Foglio 8

Esercizio 1 Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.

(i) Stabilirne il raggio di convergenza R.

(ii) Studiare la convergenza per $x = \pm R$.

(iii) Dimostrare che la serie converge uniformemente sui sottoinsiemi compatti dell'intervallo $(-R, R)$ a $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Esercizio 2 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze, e studiarne la convergenza per $x = \pm R$ nel caso in cui R sia finito.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(1+n)}$;

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} n!(n+1)!} x^{2n+1}$ (la somma di questa serie è la cosiddetta funzione di Bessel J_1).

Esercizio 3

(i) Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge uniformemente sui sottoinsiemi compatti di $(-1, 1)$ alla funzione $\log(1 + x)$.

(ii) Calcolare

$$J = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx$$

sviluppando l'integranda in serie di potenze e integrando termine a termine. Ricordare l'identità $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \pi^2/12$.

Esercizio 4

(i) Dimostrare che la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ converge uniformemente sui sottoinsiemi compatti di $(-1, 1)$ alla funzione $\frac{1}{1+x^2}$.

(ii) Integrando termine a termine l'uguaglianza del punto precedente, dimostrare che la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge uniformemente sui sottoinsiemi compatti di $(-1, 1)$ alla funzione $\arctan x$.

Esercizio 5 Calcolare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica f definita sull'intervallo $[-\pi, \pi)$ da $f(x) = x$. Stabilire se la serie di Fourier converge puntualmente o uniformemente a f.

Esercizio 6 Calcolare l'integrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt$$

seguendo i suggerimenti seguenti.

(i) Dimostrare per confronto asintotico che l'integrale converge.

(ii) Dimostrare che, per ogni $t > 0$ fissato, vale l'uguaglianza

$$\frac{t^3}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}t^3}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t),$$

dove $f_n(t) = e^{-t}t^3e^{-nt}$.

(iii) Dimostrare che la serie di funzioni del punto precedente converge uniformemente su $[0, +\infty)$ (studiare la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$).

(iv) Dimostrare che $J = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$, dove $\varphi_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

(v) Dimostrare che la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ converge uniformemente su $[0, +\infty)$ studiando la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|_\infty$.

(vi) Verificare che $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \varphi_n(x) = \frac{6}{(n+1)^4}$.

(vii) Usando l'identità $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} = \pi^4/90$, dimostrare che $J = \pi^4/15$.