FISICA GENERALE

— Parte 3 —

Statistica

Link moodle: https://moodle2.units.it/course/view.php?id=16681

Codice Teams del corso: gz0wuf4

Programma delle lezioni

Lezione 1: Introduzione al corso, ai concetti generali e all'analisi degli errori; stima delle incertezze

Lezione 2: Errori casuali e sistematici, rappresentazione degli errori, cifre significative, discrepanza

Lezione 3: Errori assoluti e relativi, applicazioni particolari della propagazione degli errori, somma in quadratura

Lezione 4: Propagazione degli errori, funzioni di una o più variabili, formula generale; esempi ed esercizi

Lezione 5: Analisi statistica degli errori casuali; media, deviazione standard; errori sistematici

Lezione 6: Rappresentazione dei dati; istogrammi e distribuzioni, distribuzione limite

Lezione 7: Distribuzione normale o gaussiana (prima parte); livelli di confidenza

Lezione 8: Distribuzione gaussiana (seconda parte) e principio di massima verosimiglianza; rigetto dei dati

Lezione 9: Distribuzione binomiale

Lezione 10: Distribuzione di Poisson

Lezione 11: Metodo dei minimi quadrati; ripasso di eventuali argomenti a richiesta; esercizi

Errori relativi

L'errore δx in una misura indica l'attendibilità o precisione della misura.

$(x \text{ misurato}) = x_{\text{best}} \pm \delta x$

Il valore dell'**errore assoluto** δx non è informativo sulla precisione della misura.

Esempi di misure con errore di 1 grammo: m = 3 ± 1 g → misura rozza

M = 3.000 ± 0.001 kg → misura precisa

La bontà di una misura non è indicata solo dall'errore assoluto δx, ma si quantifica soprattutto grazie all'**errore relativo** (o precisione): $\delta x / |x_{\text{best}}|$

Notare il valore assoluto al denominatore ($|x_{\text{best}}|$) che garantisce che l'**errore relativo** sia **sempre positivo**.
L'errore relativo è **adimensionale** (quello assoluto no).

Generalmente $\delta x \ll |x_{\text{best}}|$ quindi $\delta x / |x_{\text{best}}|$ è un numero molto piccolo: conveniente moltiplicarlo x100 e quotarlo come **errore percentuale**.

Esempio: L = 50 ± 1 cm → $\delta L / |L_{\text{best}}| = 1/50 = 0.02$ → L = 50 cm ± 2%

Cifre significative ed errori relativi

Errore relativo $\longleftrightarrow$ **Cifre significative**

Il numero di cifre significative in una grandezza è un'indicazione approssimativa dell'errore relativo in quella grandezza.

Considero i due numeri: 510 e 0.51 entrambi accurati a **due cifre significative**.

510 (noto con due cifre significative) significa: 510 ± 5 oppure $510 \pm 1\%$

0.51 significa: 0.51 ± 0.005 oppure $0.51 \pm 1\%$

Entrambi i **numeri** sono **incerti all'1%** (è un'affermazione **equivalente)**.

Se avessi il numero 510 accurato a tre cifre significative, il suo errore relativo sarebbe dello 0.1%.

Connessione approssimata, perché ad esempio:

110 (con due cifre significative) significa: 110 ± 5 oppure $110 \pm 5\%$

120 (con due cifre significative) significa: 120 ± 5 oppure $120 \pm 4\%$

910 (con due cifre significative) significa: 910 ± 5 oppure $120 \pm 0.5\%$

L'errore relativo associato a due cifre significative varia tra lo 0.5% e il 5%, a seconda della prima cifra del numero considerato.

Cifre significative ed errori relativi

Errore relativo ⟷ **Cifre significative**

Il numero di cifre significative in una grandezza è un'indicazione approssimativa dell'errore relativo in quella grandezza.

Tabella 2.4. **Corrispondenza approssimata fra cifre significative e errori relativi.**

Numero di cifre significative	*Errore relativo corrispondente*	
	è fra	*o, rozzamente, è*
1	5% e 50%	10%
2	0.5% e 5%	1%
3	0.05% e 0.5%	0.1%

Moltiplicazione di due valori di misure

L'importanza degli errori relativi si apprezza quando si moltiplicano valori numerici di misure l'uno con l'altro.

Ad esempio, determiniamo la quantità di moto (e la sua incertezza) misurando massa e velocità.

$$p = mv$$

$$m_{\text{misurato}} = m_{\text{best}}\left(1 \pm \frac{\delta m}{|m_{\text{best}}|}\right)$$

$$v_{\text{misurato}} = v_{\text{best}}\left(1 \pm \frac{\delta v}{|v_{\text{best}}|}\right)$$

$$p = p_{\text{best}}\left(1 \pm \frac{\delta p}{|p_{\text{best}}|}\right) = m_{\text{best}}v_{\text{best}}\left[1 \pm \left(\frac{\delta m}{|m_{\text{best}}|} + \frac{\delta v}{|v_{\text{best}}|}\right)\right]$$

Da cui concludo ottengo il valore centrale dell'intervallo $p_{\text{best}} = m_{\text{best}}v_{\text{best}}$

e l'errore relativo $\dfrac{\delta p}{|p_{\text{best}}|} \simeq \dfrac{\delta m}{|m_{\text{best}}|} + \dfrac{\delta v}{|v_{\text{best}}|}$

Moltiplicazione di due valori di misure

Generalizzo l'esempio precedente sul calcolo della quantità di moto $p = mv$:

$$p = p_{\text{best}}\left(1 \pm \frac{\delta p}{|p_{\text{best}}|}\right)$$

con l'errore relativo $\dfrac{\delta p}{|p_{\text{best}}|} \simeq \dfrac{\delta m}{|m_{\text{best}}|} + \dfrac{\delta v}{|v_{\text{best}}|}$

Se calcolo il prodotto di due grandezze misurate, gli **errori nelle** due **grandezze originali si propagano** per formare un'incertezza nel loro prodotto.

Regola generale che si applica al prodotto di una coppia di misure:

Se le grandezze x ed y sono misurate con piccoli errori relativi $\delta x / |x_{\text{best}}|$ e $\delta y / |y_{\text{best}}|$,
e se i valori misurati di x ed y sono utilizzati per calcolare $q = xy$, allora
l'errore relativo $\dfrac{\delta q}{|q_{\text{best}}|} \simeq \dfrac{\delta x}{|x_{\text{best}}|} + \dfrac{\delta y}{|y_{\text{best}}|}$

→ **Errore in un prodotto**

Moltiplicazione di due valori di misure

Se calcolo il prodotto di due grandezze misurate, gli **errori nelle** due **grandezze originali si propagano** per formare un'incertezza nel loro prodotto.

Se le grandezze x ed y sono misurate con piccoli errori relativi $\delta x / |x_{\text{best}}|$ e $\delta y / |y_{\text{best}}|$,
e se i valori misurati di x ed y sono utilizzati per calcolare $q = xy$, allora
l'errore relativo $\dfrac{\delta q}{|q_{\text{best}}|} \simeq \dfrac{\delta x}{|x_{\text{best}}|} + \dfrac{\delta y}{|y_{\text{best}}|}$

→ **Errore in un prodotto**

Il segno $\simeq$ nella formula precedente indica un'approssimazione:

- Formulazioni più accurate sono possibili (—>).
- Errori δx e δy devono essere entrambi molto piccoli (da poter trascurare il loro prodotto).
- Errori relativi devono essere << 1.

NB: — Gli errori relativi sono **adimensionali**: formula dimensionalmente corretta anche per grandezze diverse.

Introduzione alla propagazione degli errori

Grandezze fisiche

Misura diretta

- pochi casi

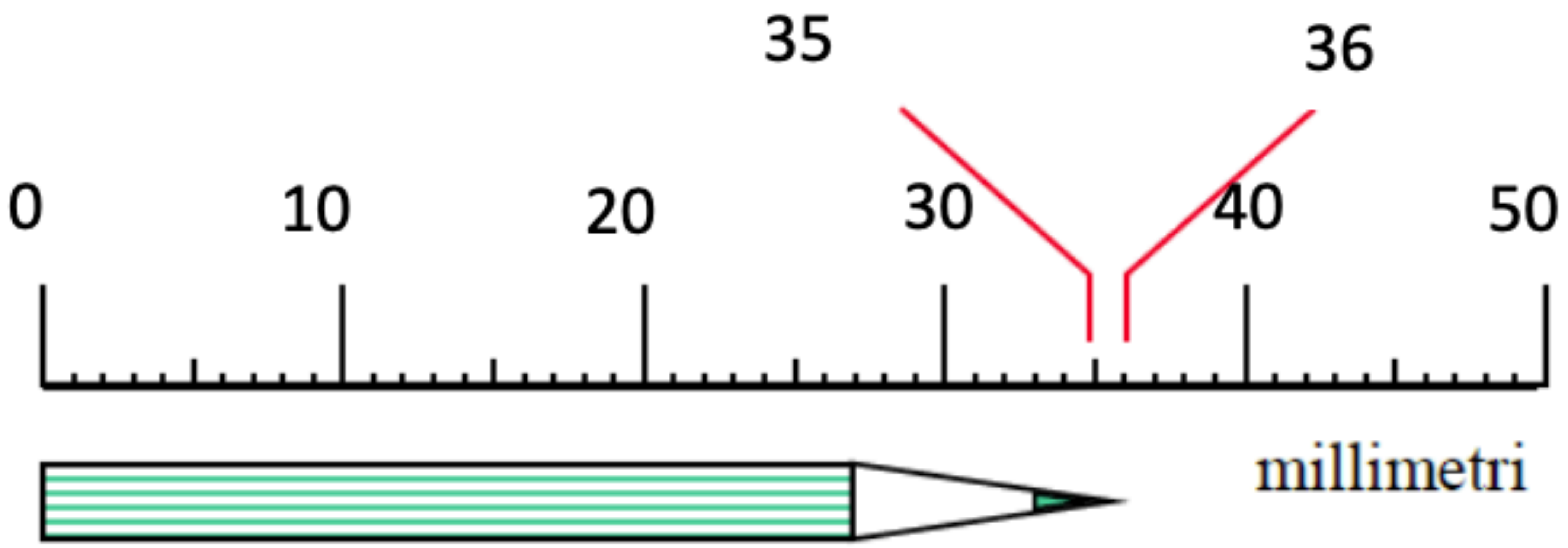
Misura indiretta

- misuro una o più grandezze direttamente
- calcolo poi da queste la grandezza d'interesse

Stima dell'errore
in due passi

- stimo errore nelle grandezze misurate direttamente
- **propago errori** per trovare incertezza nel risultato finale

Incertezze nelle misure dirette



$$35\ mm \leq l \leq 36\ mm$$

Stima dell'errore

- sottostima/sovrastima
- ripetibilità (trattazione statistica)
- conteggi (trattazione statistica)

Propagazione degli errori: somme e differenze

Misuro una o più grandezze direttamente ***a, b, c,*** …

con i corrispondenti errori ***Δa, Δb, Δc,*** …

per ottenere per via indiretta ***x ± Δx***

Caso 1

$$x = a + b$$

$$x + \Delta x = (a + \Delta a) + (b + \Delta b) = (a + b) + (\Delta a + \Delta b)$$

$$x - \Delta x = (a - \Delta a) + (b - \Delta b) = (a + b) - (\Delta a + \Delta b)$$

$$\Delta x = \Delta a + \Delta b$$

Caso 2

$$x = a - b$$

$$x + \Delta x = (a + \Delta a) - (b - \Delta b) = (a - b) + (\Delta a + \Delta b)$$

$$x - \Delta x = (a - \Delta a) - (b + \Delta b) = (a - b) - (\Delta a + \Delta b)$$

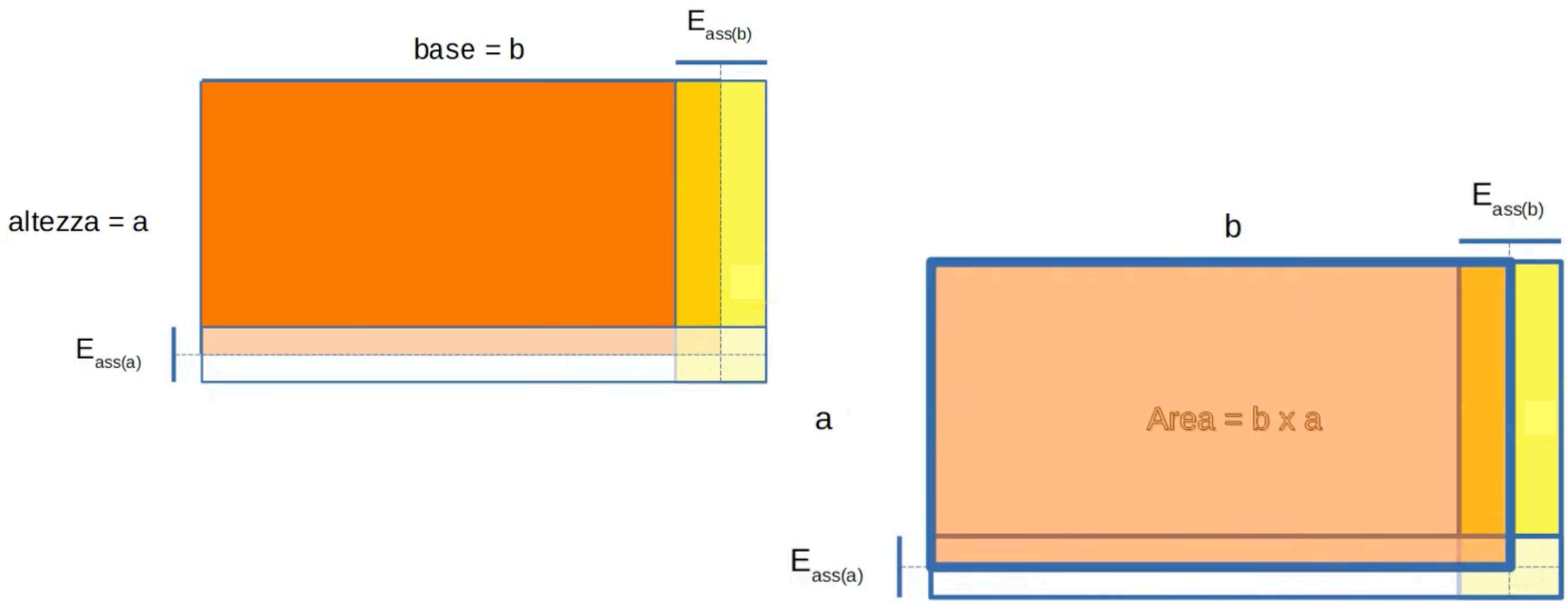
$$\Delta x = \Delta a + \Delta b$$

In generale:

$$x = a + b - c + ...$$

$$\Delta x = \Delta a + \Delta b + \Delta c + ...$$

Visualizzazione geometrica della propagazione dell'errore

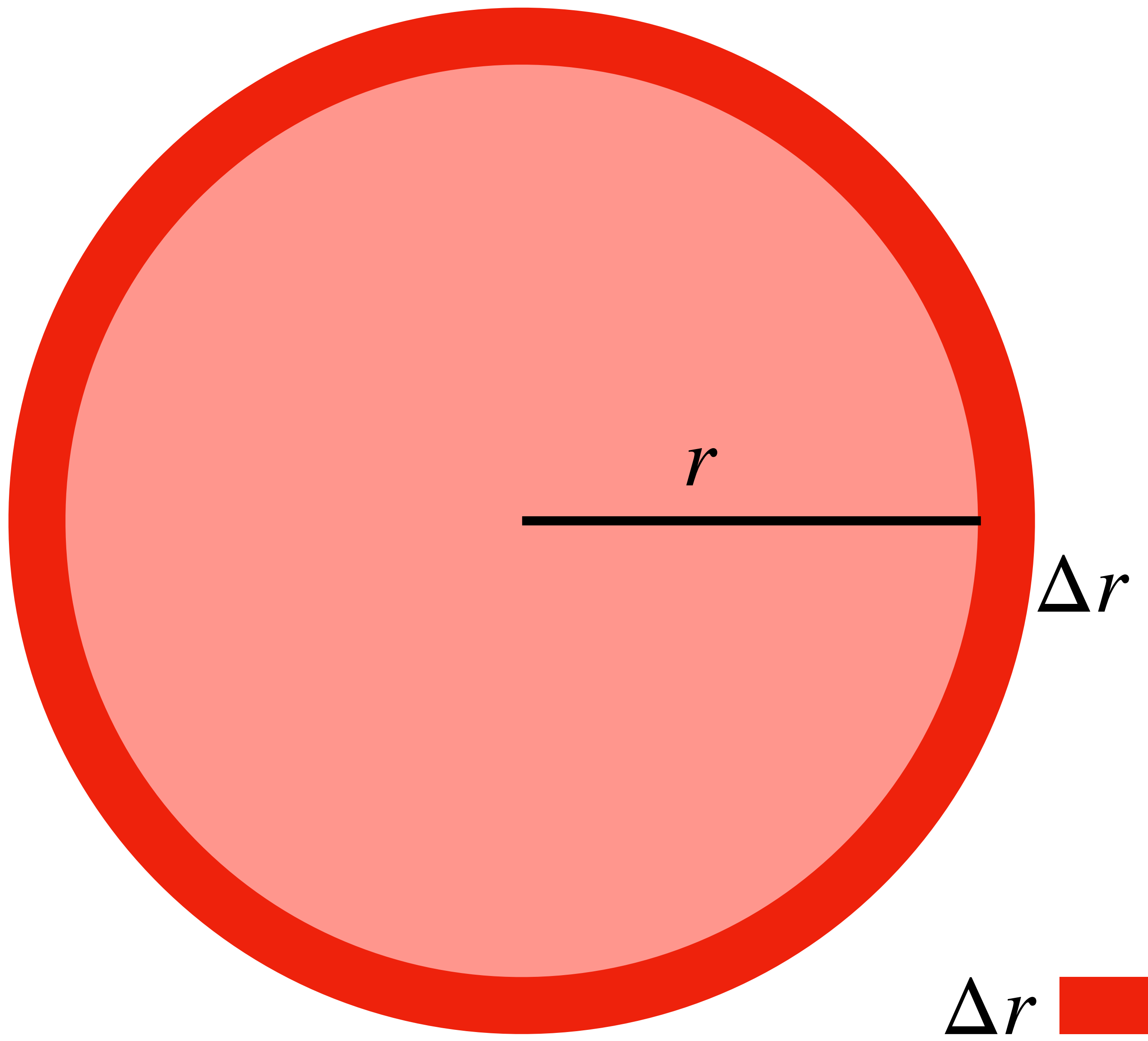


Incertezze nelle misure dirette

Visualizzazione geometrica della propagazione dell'errore

$$D \pm \Delta D \qquad\qquad r \pm \Delta r$$

$$r = \frac{D}{2} \qquad\qquad \Delta r = \frac{\Delta D}{2}$$



$$A = \pi\,(r \pm \Delta r)^2 = \pi\, r^2 \left(1 + (\frac{\Delta r}{r})^2 \pm 2\frac{\Delta r}{r} \right)$$

Propagazione degli errori: prodotti e quozienti

Caso 3

$$x = a\,b$$

$$\frac{\Delta x}{|x|} = \frac{a\,\Delta b + b\,\Delta a}{a\,b} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|}$$

Caso 4

$$x = a/b$$

$$\frac{\Delta x}{|x|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|}$$

In generale:

$$x = \frac{a\,b}{c\,d}$$

$$\frac{\Delta x}{|x|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|} + \frac{\Delta c}{|c|} + \frac{\Delta d}{|d|}$$

Propagazione degli errori: prodotto per una costante

Caso 5

$x = k\,b$, con k costante

$$\frac{\Delta x}{|x|} = \frac{\Delta b}{|b|}$$

In generale:

$$\boxed{\Delta x = |k|\,\Delta b}$$

Propagazione degli errori: elevamento a potenza

Caso 6

$$x = a^n$$

$$\frac{\Delta x}{|x|} = n\,\frac{\Delta a}{|a|}$$

In generale:

$$x = a^n b^k$$

$$\frac{\Delta x}{|x|} = |n|\frac{\Delta a}{|a|} + |k|\frac{\Delta b}{|b|}$$

Propagazione degli errori: somma in quadratura delle incertezze

$$q = x + y$$

Se gli **errori** sono **indipendenti e casuali**, c'è una buona probabilità di avere cancellazioni parziali degli errori (con sovrastime che vanno a controbilanciare sottostime delle grandezze)

$$\boxed{\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}}$$

Somma in quadratura delle incertezze

La somma ordinaria degli errori fornisce un limite superiore nel caso in cui gli errori NON siano indipendenti e casuali

$$\delta q \leq \delta x + \ldots + \delta z + \delta u + \ldots + \delta w$$