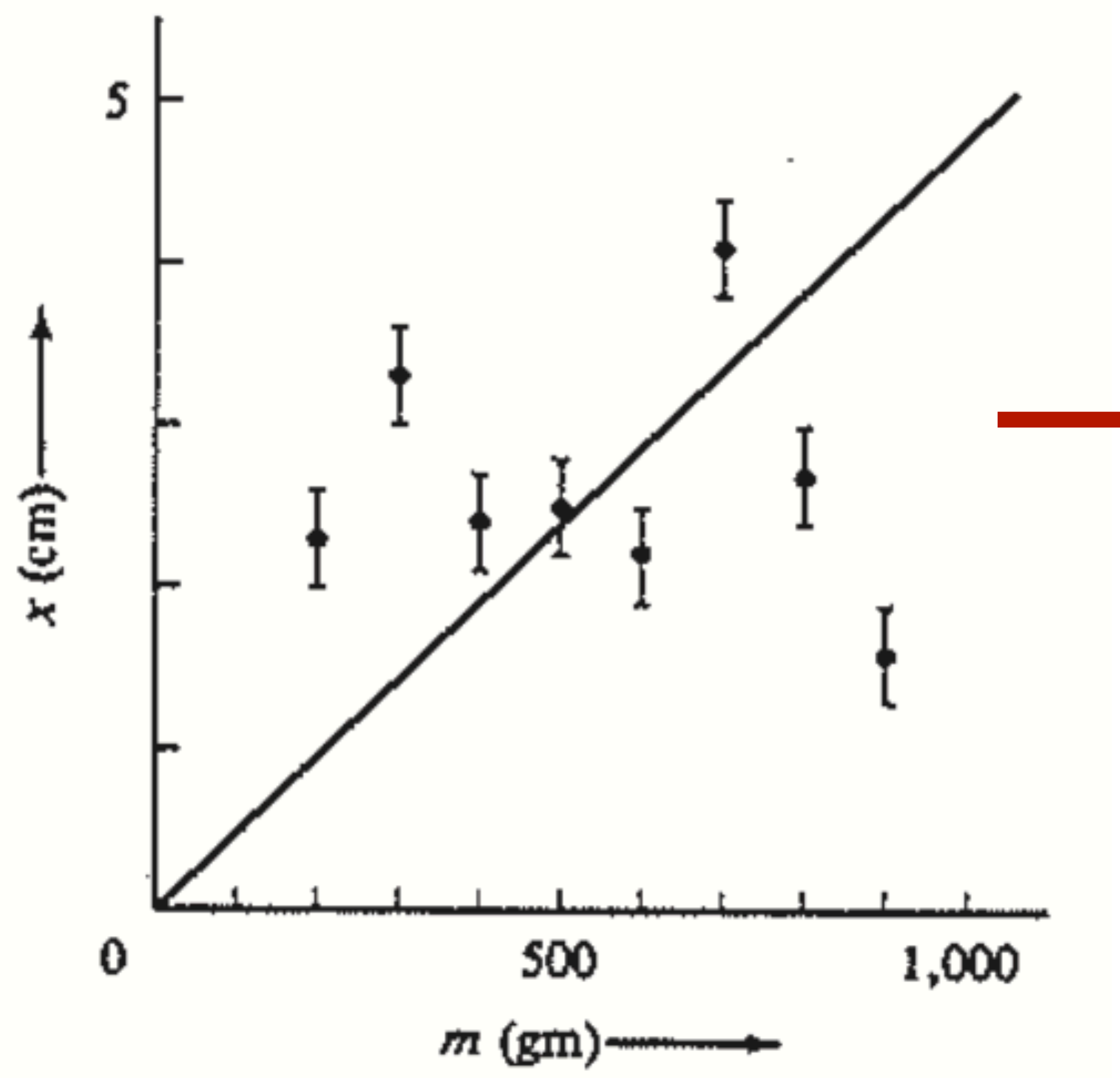

Rappresento le **barre d'errore** per mostrare le incertezze in x (assumo per m errori trascurabili)



# Verifica della proporzionalità con un grafico

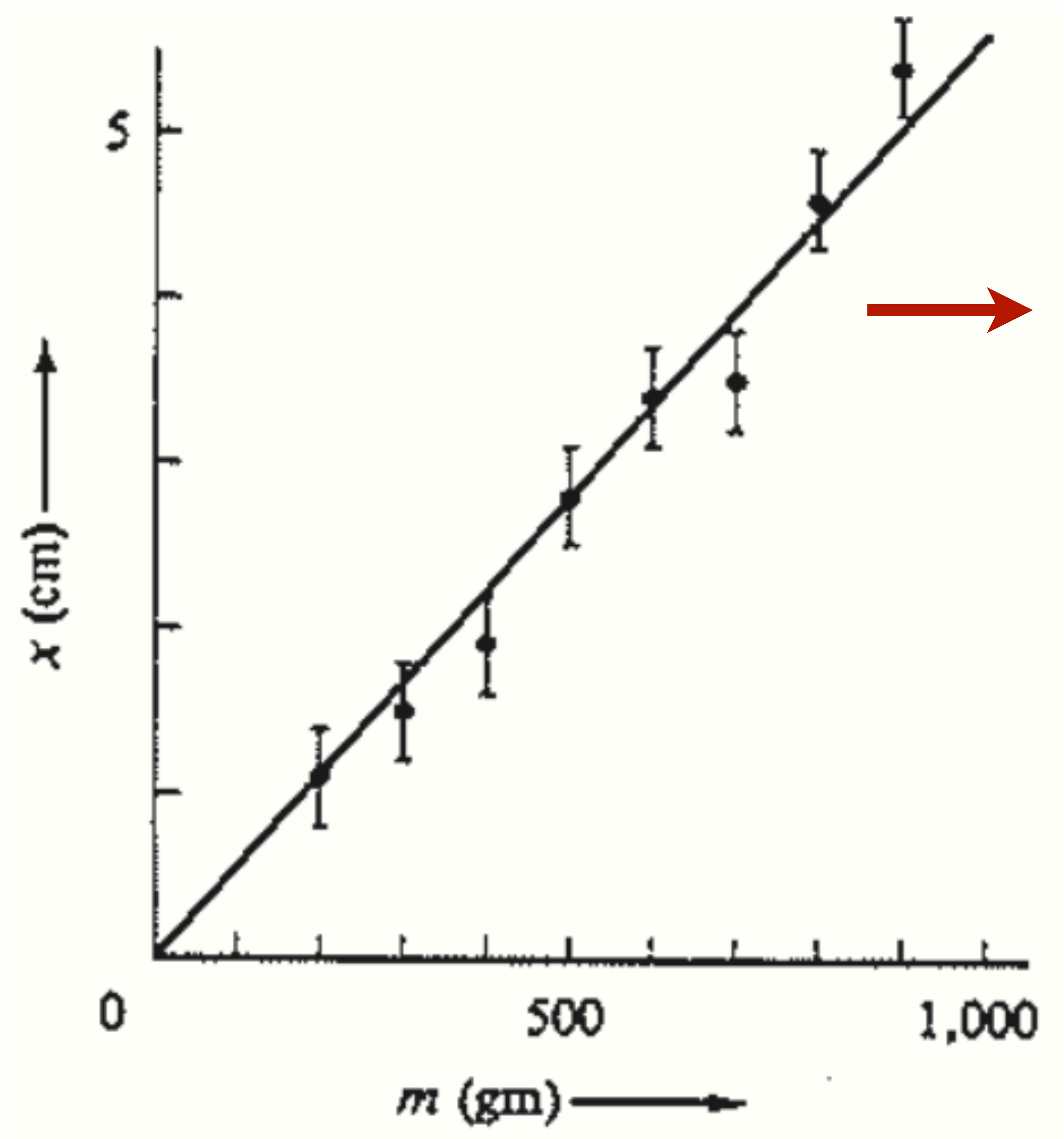



La **pendenza** della linea fornisce g/k e consente di trovare **k**.




Esempio di dataset con risultati inconsistenti con l'ipotesi di proporzionalità.

# Verifica della proporzionalità con un grafico




La **pendenza** della linea fornisce g/k e consente di trovare **k**.

**Come visualizzo approssimativamente l'errore su k?**
Disegno sul grafico la linea più ripida e quella meno pendente tra le rette che sembrano attraversare i dati ragionevolmente bene e passare per l'origine.

**Molte relazioni tra grandezze non sono lineari**

Es. moto uniformemente accelerato $x = (x_0 + v_0 t) + 1/2 g t^2$

— studio $x$ VS $t^2$ ?

— uso carta log-log?