Riassunto:

Data trasf. coord. $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$ e

sua inversa $\tilde{x}_j = \tilde{w}_j(x, t)$,

qta è CANONICA se $\forall H(x,t)$, $\exists K(\tilde{x}, t)$ t.c.

se $x(t)$ soddisfa $\dot{x} = E \nabla_x H$, allora

$\tilde{x}(t) = \tilde{w}(x(t), t)$ soddisfa $\dot{\tilde{x}} = E \nabla_{\tilde{x}} K$

Qto avviene qndo $\exists K$ t.c.

$$E \nabla_{\tilde{x}} K = \tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \qquad \text{dove } \tilde{J}_{ij} = \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_j}$$

Qto $K(\tilde{x}, t)$ prende la forma

$$K = c\tilde{H} + K_0$$

con c cost., $\tilde{H} = H \circ w$, K_0 Ham. coniugata a $H = 0$.

Come si fa a capire se una trasf. è canonica (senza applicare la def.)?

$\downarrow$

CRITERI di CANONICITÀ

Possiamo ora dimostrare il primo CRITERIO di CANONICITÀ:

Prop. La trasf. di coordinate $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$

è CANONICA $\iff$ $\exists\, c \neq 0$ t.c. $c\, J E J^T = E$

con $J_{ij} = \dfrac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$

Dim. $\Rightarrow$: se è canonica, possiamo seguire dim. di prop. (*) lezione precedente e concludere che $\exists\, c \neq 0$ t.c.

$-c\tilde{J} E \tilde{J}^T E = \mathbb{1}_{2n}$, ovvero $c\tilde{J} E \tilde{J}^T = E$;

moltiplichiamo a sinistra per J e a destra per J^T e usiamo $J\tilde{J} = \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ $J E J^T = c E$ //

$\Leftarrow$: (più interessante perché ci dà un criterio di canonicità)

Dobbiamo dim. che se $\exists\, c$ t.c. $c J E J^T = E$ allora $\forall H$ $\exists K$ t.c. $E \nabla_{\tilde{x}} K = \tilde{J} E \nabla_x H + \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$ (*)

equiv. a $c\tilde{J} E \tilde{J}^T = E$

Come abbiamo già visto: $\nabla_x H = \tilde{J}^T \tilde{J}^{-T} \nabla_x H = \tilde{J}^T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}$

dove abbiamo usato $(\nabla_{\tilde{x}} \tilde{H})_i = \sum_j \dfrac{\partial w_j}{\partial \tilde{x}_i} \dfrac{\partial H}{\partial x_j}$.

$$\Rightarrow \quad \tilde{J} E \nabla_x H = \tilde{J} E \tilde{J}^T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} = E \nabla_{\tilde{x}} (c\tilde{H})$$

Se $\exists\, K_0$ t.c. $E \nabla_{\tilde{x}} K_0 = \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$, allora $\exists\, K$ che soddisfa (*) e cioè $K = c\tilde{H} + K_0$.

Qto è vero grazie a lemmi 2 e 3 (vedi fine precedente lezione):

$\exists k_0$ s.t. $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = E \nabla_{\tilde{x}} k_0 \underset{\text{Lemma 3}}{\iff} \Lambda \equiv \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(w(\tilde{x},t),t)\right)$ è t.c. $\Lambda^T E + E\Lambda = 0$

$$\Lambda_{ij} = \sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial^2 \tilde{w}_i}{\partial t \, \partial x_l} \frac{\partial w_l}{\partial \tilde{x}_j} = \left(\frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \cdot \tilde{J}^{-1}\right)_{ij}$$ che soddisfa per Lemma 2. //

Data una trasf. canonica che soddisfa

$$c \, J' E J'^T = E \qquad (A) \qquad J' = \frac{\partial w'}{\partial \tilde{x}}$$

riusciamo sempre a trovare una trasf. canonica che soddisfa

$$J E J^T = E \qquad (B) \qquad J = \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}$$

Infatti, la composizione di trasf. canoniche è una trasformaz. canonica.

- c è in genere una funz. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $t \mapsto c(t)$; essa è <u>sempre</u> $\neq 0$ (perché $c^n = |\det J'| \neq 0$ $\forall t$ per trasf. ben definita).

  $\Rightarrow c(t)$ è def. positiva o def. negativa.

- Possiamo quindi comporre la trasf. canonica (A) con $p'' = \alpha p'$ $\quad q'' = \beta q'$ $\quad \alpha = \beta = \sqrt{|c|}$ $\quad \bar{x} = \sqrt{|c|}\, \bar{x}'$

$$\Rightarrow \bar{w}''(\tilde{x},t) = \sqrt{|c|}\, \bar{w}'(\tilde{x},t)$$

$$J''_{ij} = \frac{\partial w''_i}{\partial \tilde{x}_j} = \sqrt{|c|} \frac{\partial w'_i}{\partial \tilde{x}_j} = \sqrt{|c|}\, J'_{ij}$$

$$\Rightarrow J'' E J''^T = |c| J' E J'^T = (\operatorname{sgn} c)\, c\, J' E J'^T = (\operatorname{sgn} c) E$$

- Se $c > 0$ la composizione $w''(\tilde{x}, t)$ soddisfa
$$J'' E J''^T = E \qquad (\text{cioè la sua } c = 1)$$

- Se $c < 0$, allora
$$J'' E J''^T = -E$$

possiamo comporre $\overline{w}''$ con la trasf. canonica

$$\overline{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{III} \; I} \overline{x}'' \quad \rightsquigarrow \quad w_i(\tilde{x}, t) = \sum_k I_{ik} w''_k(\tilde{x}, t)$$

$$\rightarrow \quad J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_k I_{ik} \frac{\partial w''_k}{\partial \tilde{x}_j} = (I J'')_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad J E J^T = I J'' E J''^T I = -I E I = E$$

↳ Riusciamo sempre a comporre una data generica trasf. canonica con particolari trasf. canoniche in modo che la composizione sia una trasf. can. con $c = 1$.

→ Possiamo quindi restringerci al caso $c = 1$ e ottenere tutte le trasf. canoniche (con c generico) attraverso la composizione detta.

Se $c = 1$, la trasformaz. è detta **TRASF. CANONICA UNIVALENTE**.

Le trasf. di coord. t.c. lo Jacobiano J soddisfa $J E J^T = E$ sono dette **TRASFORMAZIONI SIMPLETTICHE**, le matrici A t.c. $A E A^T = E$ sono dette **MATRICI SIMPLETTICHE**

$A \in Sp(2n)$

[Le matrici ORTOGONALI sono t.c. $O O^T = \mathbb{1}$, cioè $O \mathbb{1} O^T = \mathbb{1}$. $O \in SO(n)$]

ESEMPIO.

Riprendiamo la trasformazione 3) tra gli esempi dati in precedenza e applichiamola a sistemi a $n=1$ grado di lib.

$$\begin{cases} p = \tilde{p} \\ q = \tilde{q} + \alpha t \tilde{p} \end{cases} \xrightarrow[\text{completo}]{\text{in formalismo}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 + \alpha t \tilde{x}_1 \end{pmatrix}}_{w(\tilde{x})}$$

$$K(\hat{p}, \hat{q}, t) = H(\tilde{p}, \tilde{q} + \alpha t \hat{p}, t) - \frac{\alpha}{2}\tilde{p}^2 \rightarrow K_0 = -\frac{\alpha}{2}\tilde{p}^2$$

1) Verifichiamo che è canonica; $\quad J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha t & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{J} = J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha t & 1 \end{pmatrix}$$

$$J E J^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\alpha t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E \Rightarrow \text{trasf. è canonica (univalente)} \Rightarrow c = 1$$

2) Troviamo K_0. K_0 è t.c. $E \nabla_{\tilde{x}} K_0 = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$, cioè

$$\nabla_{\tilde{x}} K_0(\tilde{x}, t) = -E \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(w(\tilde{x}, t), t)$$

Sappiamo che $\tilde{w}_i(w(\tilde{x}, t), t) = \tilde{x}_i$; applichiamo $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow$

$$\rightarrow \sum_j \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_j}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -\tilde{J}\frac{\partial w}{\partial t}$$

Qui abbiamo $\frac{\partial w}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \tilde{x}_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \tilde{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \tilde{x}_1 \end{pmatrix}$

Qndi K_0 è soluz. di eq.

$$\nabla_{\tilde{x}} K_0 = - E \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \tilde{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \tilde{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè $\begin{cases} \frac{\partial K_0}{\partial \tilde{x}_1} = -\alpha \tilde{x}_1 & \longrightarrow \quad K_0 = -\alpha \frac{\tilde{x}_1^2}{2} \\ \frac{\partial K_0}{\partial \tilde{x}_2} = 0 & \to \quad K_0 \text{ è funz. solo di } \tilde{x}_1 \end{cases}$

Qndi, la trasf. è canonica con $c = 1$ e $K_0 = -\frac{\alpha \tilde{x}_1^2}{2}$

$$\Rightarrow K(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = c\, H(\tilde{p}, \tilde{q} + \alpha t \tilde{p}, t) - \frac{\alpha}{2} \tilde{p}^2$$

cioè qnto riportato nell' ES 3).

TRASF. CANONICHE E PARENTESI DI POISSON

Ricordiamo:

$$\{f,g\} = \sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\ell}\frac{\partial g}{\partial p_\ell} - \frac{\partial f}{\partial p_\ell}\frac{\partial g}{\partial q_\ell}\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

P. di P. fondamentali : $\{x_i, x_j\} = E_{ij}$

Def. Una trasf. di coord. $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$ PRESERVA LE PAR. DI POISSON se $\forall f(\bar{x},t), g(\bar{x},t)$ e indicando $F(\tilde{x},t) = f(\bar{w}(\tilde{x},t),t)$ e $G(\tilde{x},t) = g(\bar{w}(\tilde{x},t),t)$, si ha

$$\{f,g\}(\bar{w}(\tilde{x},t),t) = \{F,G\}(\tilde{x},t)$$

Prop. Tutte le parentesi di Poisson sono preservate SE E SOLO SE sono preservate le parentesi di Poisson fondamentali cioè se

$$\{w_i, w_j\} = E_{ij}$$

ovvero
$$\{u_h, u_k\} = 0$$
$$\{v_h, v_k\} = 0$$
$$\{u_h, v_k\} = -\delta_{hk}$$

Dim. $$\{F,G\} = \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_{i,j}\left(\sum_m \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_i}\right) E_{ij} \left(\sum_\ell \frac{\partial g}{\partial x_\ell}\frac{\partial w_\ell}{\partial \tilde{x}_j}\right)$$

$$= \sum_{m,\ell} \frac{\partial f}{\partial x_m} \underbrace{\left(\sum_{i,j} \frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial w_\ell}{\partial \tilde{x}_j}\right)}_{\{w_m, w_\ell\}} \frac{\partial g}{\partial x_\ell}$$

Se le parentesi di Poisson fondam. sono preservate allora $\{w_m, w_l\} = E_{ml}$

e allora $$\{F, G\} = \sum_{m\,l} \frac{\partial f}{\partial x_m} E_{ml} \frac{\partial g}{\partial x_l} = \{f, g\}.$$

L'altro verso dell'implicazione (se p.P. son pres. $\Rightarrow$ p.P. fond. son pres.) è ovvio. //

<u>Prop.</u> La trasf. di coord. $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$ preserva le par. di Poisson SE E SOLO SE $J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$ è una MATRICE SIMPLETTICA $(2n \times 2n)$, cioè $J E J^T = E$

<u>Dim.</u> $$\{w_k, w_l\} = \sum_{i,j} \frac{\partial w_k}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial w_l}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_{i,j} J_{ki} E_{ij} J_{lj} =$$

$$= \sum_{i,j} J_{ki} E_{ij} (J^T)_{jl} = (J E J^T)_{kl}$$

sono preservate se e solo se $= E_{kl}$, cioè se e solo se $(J E J^T)_{kl} = E_{kl}$. //

$\Downarrow$

<u>Prop.</u> La trasf. di coord. $x = \bar{w}(\tilde{x}, t)$ è una TRASF. CANONICA UNIVALENTE se e solo se preserva le parentesi di Poisson.

In gen. $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$ è CANONICA se e solo se $c\{w_i, w_j\} = \{\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\} = E_{ij} \quad \forall i,j$.

Osservazione :

Come visto precedentemente, data trasf. di coordinate

$x = w(\tilde{x}, t)$ e inversa $\tilde{x} = \tilde{w}(x, t)$

se $\dot{x}_i = \sum_j E_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \{x, H\}$

allora $\dot{\tilde{x}}_i = \sum_{lj} \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_l} E_{lj} \frac{\partial H}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} = \left(\{\tilde{w}_i, H\} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t}\right) \circ \bar{w}(\tilde{x}, t)$

qto non stupisce, perché $\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$ se f valutata su soluz. eq. di Hamilton

Quindi la condizione di CANONICITA' può essere riscritta nel seguente modo: trasf. è canonica se $\forall H$ $\exists K$ t.c. $(c=1)$

$$\{\tilde{x}_i, K\}(\tilde{x}, t) = \underbrace{\{\tilde{w}_i, H\}(\bar{w}(\tilde{x}, t), t)}_{\{\tilde{x}_i, \tilde{H}\} \text{ se si preservano par. Poisson}} + \underbrace{\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t}(\bar{w}(\tilde{x}, t), t)}_{\{\tilde{x}_i, K_0\} \text{ se } \tilde{J} \text{ simpl.}} \qquad (*)$$

(vedi lezione 22)

Quindi si vede velocem. che se le P. di P. sono preservate ($\Leftrightarrow J$ simp.) allora trasf. è canonica, perché esiste $K = \tilde{H} + K_0$ t.c. $(*)$ è soddisfatta.

TRASF. PUNTUALI ESTESE sono le trasf. di coordinate ammesse nel sistema Lagrangiano equivalente

Dato sist. Lagr. posso fare camb. coord.

$$\begin{cases} q_h = v_h(\tilde{q}, t) \\ \dot{q}_k = \sum_\ell \frac{\partial v_k}{\partial \tilde{q}_\ell} \dot{\tilde{q}}_\ell + \frac{\partial v_k}{\partial t} \end{cases}$$

$$p_k(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q}, t)$$

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial v_h}{\partial \tilde{q}_r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial q_k} = \delta_{hk} \Rightarrow \frac{\partial v_s}{\partial \dot{q}_m}$$

$$\tilde{p}_m(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_m} = \sum_s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial v_s}{\partial q_m} = \sum_s p_s \frac{\partial v_s}{\partial \tilde{q}_m} =$$

$$\Rightarrow \sum_m \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_\ell} \tilde{p}_m = \sum_{s,m} p_s \frac{\partial v_s}{\partial \tilde{q}_m} \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_\ell} = \sum_s p_s \delta_{s\ell} = p_\ell$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_h = v_h(\tilde{q}, t) \\ p_h = \sum_m \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_h} \tilde{p}_m \end{cases}$$

Partiamo da sist. Lag con $L(q, \dot{q}, t)$, andiamo a sist. Ham con $H(p, q, t)$. Facciamo trasf. canonica che NON sia trasf. punt. estesa. Ritorniamo a un sist. Lag. (se esiste) ma otteniamo descriz. Lag. duale.

Complemento: TRASFORMAZIONI PUNTUALI ESTESE SONO CANONICHE

Trasf. puntuali estese sono date da

$$q_h = v_h(\tilde{q},t)$$
$$p_k = \sum_l \tilde{p}_l \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial q_k}(v(\tilde{q},t),t)$$

$\leftarrow$ trasf. inversa $\tilde{q}_r = \tilde{v}_r(q,t)$

$v_h(\tilde{v}(q,t),t) = q_h$

$\tilde{v}_m(v(\tilde{q},t),t) = \tilde{q}_m$

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial v_h}{\partial \tilde{q}_s} \frac{\partial \tilde{v}_s}{\partial q_k} = \delta_{hk}$$

Prop. Le trasf. puntuali estese sono CANONICHE

Dim. Dimostriamo che preservano le parentesi di Poisson fondamentali.

$$\{q_h, q_k\} = \{v_h(\tilde{q}), v_k(\tilde{q})\} = 0$$

$$\{q_h, p_k\} = \Big\{v_h(\tilde{q}), \sum_l \tilde{p}_l \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial q_k}\Big\} = \sum_l \{v_h(\tilde{q}), \tilde{p}_l\} \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial q_k} =$$

$$= \sum_l \frac{\partial v_h}{\partial \tilde{q}_l} \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial q_k} = \delta_{hk}$$

$$\{p_h, p_k\} = \Big\{\sum_l \tilde{p}_l \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial q_h}, \sum_m \tilde{p}_m \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k}\Big\} =$$

$$= \sum_{lm}\Big[\tilde{p}_l \Big\{\frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial q_h}, \tilde{p}_m\Big\}\frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k} + \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial q_h}\Big\{\tilde{p}_l, \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k}\Big\}\tilde{p}_m\Big]$$

$$= \sum_{lm} \tilde{p}_l \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_l}{\partial \tilde{q}_m \partial q_h}\right)\frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k} - (h \leftrightarrow k) =$$

$$= \sum_{lms} \tilde{p}_l \frac{\partial^2 \tilde{v}_l}{\partial q_s \partial q_h} \underbrace{\frac{\partial v_s}{\partial \tilde{q}_m}\frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial q_k}}_{\delta_{sk}} - (h \leftrightarrow k)$$

$$= \sum_{ls} \tilde{p}_l \frac{\partial^2 \tilde{v}_l}{\partial q_s \partial q_h}\delta_{sk} - (h \leftrightarrow k) = \sum_l \tilde{p}_l \underbrace{\frac{\partial^2 \tilde{v}_l}{\partial q_k \partial q_h}}_{\text{sim. in } (h \leftrightarrow k)} - (h \leftrightarrow k) = 0$$