

## CONDIZIONE DI LIE

Definiamo il differenziale  $d^*$ , inteso come operatore differenziale che agisca solo su  $\mathbb{R}^{2m}$  con coord.  $(p, q)$ . Si ha

$$d^* f(p, q, t) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial f}{\partial q_k} dq_k$$

Esso è legato al diff. totale usato precedentemente dalla relazione

$$df = d^* f + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Ovviamente,  $d$  e  $d^*$  coincidono su funtz. indep. esplicito.

dal tempo ( caso particolare:  $d^* p_k = dp_k$  e  $d^* q_k = dq_k$  ).

In formalismo compatto, abbiamo

$$d^* f = \sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Consideriamo ora la transf. di coord.  $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$  sullo sp. delle fasi. Per quanto definito sopra, abbiamo

$$d^* w_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j} d\tilde{x}_j = \sum_{j=1}^m J_{ij} d\tilde{x}_j$$

Def. La transf. di coord.  $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$  si dice soddisfare la **CONDIZIONE DI LIE** se  $\exists c \neq 0$  e una funzione  $G(\tilde{x}, t)$  tali che

$$c \bar{w} \cdot E d\bar{w} = \bar{x} \cdot E d\bar{x} + d^* G$$

$$\text{cioè } c \sum_{i,j} w_i E_{ij} d^* w_j = \sum_{i,j} \tilde{x}_i E_{ij} d\tilde{x}_j + d^* G$$

In coordinate  $p, q$  la condizione di lie diventa  $(E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$

$$-c \sum_h u_h d^* v_h + c \sum_h v_h d^* u_h = -\sum_h \tilde{p}_h d\tilde{q}_h + \sum_h \tilde{q}_h d\tilde{p}_h + d^* G$$

che possiamo riscrivere usando  $v_h d^* u_h = d^*(v_h u_h) - u_h d^* v_h$

$$-2c \sum_h u_h d^* v_h = -2 \sum_h \tilde{p}_h d\tilde{q}_h + d^* \underbrace{\left( G - \sum_h v_h u_h + \sum_h \tilde{q}_h \tilde{p}_h \right)}_{= -2F}$$

Cioè

$$c \sum_h u_h d^* v_h = \sum_h \tilde{p}_h d\tilde{q}_h + d^* F \quad \text{per qualche } c \neq 0 \text{ e } F$$

Negli esempi precedenti:

$$1) \quad c=1 \quad F = \bar{a} \cdot \bar{q}$$

$$2) \quad c = \frac{1}{\alpha\beta} \quad F = 0$$

$$3) \quad c=1 \quad F = \frac{1}{2} \alpha t \bar{p} \cdot \bar{p}$$

$$4) \quad c=1 \quad F = \tilde{p} \sin \tilde{q} \cos \tilde{q}$$

Osservazione:

$\bar{w}'(\tilde{x}, t)$  soddisfa la condiz. di lie con  $c = \hat{c}$

se e solo se  $\bar{w}(\tilde{x}, t) = \sqrt{\hat{c}} \bar{w}'(\tilde{x}, t)$  soddisfa

la condiz. di lie con  $c=1$ .

Dimostriamo ora un altro criterio di canonicità.

Prop. La trasf. di coord.  $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$   
soddisfa la condizione di Lie  $\Leftrightarrow$  è CANONICA.

Dim. Dimostriamo la prop. con  $c=1$ . Infatti:

$w'(\tilde{x}, t)$  soddisfa cond. Lie con  $c = \hat{c}$   $\Leftrightarrow$   $w(\tilde{x}, t) = \sqrt{\hat{c}}$   $w'(\tilde{x}, t)$  soddisfa cond. Lie con  $c=1$   $\Leftrightarrow$   $w(\tilde{x}, t)$  è trasf. canon. univalente  $\Leftrightarrow$   $w'(\tilde{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{\hat{c}}} w(\tilde{x}, t)$  è trasf. canonica.

$\uparrow$  ovvio  $\uparrow$  ovvio  $\uparrow$  ovvio

Noi dimostriamo q.b.

Conditioni di Lie ( $c=1$ ):  $\exists G(\tilde{x}, t)$  t.c.

$$\sum_{i,j} w_i E_{ij} d^* w_j = \sum_{i,j} \tilde{x}_i E_{ij} d\tilde{x}_j + d^* G$$

$$d^* w_j = \sum_{\ell=1}^m \frac{\partial w_j}{\partial \tilde{x}_\ell} d\tilde{x}_\ell = \sum_{\ell} J_{j\ell} d\tilde{x}_\ell$$

$$\sum_{i,j,\ell} w_i E_{ij} J_{j\ell} d\tilde{x}_\ell = \sum_{i,\ell} \tilde{x}_i E_{i\ell} d\tilde{x}_\ell + \sum_{\ell} \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_\ell} d\tilde{x}_\ell$$

$$\sum_{\ell} d\tilde{x}_\ell \left( \sum_{i,j} w_i E_{ij} J_{j\ell} - \sum_i \tilde{x}_i E_{i\ell} - \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_\ell} \right) = 0$$

$\Leftrightarrow$  coefficienti di  $d\tilde{x}_\ell$  sono tutti nulli, cioè  $\exists G$  t.c.

$$A_\ell(\tilde{x}, t) = \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_\ell} \quad \text{dove} \quad A_\ell(\tilde{x}, t) = \sum_{i,j} w_i E_{ij} J_{j\ell} - \sum_i \tilde{x}_i E_{i\ell}$$

cioè  $A$  è gradiente di una funzione  $G$

Qto avviene  $\Leftrightarrow$  localm.  $A$  ha rotore nullo.

[Vedi Lemma 1, lezione precedente.]

Quindi:  $x = w(\tilde{x}|t)$  soddisfa la condit. di Lie in una qlda  $G$  se e solo se ha rotore nullo, cioè

$$\frac{\partial A_e}{\partial \tilde{x}_n} - \frac{\partial A_k}{\partial \tilde{x}_e} = 0 \quad \forall l, k$$

Vediamo cosa vuol dire sulla forma di  $A$  data:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_n} \left( \sum_{ij} w_i E_{ij} J_{je} - \sum_i \tilde{x}_i E_{ie} \right) - (k \leftrightarrow l) = \\ &= \left( \sum_{ij} \underbrace{J_{ik}}_{\substack{\parallel \\ J_{ki}^T}} E_{ij} J_{je} + \sum_{ij} w_i E_{ij} \underbrace{\frac{\partial^2 w_j}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_e}}_{\substack{\text{Simmetrica} \\ \text{in } k \leftrightarrow e}} - \sum_i \delta_{ik} E_{ie} \right) - (k \leftrightarrow l) = \\ &= (J^T E J)_{ke} - E_{ke} - (J^T E J)_{ke}^T + E_{ke}^T = \quad \begin{array}{l} E^T = -E \\ (J^T E J)^T = J^T E^T J \\ = -J^T E J \end{array} \\ &= 2 [ J^T E J - E ]_{ke} \end{aligned}$$

che si annulla se e solo se la trasformazione è simmetrica, cioè canonica.

$$J^T E J = E \iff E J^T E J = -1 \iff E J^T = J^T E \iff J E J^T = E$$

//

## Condizione di Lie e $K_0$

- Consideriamo una trasf. che soddisfa la condiz. di Lie

$$\sum_{i,j} w_i E_{ij} d^* w_j = \sum_{i,j} \tilde{x}_i E_{ij} d^* \tilde{x}_j + d^* G \quad (*)$$

e quella è canonica.

- Derivo (\*) rispetto al tempo:  $\frac{\partial}{\partial t}$  ( $\tilde{x}_i$  non dip. da  $t$ , solo vars. indep.)

$$\sum_{i,j} \frac{\partial w_i}{\partial t} E_{ij} d^* w_j + \sum_{i,j} w_i E_{ij} d^* \frac{\partial w_j}{\partial t} = d^* \frac{\partial G}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} w_i E_{ij} d^* \frac{\partial w_j}{\partial t} = d^* \frac{\partial G}{\partial t} - \sum_{i,j} \frac{\partial w_i}{\partial t} E_{ij} d^* w_j \quad (o)$$

- Definisco  $\Omega(\tilde{x}, t) \equiv \frac{1}{2} \left[ \sum_{a,b} w_a E_{ab} \frac{\partial w_b}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t} \right]$   
usando (o)

$$d^* \Omega \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{2} \left[ \sum_{a,b} d^* w_a \underset{-E_{ba}}{\parallel} E_{ab} \frac{\partial w_b}{\partial t} + \cancel{d^* \frac{\partial G}{\partial t}} - \sum_{i,j} \frac{\partial w_i}{\partial t} E_{ij} d^* w_j - \cancel{d^* \frac{\partial G}{\partial t}} \right]$$

$$= - \sum_{i,j} \frac{\partial w_i}{\partial t} E_{ij} d^* w_j = \leftarrow w_j(\tilde{x}, t)$$

$$= - \sum_{i,j,l} \frac{\partial w_i}{\partial t} E_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial \tilde{x}_l} d\tilde{x}_l$$

Inoltre  $d^* \Omega = \sum_l \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{x}_l} d\tilde{x}_l$

$$\Rightarrow \Omega \text{ è una funz. tale che } \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{x}_l} = \sum_{a,b} \frac{\partial w_a}{\partial \tilde{x}_l} E_{ab} \frac{\partial w_b}{\partial t}$$

$$\sum_e E_{me} \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{x}_e} = \sum_{l \neq b} E_{me} \underbrace{(J^T)_{la}}_{EJ^T = \tilde{J}E} E_{ab} \frac{\partial W_b}{\partial t} =$$

$$= \sum_{l \neq b} \tilde{J}_{me} \underbrace{E_{la} E_{ab}}_{\delta_{eb}} \frac{\partial W_b}{\partial t} = - \sum_e \tilde{J}_{me} \frac{\partial W_e}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{W}_m}{\partial t}$$

$$= \sum_s E_{ms} \frac{\partial K_0}{\partial \tilde{x}_s}$$

$$\Rightarrow \nabla_{\tilde{x}} \Omega = \nabla_{\tilde{x}} K_0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = K_0 \quad \text{e meno di cost.}$$

$$\Rightarrow K_0(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{a \neq b} W_a E_{ab} \frac{\partial W_b}{\partial t} \right]$$

$G = \underbrace{\sum_h v_h u_h + \sum_h \tilde{q}_h \tilde{p}_h}_{= -2F}$

• In coordinate  $\tilde{p}, \tilde{q}$ , e usando che  $G = -2F + \sum_h v_h u_h - \sum_h \tilde{q}_h \tilde{p}_h$ , possiamo ricavare

$$\begin{aligned} K_0(\tilde{p}, \tilde{q}, t) &= \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_h \frac{\partial v_h}{\partial t} u_h - \cancel{\frac{1}{2} \sum_h v_h \frac{\partial u_h}{\partial t}} - \frac{1}{2} \sum_h u_h \frac{\partial v_h}{\partial t} + \cancel{\frac{1}{2} \sum_h \tilde{q}_h \frac{\partial \tilde{p}_h}{\partial t}} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} - \sum_h u_h \frac{\partial v_h}{\partial t} \end{aligned}$$

- Possiamo riscrivere la conditione di Lie nel seguente modo  
(mettiamo  $c=1$ )

$$\sum_n u_n d^* v_n = \sum_n \tilde{p}_n d\tilde{q}_n + d^* F$$

$$\sum_n u_n d v_n - \sum_n u_n \frac{\partial v_n}{\partial t} dt = \sum_n \tilde{p}_n d\tilde{q}_n + dF - \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

$$\sum_n u_n d v_n = \sum_n \tilde{p}_n d\tilde{q}_n + dF - K_0 dt$$

# FUNZIONI GENERATRICI di transf. canoniche

Consideriamo la transf.

$$\begin{cases} p = \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} \\ q = \sqrt{2\tilde{p}} \sin \tilde{q} \end{cases}$$

Vediamo che possiamo invertire la seconda eq. in ricavare  $\tilde{p}$  in funzione di  $q$ . Otteniamo

$$\tilde{p} = \frac{q^2}{2\sin^2 \tilde{q}}$$

Se poi sostituiamo nella prima eq. abbiamo

$$p = \left| \frac{q}{\sin \tilde{q}} \right| \cos \tilde{q}$$

Quindi un modo equivalente di dare la transf. è fornire le relazioni

$$\begin{cases} p = \left| \frac{q}{\sin \tilde{q}} \right| \cos \tilde{q} \\ \tilde{p} = \frac{q^2}{2\sin^2 \tilde{q}} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} p = p(q, \tilde{q}) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(q, \tilde{q}) \end{cases}$$

In questo modo posso usare  $(q, \tilde{q})$  come coord. indipendenti, sulla spesa delle fasi (anche se non sono coord. canoniche, cioè le eq. del moto in i moti  $(q(t), \tilde{q}(t))$  espressi in qte coord. non sono nelle forme delle eq. di Hamilton).

↓  
Qta cosa la posso generalizzare a un caso generico: )

Partiamo dalla forma standard:

$$\begin{cases} p_h = u_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \\ q_h = v_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \end{cases} \quad (*)$$

Se il secondo set di eq. è invertibile esplicitando le  $\tilde{p}_h$  in funzione delle  $q_h$  (e  $\tilde{q}_h$ ), cioè se  $\det\left(\frac{\partial v_h}{\partial \tilde{p}_k}\right) \neq 0$ , allora ottengo

$$\tilde{p}_h = \tilde{P}_h(q, \tilde{q}, t) \quad h=1, \dots, n$$

Sostituendo qte relazioni nelle prime eq. in (\*), ottengo

$$p_h = P_h(q, \tilde{q}, t) = u_h(\tilde{P}(q, \tilde{q}, t), \tilde{q}, t)$$

$\Rightarrow$  La transf. di coord. può essere vista come una relazione tra le coord. indep.  $(q, \tilde{p})$  e le coord. indep.  $(q, \tilde{q})$ :

$$(*) \begin{cases} p_h = P_h(q, \tilde{q}, t) \\ \tilde{p}_h = \tilde{P}_h(q, \tilde{q}, t) \end{cases} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Invertendo queste relazioni ottengo la transf.} \\ \text{canonica nella forma solita.} \end{array}$$

In (\*) sono  $(q, \tilde{q})$  le coord. indep., mentre in (\*) erano  $(\tilde{p}, \tilde{q})$ .

La condizione di Lie dipende dai diff.  $dq$  e  $d\tilde{q}$ . Se  $(q, \tilde{q})$  sono le coord. indep.,  $dq$  e  $d\tilde{q}$  diventano i diff. fondamentali (base delle 1-forme sullo spazio delle fasi):

$$\sum_h p_h \cdot dq_h - \sum_k \tilde{p}_k \cdot d\tilde{q}_k + K_0 dt = dF_1 \quad \text{dove } F_1(q, \tilde{q}, t) = F(\tilde{P}(q, \tilde{q}, t), \tilde{q}, t)$$

(o)

$\Downarrow$

Vediamo che data una funzione (regolare)  $F_1(q, \tilde{q}, t)$

t.c.  $\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_h \partial \tilde{q}_h}\right) \neq 0$ , possiamo da essa ricavare delle relazioni tipo (\*) ed essere sicuri che esse definiscono una trasformazione canonica nel seguente modo:

$$- dF_1 = \sum_{h=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q_h}(q, \tilde{q}, t) dq_h + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_k} d\tilde{q}_k^{-1} + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

- Ora, se poniamo

$$(*) \begin{cases} p_h(q, \tilde{q}, t) = \frac{\partial F_1}{\partial q_h}(q, \tilde{q}, t) \\ \tilde{p}_k(q, \tilde{q}, t) = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_k}(q, \tilde{q}, t) \end{cases}$$

Abbiamo delle transf. di coord. che soddisfano la condizione di Lie (0) con  $K_0 = \frac{\partial F_1}{\partial t}$  e quindi è canonica.

$\Rightarrow F_1$  genera, tramite inversione del second set di eq. in (\*), una TRASF. CANONICA con

$$K = \tilde{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Funzioni del tipo  $F_1(q, \tilde{q}, t)$  generano tutte e sole le transf. canoniche che consentono di prendere  $(q, \tilde{q})$  come VARIABILI INDIPENDENTI.

$\rightarrow F_1$  non può generare la transf. identica  $\begin{cases} p_h = \tilde{p}_h \\ q_h = \tilde{q}_h \end{cases}$ , perché  
bando  $\det\left(\frac{\partial \tilde{q}_h}{\partial \tilde{p}_k}\right) = 0$ .

Riarrangiando ora la condizione di Lie in un altro modo

$$\bar{p} \cdot d\bar{q} - \underbrace{\bar{p} \cdot d\bar{q}}_{-d(\bar{p} \cdot \bar{q})} + K_0 dt = dF$$

$$\rightarrow \sum_h p_h \cdot dq_h + \sum_k \tilde{q}_k d\tilde{p}_k + K_0 dt = dF_2$$

$$\text{con } F_2(\tilde{p}, q, t) = F(\tilde{p}, \tilde{q}(\tilde{p}, q), t) + \bar{p} \cdot \bar{q}(\tilde{p}, q, t)$$



Ogni funzione  $F_2(\tilde{p}, q, t)$  con  $\det \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{p}_h \partial q_k} \right) \neq 0$  genera una trasformazione canonica tramite:

$$\begin{cases} p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h}(\tilde{p}, q, t) \\ \tilde{q}_k = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_k}(\tilde{p}, q, t) \end{cases} \quad \text{con } K = \tilde{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Funzioni tipo  $F_2$  generano la maggior parte delle transf. interessanti:

• Identità:  $F_2(\tilde{p}, q, t) = \sum_k \tilde{p}_k q_k$  :  $p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} = \tilde{p}_h$      $\tilde{q}_h = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_h} = q_h$

• Trasf. puntuali estese:  $F_2 = \sum_k \tilde{p}_k \hat{v}_k(q, t)$  :  
 $p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} = \sum_k \tilde{p}_k \frac{\partial \hat{v}_k(q, t)}{\partial q_h}$      $\tilde{q}_h = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_h} = \hat{v}_h(q, t)$

Giocando con le condizioni di Lie, ci sono altri due tipi di funz. gener.

$$F_3(p, \tilde{q}, t) \rightarrow \begin{cases} q_h = -\frac{\partial F_3}{\partial p_h} \\ \tilde{p}_k = -\frac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}_k} \end{cases} \quad F_4(p, \tilde{p}, t) \rightarrow \begin{cases} q_h = -\frac{\partial F_4}{\partial p_h} \\ \tilde{q}_k = \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{p}_k} \end{cases}$$

$$K = \tilde{H} + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

$$K = \tilde{H} + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

## ESEMPIO

Consideriamo la seguente trasf. di coord. nello sp. delle fasi ( $n=1$ )

$$\begin{cases} p = \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} \\ q = \sqrt{2\tilde{p}} \sin \tilde{q} \end{cases}$$

Verifichiamo la CANONICITÀ.

1) PARENTESI DI POISSON (fondamentali)

$$\begin{aligned} \{p, q\} &= \left\{ \sqrt{2\tilde{p}} \sin \tilde{q}, \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} \right\} = \\ &= 2 \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} (\sqrt{\tilde{p}} \sin \tilde{q}) \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} (\sqrt{\tilde{p}} \cos \tilde{q}) - \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} (\sqrt{\tilde{p}} \sin \tilde{q}) \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} (\sqrt{\tilde{p}} \cos \tilde{q}) \right] \\ &= 2 \left[ \cancel{\sqrt{\tilde{p}}} \cos \tilde{q} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{\tilde{p}}}} \cos \tilde{q} - \cancel{\sqrt{\tilde{p}}} (-\sin \tilde{q}) \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{\tilde{p}}}} \sin \tilde{q} \right] = \\ &= \cos^2 \tilde{q} + \sin^2 \tilde{q} = 1 \end{aligned}$$

$$\{q, q\} = 0 \quad \{p, p\} = 0 \quad //$$

2) CONDIZIONE DI LIE

$$\begin{aligned} p dq &= \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} d(\sqrt{2\tilde{p}} \sin \tilde{q}) = 2\sqrt{\tilde{p}} \cos \tilde{q} \left( \frac{1}{2\sqrt{\tilde{p}}} \sin \tilde{q} d\tilde{p} + \sqrt{\tilde{p}} \cos \tilde{q} d\tilde{q} \right) = \\ &= \cos \tilde{q} \sin \tilde{q} d\tilde{p} + 2\tilde{p} \cos^2 \tilde{q} d\tilde{q} \quad (*) \end{aligned}$$

→ trasf. soddisfa cond. di Lie se  $\exists F$  t.c.

$$p dq = dF + \tilde{p} d\tilde{q}$$

↑  
dato da (\*)

→ F dev'essere tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{p}} d\tilde{p} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{q}} d\tilde{q} = \cos \tilde{q} \sin \tilde{q} d\tilde{p} + \tilde{p} (2\cos^2 \tilde{q} - 1) d\tilde{q}$$

cioè :

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{p}} = \cos \tilde{q} \operatorname{sen} \tilde{q} \rightarrow F = \tilde{p} \cos \tilde{q} \operatorname{sen} \tilde{q} + f(\tilde{q})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}} = 2\tilde{p} \cos^2 \tilde{q} - \tilde{p} \stackrel{\text{inseriamo qui sotto:}}{=} \tilde{p}(2\cos^2 \tilde{q} - 1) + f'(\tilde{q})$$

$$f'(\tilde{q}) = 0 \Rightarrow f(\tilde{q}) = \text{cost.}$$

$\Rightarrow \exists F = \tilde{p} \cos \tilde{q} \operatorname{sen} \tilde{q} + \text{cost.}$  k.e. cond. di Lie è soddisfatta. //

### 3) JACOBIANO SIMPLETTICO

$$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \tilde{p}} & \frac{\partial p}{\partial \tilde{q}} \\ \frac{\partial q}{\partial \tilde{p}} & \frac{\partial q}{\partial \tilde{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}} \cos \tilde{q} & -\sqrt{2\tilde{p}} \operatorname{sen} \tilde{q} \\ \frac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}} \operatorname{sen} \tilde{q} & \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} \end{pmatrix}$$

$$J^T E J = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}} \cos \tilde{q} & \frac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}} \operatorname{sen} \tilde{q} \\ -\sqrt{2\tilde{p}} \operatorname{sen} \tilde{q} & \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}} \cos \tilde{q} & -\sqrt{2\tilde{p}} \operatorname{sen} \tilde{q} \\ \frac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}} \operatorname{sen} \tilde{q} & \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}} \operatorname{sen} \tilde{q} & -\frac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}} \cos \tilde{q} \\ \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} & \sqrt{2\tilde{p}} \operatorname{sen} \tilde{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}} \cos \tilde{q} & -\sqrt{2\tilde{p}} \operatorname{sen} \tilde{q} \\ \frac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}} \operatorname{sen} \tilde{q} & \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E //$$

### 4) ESISTENZA DI UNA FUNZIONE GENERATRICE, in es. di tipo $F_3(p, \tilde{q})$

$$\begin{cases} p = \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} \\ q = \sqrt{2\tilde{p}} \operatorname{sen} \tilde{q} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tilde{p} = \frac{p^2}{2 \cos^2 \tilde{q}} \leftarrow = -\frac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}} \\ q = p \operatorname{tg} \tilde{q} \leftarrow = -\frac{\partial F_3}{\partial p} \end{cases}$$

Quindi  $F_3$  dev'essere t.c.

$$p \operatorname{tg} \tilde{q} = -\frac{\partial F_3}{\partial p} \rightarrow F_3 = -\frac{p^2}{2} \operatorname{tg} \tilde{q} + f(\tilde{q})$$

Con tale  $F_3$ , abbiamo

$$-\frac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}} = \frac{p^2}{2} \frac{1}{\cos^2 \tilde{q}} - f'(\tilde{q}) \xrightarrow{\text{in la minima ep.}} f'(\tilde{q}) = 0. //$$

Consideriamo l'oscillatore armonico con  $m = 1/\omega$

$$H(p, q) = \frac{\omega}{2} (p^2 + q^2) \rightarrow \text{ep. di Ham.} \begin{cases} \dot{p} = -\omega q \\ \dot{q} = \omega p \end{cases} \quad (\sim)$$

Verifichiamo che in questa  $H$ ,  $\exists K(\tilde{p}, \tilde{q})$  t.c. le ep. del moto si possono ancora scrivere in forma di ep. di Hamilton.

Data  $p = p(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t))$  e  $q = q(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t))$

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{d}{dt} (\sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}} \cos \tilde{q} \dot{\tilde{p}} - \sqrt{2\tilde{p}} \operatorname{sen} \tilde{q} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{q} = \frac{d}{dt} (\sqrt{2\tilde{p}} \operatorname{sen} \tilde{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}} \operatorname{sen} \tilde{q} \dot{\tilde{p}} + \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} \dot{\tilde{q}} \end{cases}$$

Scriviamo le  $\dot{\tilde{p}}$  e  $\dot{\tilde{q}}$  in funzione di  $\dot{p}$  e  $\dot{q}$  (sist. lineare):

$$\dot{\tilde{p}} = \sqrt{2\tilde{p}} (\cos \tilde{q} \dot{p} + \operatorname{sen} \tilde{q} \dot{q}) = q \dot{p} + p \dot{q}$$

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}} (-\operatorname{sen} \tilde{q} \dot{p} + \cos \tilde{q} \dot{q}) = \frac{1}{2\tilde{p}} (p \dot{q} - q \dot{p})$$

Usando le ep. di Ham. ( $\sim$ )

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} = 0 \\ \dot{\tilde{q}} = \omega \end{cases} \rightarrow \exists K = \omega \tilde{p} \text{ che genera qte ep. di Hamilton}$$

Le nuove  $K(\tilde{p}, \tilde{q})$  e  $h_{\text{mech}} = H(p(\tilde{p}, \tilde{q}), q(\tilde{p}, \tilde{q}))$ .

Le nuove eq. del moto sono semplicissime, con solert:

$$\tilde{p}(t) = \tilde{p}^0$$

$$\tilde{q}(t) = \omega t + \tilde{q}^0$$

Le solert. nelle vecchie coord. sono allora

$$p(t) = p(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) = \sqrt{2\tilde{p}^0} \sin(\omega t + \tilde{q}^0)$$

$$q(t) = q(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) = \sqrt{2\tilde{p}^0} \cos(\omega t + \tilde{q}^0)$$

che sono le note solertioni dell'oscillatore armonico.

# COORDINATE CICLICHE in meccanica Hamiltoniana

Cosa succede se  $H$  non dip. da una coord  $q$ ? (CICLICA)

Diciamo  $H(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_{m-1})$

$$\Rightarrow \dot{p}_m = - \frac{\partial H}{\partial q_m} = 0 \quad \rightarrow \quad p_m \text{ è cost. del moto}$$

$\uparrow$   
mom. coniugato

$\downarrow$   
 $f_m(t) = p_m^0$

Altre eq. di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{p}_h^{(t)} = - \frac{\partial H}{\partial q_h} (p_1^{(t)}, \dots, p_{m-1}^{(t)}, p_m^0, q_1^{(t)}, \dots, q_{m-1}^{(t)}) \\ \dot{q}_h^{(t)} = \frac{\partial H}{\partial p_h} (p_1^{(t)}, \dots, p_{m-1}^{(t)}, p_m^0, q_1^{(t)}, \dots, q_{m-1}^{(t)}) \end{cases} \quad h=1, \dots, m-1$$

$\downarrow$   
Stesse eq. che si ottengono dall'Hamiltoniana ridotta

$$H^* (p_1, \dots, p_{m-1}, q_1, \dots, q_{m-1}; p_m^0) = H (p_1, \dots, p_{m-1}, p_m^0, q_1, \dots, q_{m-1})$$

$\uparrow$   
problema a  $m-1$  gradi di libertà

Quando un sistema è sia Lagrangiano che Hamiltoniano, allora una coord  $q_e$  è ciclica in entrambi i formalismi:

$$H(p, q, t) = \left[ \bar{p} \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \right]_{\dot{q} = \dot{q}(p, q, t)}$$

$$p_e = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_e} \leftarrow \text{qte relationi non dip. da } q_e \rightarrow \dot{q}_e(p, q, t) \text{ non dip. da } q_e$$

$\Rightarrow$  se  $L$  non dip. da  $q_e$  allora anche  $H$  non dip. da  $p_e$  (e viceversa).