FLUSSO HAMILTONIANO come trasf. canonica

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) = E \bar{\nabla}_{\bar{x}} H$$

$\downarrow$

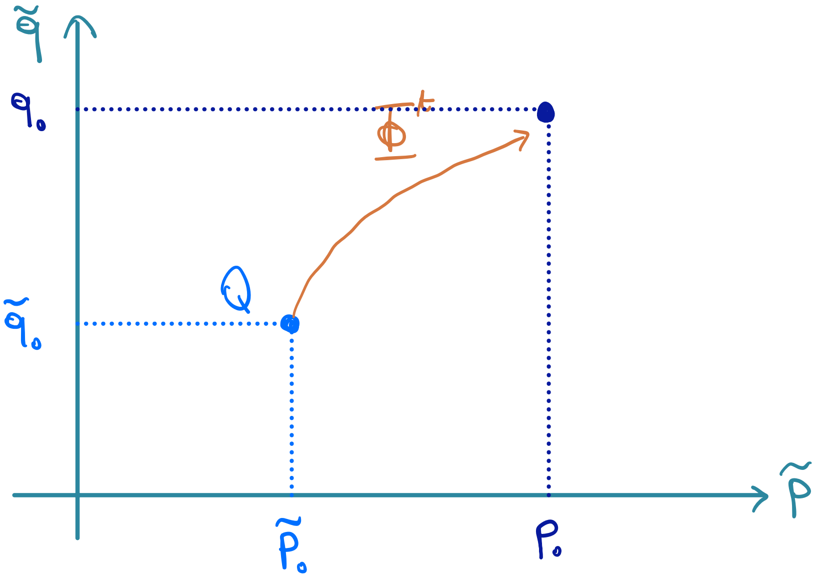
soluzione $\bar{x} = \bar{x}(t; \bar{x}_0)$: questo definisce una famiglia (al variare di t) di mappe nello spazio delle fasi, detto FLUSSO HAMILTONIANO

$$\Phi^t : T^*Q \to T^*Q$$

$$\bar{x}_0 \mapsto \Phi^t(\bar{x}_0) = \bar{x}(t; \bar{x}_0)$$

Tale mappa è una funzione da $\mathbb{R}^{2n}$ a $\mathbb{R}^{2n}$ invertibile e quindi può essere usata per definire una trasf. di coordinate.

ES. $n=1$ $\quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}$



- Ho due sistemi di coord. $x=(p, q)$ e $\tilde{x}=(\tilde{p}, \tilde{q})$ che sono legati dalla trasf. $x = \Phi^t(\tilde{x})$.

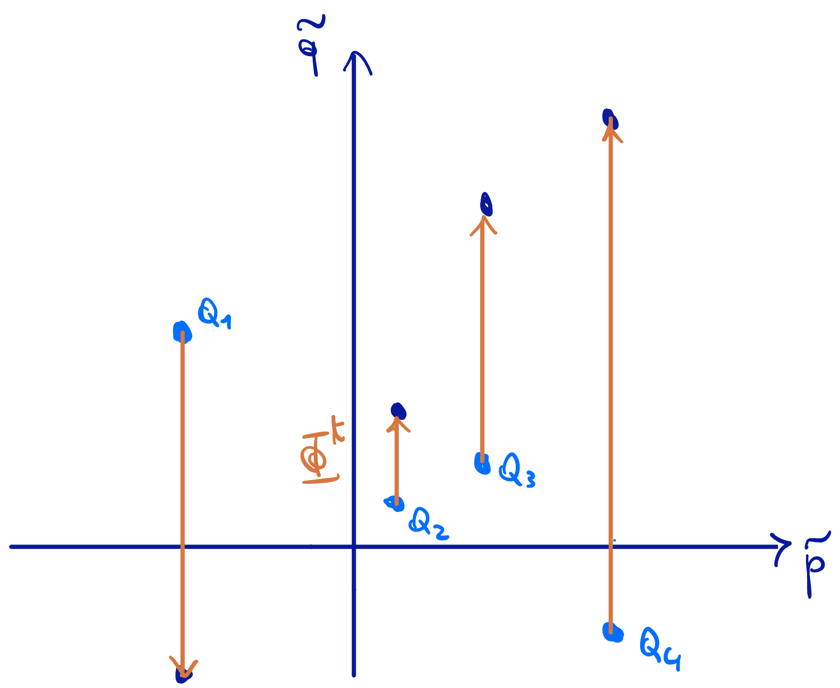
- Il pto Q può essere individuato in due modi, da due coppie di numeri $(\tilde{p}_0, \tilde{q}_0)$ o (p_0, q_0) a seconda del sist. di coord scelto.

- Un sist. di coord è una serie di regole che dati due numeri mi permette di individuare un pto.

- Nel nostro caso:
  - s.d.c. $(\tilde{p},\tilde{q})$: i numeri $(\tilde{p}_0,\tilde{q}_0)$ sono le coord. cartesiane del pto Q.
  - s.d.c. (p,q): i numeri (p_0,q_0) sono le coord. cartesiane del pto $Q'=\Phi^t(Q)$; la regola per individuare Q è la seguente:
    - dati (p_0,q_0) individuo pto Q', poi vedo che moto soluz. di eq. Ham. passa per (p_0,q_0) e torno indietro di tempo t.

Esempio: $H=\frac{p^2}{2}$ (particella libera, $m=1$)

$$\Phi^t(x)=\begin{pmatrix}\tilde{p}\\ \tilde{q}+\tilde{p}t\end{pmatrix}$$



Pto	$\tilde{p},\tilde{q}$	p,q
Q_1	$(-4,5)$	$(-4,-3)$
Q_2	$(1,1)$	$(1,3)$
Q_3	$(3,2)$	$(3,8)$
Q_4	$(6,-2)$	$(6,10)$

$t=2$

Prop. Consideriamo un sistema Hamiltoniano con Hamiltoniana H e prendiamo la trasf. di coord. $\bar{w}(\tilde{x},t) \equiv \Phi^t(\tilde{x})$

Tale trasf. di coord. è CANONICA (*) $\forall t$.

[Nota: deriviamo $w(\tilde{x},t)$ risp. a t a $\tilde{x}$ cost:

$$\frac{\partial w(\tilde{x},t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Phi^t(\tilde{x}) = \frac{d}{dt}\underset{\uparrow}{x(t;\tilde{x})} = \dot{x} = E\nabla_x H \ .]$$

soluz. eq. Ham. con dato iniz. $\tilde{x}$

Dim. Dimostreremo che J è una matrice simplettica, dove

$$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial \Phi^t_i}{\partial \tilde{x}_j}(\tilde{x}) .$$

In particolare dimostreremo che $J^T E J = E$, che equivale a $JEJ^T = E$

$$J^T E J = E \Rightarrow J^T = -E J^{-1} E \Rightarrow J E J^T = -J E E J^{-1} E = E .$$

Per prima cosa notiamo che $J^T E J = E$ per $t=0$; infatti

$$\Phi^0_i(\tilde{x}) = x_i(0;\tilde{x}) = \tilde{x}_i \Rightarrow J_{ij}\big|_{t=0} = \delta_{ij} \Rightarrow JEJ^T\big|_{t=0} = \mathbb{1} E \mathbb{1} = E .$$

Ora dimostriamo che $J^T E J$ non dip. da t, il che implica che se $J^T E J = E$ vale a $t=0$, allora vale per ogni t e quindi la trasf. $\Phi^t(\tilde{x})$ è canonica.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(J^T E J\right)_{ih} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{j,k} J_{ji} E_{jk} J_{kh}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{j,k} \frac{\partial \Phi_j^t}{\partial \tilde x_i} E_{jk} \frac{\partial \Phi_k^t}{\partial \tilde x_h}\right) =$$

$$= \sum_{j,k}\left[\frac{\partial}{\partial \tilde x_i}\underbrace{\left(\frac{\partial \Phi_j^t(\tilde x)}{\partial t}\right)}_{(\bullet)\ =\ \sum_l E_{jl}\frac{\partial H}{\partial x_l}} E_{jk}\frac{\partial x_k}{\partial \tilde x_h} + \frac{\partial x_j}{\partial \tilde x_i} E_{jk}\frac{\partial}{\partial \tilde x_h}\underbrace{\left(\frac{\partial \Phi_k^t(\tilde x)}{\partial t}\right)}_{(\bullet)\ =\ \sum_m E_{km}\frac{\partial H}{\partial x_m}}\right] =$$

$\leftarrow$ $x_j(t,\tilde x)$ soddisfa le eq. di Hamilton con Hamiltoniana H

$$= \sum_{j,k,l} E_{jl}\frac{\partial}{\partial \tilde x_i}\left(\frac{\partial H(w(\tilde x,t),t)}{\partial x_l}\right)E_{jk}\frac{\partial \Phi_k^t}{\partial \tilde x_h} + \sum_{j,k,m}\frac{\partial \Phi_j^t}{\partial \tilde x_i}E_{jk}E_{km}\frac{\partial}{\partial \tilde x_h}\left(\frac{\partial H}{\partial x_m}\right) =$$

$$= \sum_{j,k,l,a} \underbrace{E_{jl}}_{=-E_{lj}} \frac{\partial^2 H}{\partial x_a \partial x_l}\underbrace{\frac{\partial w_a}{\partial \tilde x_i}}_{=J^T_{ia}} E_{jk}\underbrace{\frac{\partial w_k}{\partial \tilde x_h}}_{=J_{kh}} + \sum_{j,k,m,b}\underbrace{\frac{\partial w_j}{\partial \tilde x_i}}_{=J^T_{ij}} E_{jk}E_{km}\frac{\partial^2 H}{\partial x_b\partial x_m}\underbrace{\frac{\partial w_b}{\partial \tilde x_h}}_{=J_{bh}} =$$

$$= -\sum_{j,k,l,a} J^T_{ia}(\partial^2 H)_{al} E_{lj}E_{jk}J_{kh} + \sum_{j,k,m,b} J^T_{ij}E_{jk}E_{km}(\partial^2 H)_{mb}J_{bh}$$

$$= -\left(J^T\partial^2 H\, E^2 J\right)_{ih} + \left(J^T E^2\, \partial^2 H\, J\right)_{ih} \qquad E^2 = -\mathbb{1}$$

$$= \left(J^T\partial^2 H\, J\right)_{ih} - \left(J^T \partial^2 H\, J\right)_{ih} = 0$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t}\left(J^TEJ\right) = 0 \Rightarrow J^TEJ$ non dip. da t

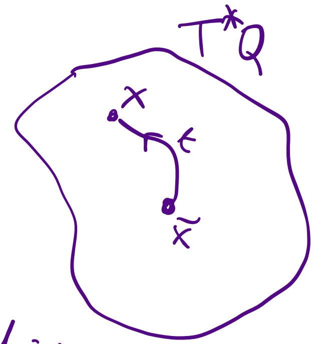
Siccome $J^TEJ\big|_{t=0} = E \Rightarrow J^TEJ = E \quad \forall t$ //

⊛ In che senso una mappa che prende un pto in T^*Q e lo manda in un altro pto di T^*Q è una TRASFORMAZIONE DI COORDINATE ?

Fissiamo t, e consideriamo

$$x = \Phi_t(\tilde{x})$$

x è l'evoluto al tempo t di $\tilde{x}$

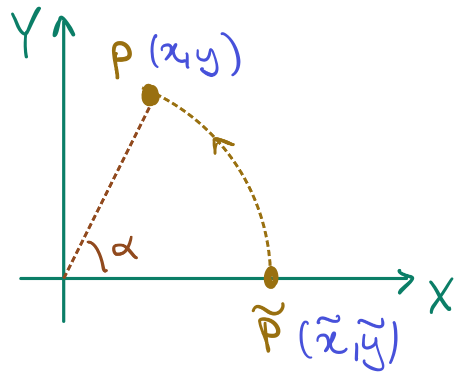


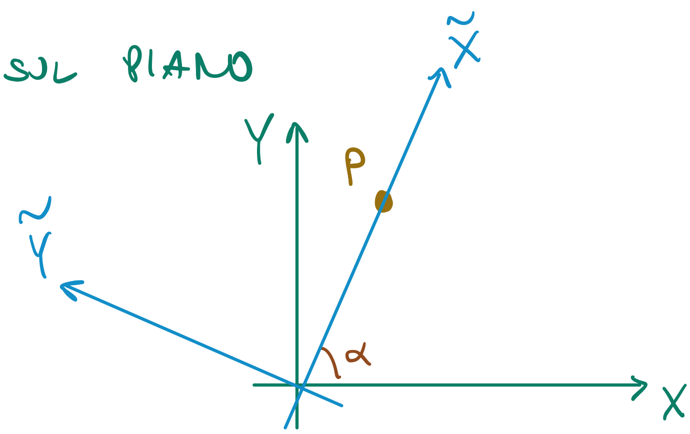
Posso allora interpretare $x, \tilde{x}$ in due modi:

1) x e $\tilde{x}$ sono coord. di due pti distinti $P, \tilde{P}$ nello stesso sist. di coord.;

2) x e $\tilde{x}$ sono coord. diverse (in diversi sist. di coord.) per lo stesso pto $P \in T^*Q$ [nel secondo sist. di coord, per ottenere le coord. di P, devo prendere $P \in T^*Q$, evolverlo indietro di tempo t e leggere le coord. di tale evoluto nel vecchio sist. di coord.].

Esempio con le ROTAZIONI SUL PIANO





$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

(x,y) e $(\tilde{x},\tilde{y})$ possono essere lette in due modi:

1) come le coord. nel sist. (X,Y) di due pti $P, \tilde{P}$ distinti

2) come le coord. dello stesso pto P in due sist. di rif. (X,Y) e $(\tilde{X},\tilde{Y})$ distinti. Le nuove coord. $(\tilde{x},\tilde{y})$ possono essere ottenute ruotando il sist. di rif., oppure ruotando INDIETRO il pto e vedendo che coord. avere nel sist. (X,Y).
Per ES.: se prendo P con coord. $(x,y)=(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$, per ottenere le nuove coord. $(\tilde{x},\tilde{y})=(R,0)$ posso prendere il pto $(x,y)=(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ e applicargli la rotaz. $\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$; qto pto va in $(x,y)=(R,0)$; qte sono le nuove coord. $(\tilde{x},\tilde{y})$ di P!

Qt'ottica ci permette di pensare alle TRASFORMAZIONI CANONICHE:

1) in un senso "PASSIVO" con $\tilde{x}_i$ e x_j che individuano lo STESSO PTO in T^*Q, ma utilizzando diversi sistemi di coordinate

2) in un senso "ATTIVO" con $\tilde{x}_i$ e x_j che individuano due pti diversi di T^*Q nello stesso sist. di coord.

Qto pto di vista è particolarmente utile per famiglie a un parametro di trasf. canoniche (come il flusso Ham. o, come vedremo, le rotazioni).

Osservazione

Flusso Hamiltoniano è una trasf. canonica

$x = w(\tilde{x}, t)$ con $w(\tilde{x},t) = \Phi^t(\tilde{x}) = x(t;\tilde{x})$

soluz., con dato iniziale $\tilde{x}$, di eq. del moto

$$\dot{x}(t;\tilde{x}) = \frac{\partial \Phi^t}{\partial t}(\tilde{x}) = E\nabla_x H$$

H definisce il flusso Hamilt.

Qual è l'Hamiltoniana K coniugata all'Hamil. H?

$$E\nabla_{\tilde{x}} K = \tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -\tilde{J}\frac{\partial w}{\partial t}$$

← da $\tilde{w}_i(w(\tilde{x},t),t) = \tilde{x}_i$

$$\hookrightarrow \sum_j \underbrace{\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_j}}_{\tilde{J}_{ij}} \frac{\partial w_j}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} = 0$$

$$= \tilde{J} E \nabla_x H - \tilde{J}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \Phi^t}{\partial t} = \dot{x}(t;\tilde{x}) = E\nabla_x H$$

$$= \tilde{J} E \nabla_x H - \tilde{J} E \nabla_x H = 0 \Rightarrow \nabla_{\tilde{x}} K = 0$$

$\Rightarrow K = 0$ (a meno di una cost. irrilevante)

$\rightsquigarrow$ Il flusso Hamiltoniano generato da H, coniuga H stessa in K=0

Infatti nelle coord. $\tilde{x}$ il moto è costante ($\tilde{x}$ è dato iniziale)

Posso generare TRASFORMAZIONI CANONICHE attraverso la scelta di una funzione $\hat{H}(p,q)$:

$$\hat{H}(p,q) \longrightarrow \dot{x} = E \nabla_x \hat{H} \longrightarrow x = \Phi^t_{\hat{H}}(\tilde{x})$$

- Una volta che ho $\Phi^t_{\hat{H}}$, posso applicarla a qlsiasi sist. Ham. con Hamiltoniana H e ottenere la K coniugata (come detto sopra, se scelgo $H = \hat{H}$, allora $K = 0$).

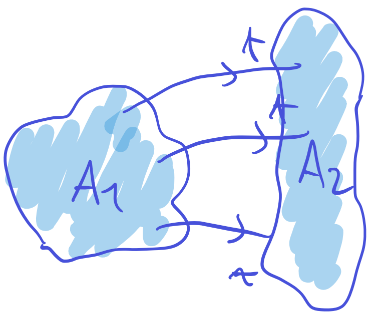
  Se $H \neq \hat{H}$, ho che l'Ham. coniugata a H soddisfa

  $$E \nabla_{\tilde{x}} K = \tilde{J} E \nabla_x H - \tilde{J} E \nabla_x \hat{H} = \tilde{J} E \nabla_x (H - \hat{H})$$

- In generale, vedremo che se ho una famiglia a un parametro di trasformazioni canoniche, posso pensarle come il flusso Hamiltoniano di una qlche Hamiltoniana H che chiamerò il GENERATORE di qle trasformazioni.

Corollario [TEOREMA DI LIOUVILLE]

Le trasformazioni canoniche univalenti ($c=1$), e tra esse il FLUSSO HAMILTONIANO preservano il volume Euclideo $dp_1 \cdots dp_n \, dq_1 \cdots dq_n$



La regione A_1 evolve nel tempo t in una regione A_2 dello sp. delle fasi T^*Q in modo t.c. $vol(A_1) = vol(A_2)$.

Dim.

$$vol(A_1) = \int_{A_1} \underbrace{dp_1 \cdots dp_n \, dq_1 \cdots dq_n}_{dx_1 \cdots dx_{2n}} =$$

$$= \int_{A_2} |\det J| \, d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_n \, d\tilde{q}_1 \cdots d\tilde{q}_n$$

siccome trasf. è canonica, $J^T E J = E \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det(E) = \det(J^T E J) = \det J^T \cdot \det E \cdot \det J$$
$$= (\det J)^2 \det E \Rightarrow (\det J)^2 = 1$$

$$= \int_{A_2} d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_n \, d\tilde{q}_1 \cdots d\tilde{q}_n = vol(A_2) \, . //$$

Osservazione: $\dot{x} = E \nabla_x H$ ← un pto singolare per questo sistema non può essere ASINTOTICAM. STABILE

Infatti se lo fosse, avremmo ciò che non si conserverebbe il volume.