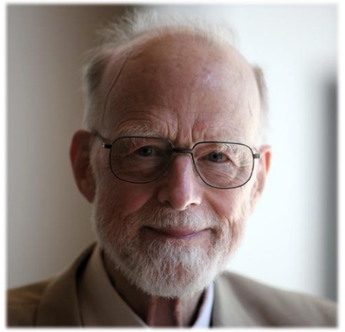
Agenda di oggi

- *Bubblesort*
- Quicksort
- *Counting sort*

ALGORITMO: IDEA



Ideato da Tony Hoare (vincitore del premio Turing nel 1980) nel 1959-60

- Il quick sort è un algoritmo “**divide et impera**”
- L’idea di base è quella di scegliere in un array di n elementi un **pivot**, spostare gli elementi più piccoli prima del pivot e quelli più grandi dopo il pivot.
- Se applichiamo **ricorsivamente** lo stesso algoritmo ai due sotto-array risultanti (elementi minori e maggiori del pivot) otteniamo un array ordinato
- **La scelta del pivot è critica.** Lo si vorrebbe, idealmente, *mediano** in modo che ad ogni ricorsione si spezzi la sequenza a metà e si abbia il numero minimo di passi ricorsivi ($\log_2 n$). Spesso si sceglie a caso!
- Il vantaggio di quicksort sta nella sua **efficienza nel caso medio**.

*Trovare il mediano in un array costa O(n) e bisognerebbe farlo ad ogni passo.

ESEMPIO

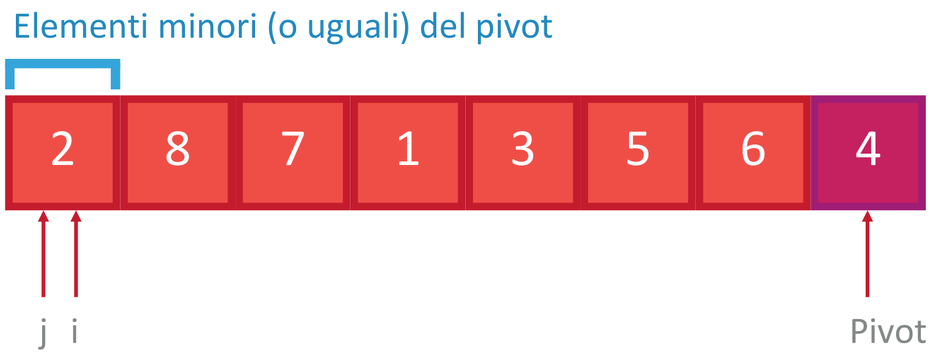
i indica l'ultimo degli elementi minori del pivot
j viene utilizzato per scorrere l'array

Array da ordinare

ESEMPIO

Se A[j] è minore (o uguale) del pivot
incrementiamo i e scambiamo A[i] e A[j]

ESEMPIO

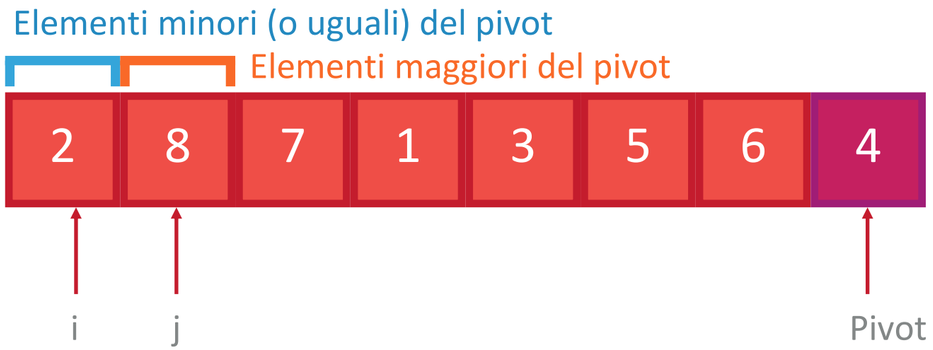


Se A[j] è minore (o uguale) del pivot
incrementiamo i e scambiamo A[i] e A[j]

In questo caso non cambia nulla (i è uguale a j)

Poi incrementiamo j

ESEMPIO



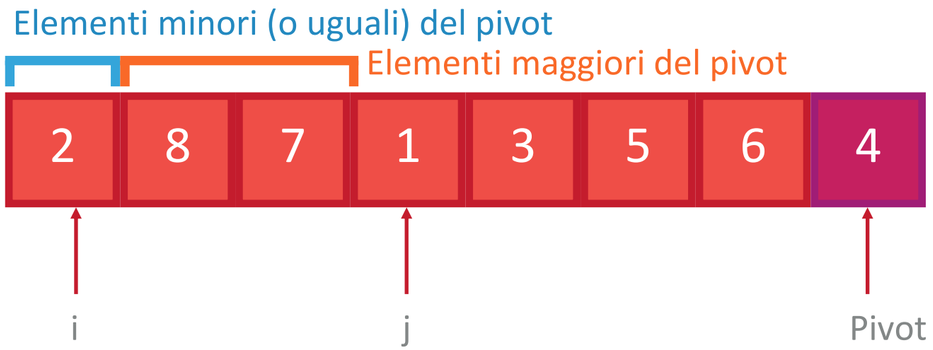
Se A[j] è maggiore del pivot
non facciamo nulla

Incrementiamo solo j

ESEMPIO

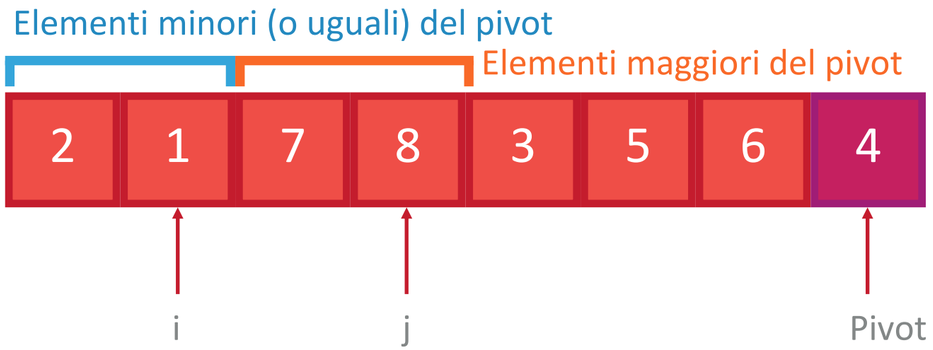
Se A[j] è maggiore del pivot
non facciamo nulla

ESEMPIO



Se A[j] è minore del pivot
incrementiamo i e scambiamo A[i] e A[j]

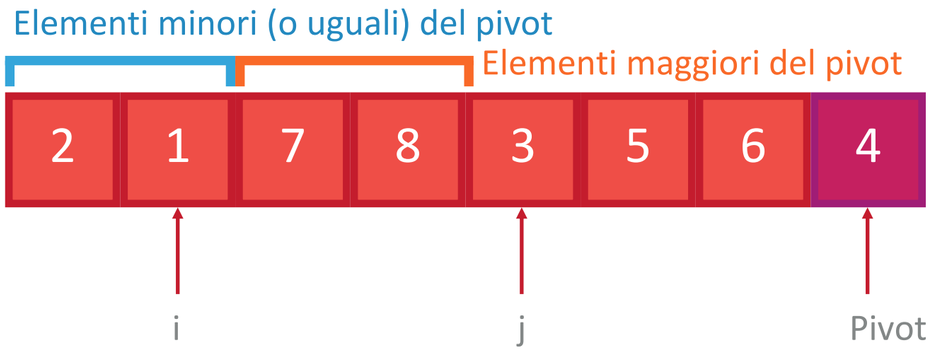
ESEMPIO



Se A[j] è minore del pivot
incrementiamo i e scambiamo A[i] e A[j]

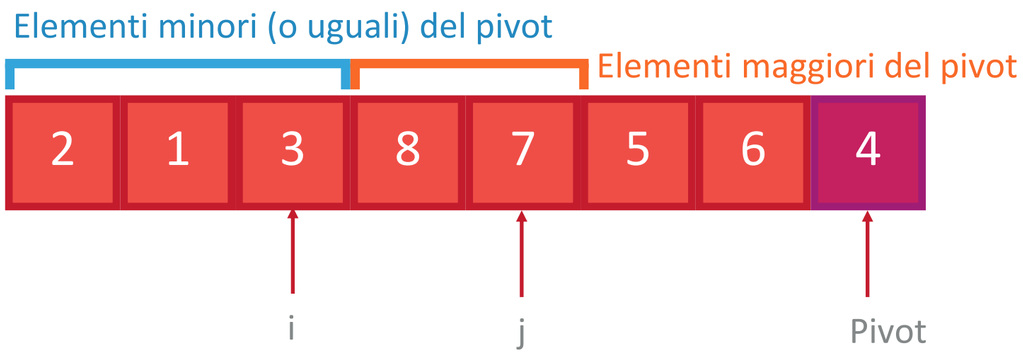
Poi incrementiamo j

ESEMPIO



Se A[j] è minore del pivot
incrementiamo i e scambiamo A[i] e A[j]

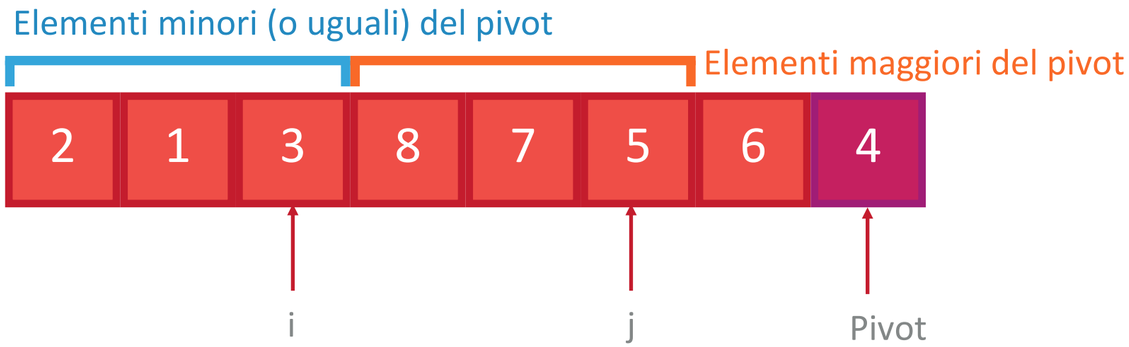
ESEMPIO



Se A[j] è minore del pivot
incrementiamo i e scambiamo A[i] e A[j]

Poi incrementiamo j

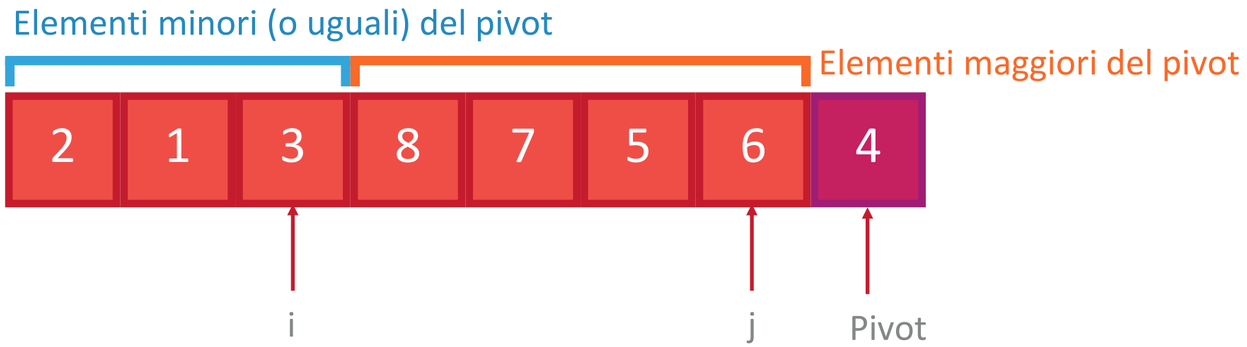
ESEMPIO



Se A[j] è maggiore del pivot
non facciamo nulla

Incrementiamo solo j

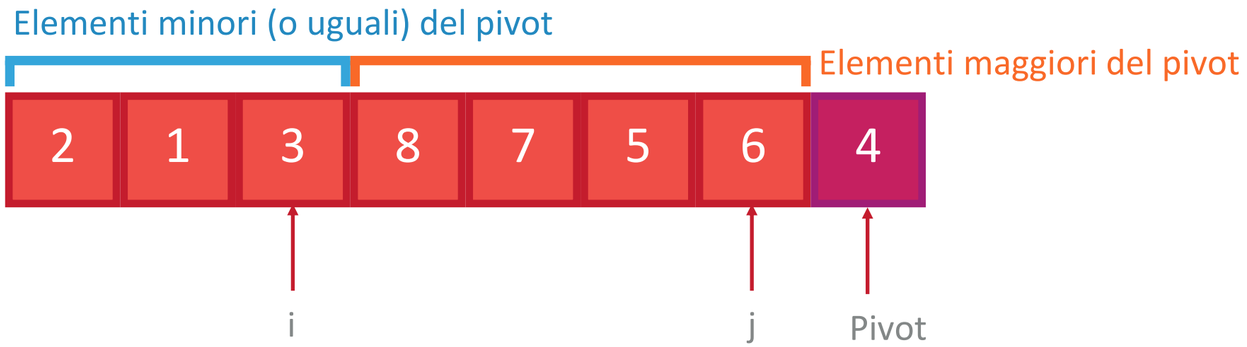
ESEMPIO



Se A[j] è maggiore del pivot
non facciamo nulla

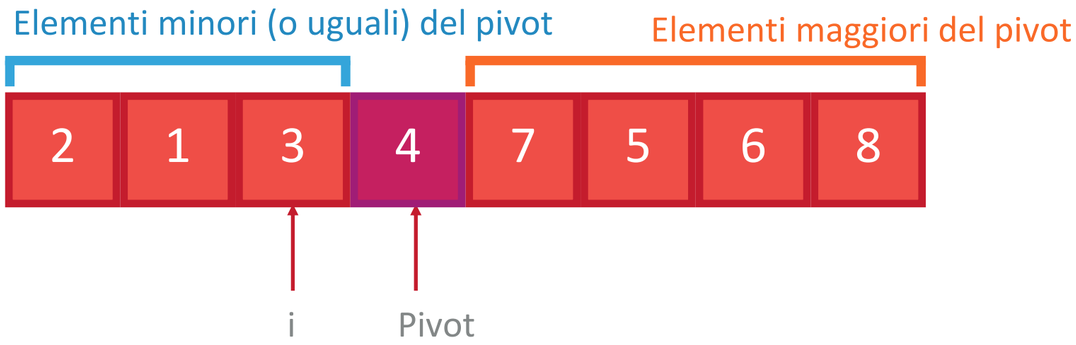
Incrementiamo solo j

ESEMPIO



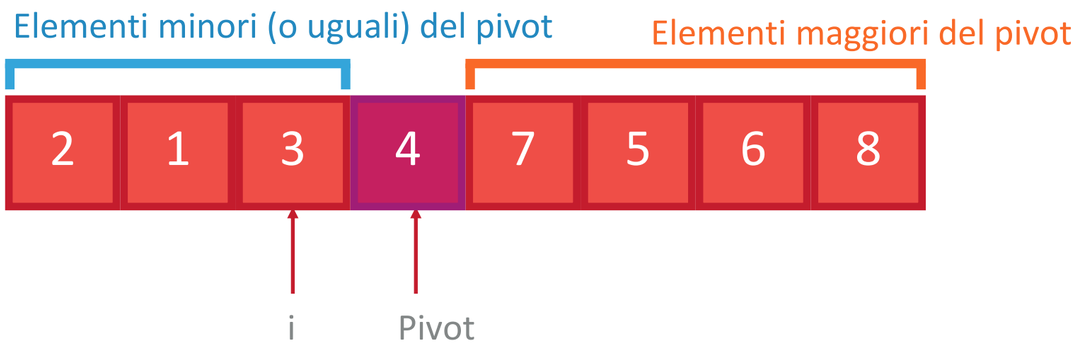
Abbiamo effettuato una scansione di tutto l'array
e abbiamo raccolto tutti gli elementi minori o uguali
del pivot negli indici $[0, i]$.
Dobbiamo solo posizionare il pivot tra le due partizioni

ESEMPIO



Ci basta scambiare l'elemento in posizione $i + 1$
(che è necessariamente maggiore del pivot
o il pivot stesso) con il pivot

ESEMPIO



Questa stessa procedura va poi ripetuta su tutti i sottoarray (ricorsione).

Nota: i «sottoarray» sono la parte di array a sinistra del pivot e quella a destra del pivot.

PSEUDOCODICE (MAIN)

```
QUICKSORT(A,p,r)    //input: array A, p=inizio array, r=fine array
if p ≥ r:                //caso base: array di lunghezza 0 o 1
   return
q = partiziona(A, p, r) // indice del pivot dopo il partizionamento
```

PSEUDOCODICE (PARTIZIONAMENTO)

```
PARTIZIONA(A,p,r)                    //input: array A, p=inizio array, r=fine array
x = A[r]    //il pivot è l'ultimo elemento dell'array (tra gli indici p e r)
i = p-1     //posizione iniziale degli elementi minori del pivot
for j=p to r-1 //per tutti gli elementi dell'array tranne il pivot
  if A[j] ≤ x        //se troviamo un elemento minore del pivot…
     i = i+1
     scambia A[i] e A[j] //…lo spostiamo nella prima parte dell'array
scambia A[i+1] con A[r] //mettiamo il pivot nella sua posizione finale
return i+1
```

PSEUDOCODICE (MAIN)

```
QUICKSORT(A,p,r)    //input: array A, p=inizio array, r=fine array
if p ≥ r:                  //caso base: array di lunghezza 0 o 1
   return
q = partiziona(A, p, r) // indice del pivot dopo il partizionamento
quicksort(A, p, q-1) // chiamata ricorsiva sugli elementi minori o uguali
quicksort(A, q+1, r) // chiamata ricorsiva sugli elementi maggiori
```

Chiamate ricorsive

CORRETTEZZA DELL'ALGORITMO

Invariante (condizione che rimane vera ad ogni ciclo):

- Gli elementi tra l'inizio dell'array e i sono tutti minori o uguali del pivot
- Gli elementi tra $i + 1$ e j sono tutti maggiori del pivot

Ogni iterazione continua a far rispettare questa condizione:

- Se il nuovo elemento è maggiore del pivot viene mantenuto nella sua posizione, rispettando quindi la condizione
- Se il nuovo elemento è minore o uguale del pivot, i viene incrementato, l'elemento in posizione j viene scambiato con quello in posizione i (che, dato che i è stato incrementato, è maggiore del pivot)

PRESTAZIONI: CALCOLO NEL CASO MIGLIORE

Costo partizionamento: $\Theta(n)$ (ogni elemento è visitato 1 volta e, se necessario, spostato)

Pivot: mediano

Costo totale:

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n) = (\text{teorema dell'esperto}) = \Theta(n^{log_2 2} logn) = \Theta(n \cdot logn)$$

Costo chiamata ricorsiva (su 2 sottoarray contenente n/2 elementi)

Costo partizionamento

PRESTAZIONI: CALCOLO NEL CASO PEGGIORE

Costo partizionamento: $\Theta(n)$ (ogni elemento è visitato 1 volta e, se necessario, spostato)

Pivot: primo (o ultimo) elemento dell'array

Costo totale:

$$T(n) = T(n-1) + T(1) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n)$$

Costo chiamata ricorsiva (su 1 sottoarray contenente 1 elemento e l'altro n-1 elementi)

Costo partizionamento

Risolvo iterativamente

$$T(n-1) = T(n-2) + \Theta(n-1)$$
$$T(n-2) = T(n-3) + \Theta(n-2)$$
$$\vdots$$
$$T(2) = T(1) + \Theta(1)$$

$$= \Theta(1) + \Theta(2) + \ldots + \Theta(n) = \sum_{i=1}^{n} \Theta(i) = \Theta(\frac{n(n+1)}{2}) = \Theta(n^2)$$

PRESTAZIONI: CALCOLO NEL CASO MEDIO

Costo partizionamento: $\Theta(n)$ (ogni elemento è visitato 1 volta e, se necessario, spostato)

Pivot: elemento a caso → **d** = numero di livelli di partizionamento

Ad esempio: se partizioniamo ¼*n e ¾*n

Il ramo più lungo delle chiamate ricorsive sarà quello che continua a prendere la parte più lunga della partizione. Ad un certo punto si arriverà ad un array di lunghezza 1 (dopo d chiamate ricorsive). A quale d corrisponde questo momento?

$(3/4)^d n = 1$

$$d = \frac{log_2 n}{log_2(3/4)} = 2.5 log_2 n$$

Costo totale: $T(n) = d \cdot \Theta(n) = O(logn) \cdot \Theta(n) = O(nlogn)$

CONFRONTO CON ALTRI ALGORITMI DI ORDINAMENTO

Caso migliore (array già ordinato): O(nlogn)

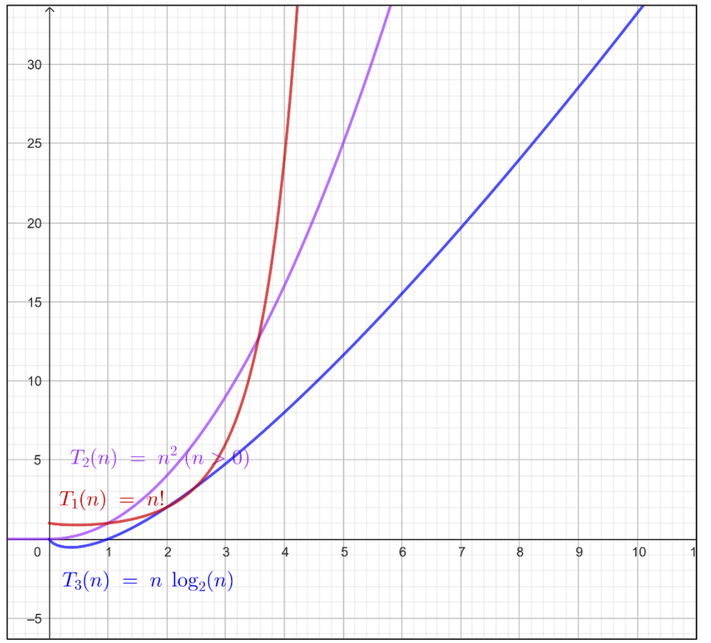
Caso peggiore: $O(n^2)$

Caso medio: O(nlogn)

Algoritmo	Caso peggiore	Caso migliore
Bogosort	O(n!)	O(n)
Insertion sort	$O(n^2)$	O(n)
Merge sort	$O(n\log_2 n)$	$O(n\log_2 n)$
Bubble sort	$O(n^2)$	O(n)
Quick sort	$O(n^2)$*	$O(n\log_2 n)$

*Caso medio: $O(n\log_2 n)$

Insertionsort Mergesort
Bogosort Bubblesort Quicksort



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE