1. Formule di cambiamento di variabili

LEZIONE: CAMBIAMENTO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI DOPPI

Domini normali regolari

Se

$$\alpha,\, \beta \in C^1([a,b]),\; \alpha(x) \le \beta(x), \quad \forall x \in [a,b],$$

allora il sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$ così definito

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\, \alpha(x) \le y \le \beta(x)\Big\}.$$

si chiama dominio normale regolare rispetto all'asse x.
Se

$$\gamma,\, \delta \in C^1([c,d]),\; \gamma(y) \le \delta(y), \quad \forall y \in [c,d],$$

allora il sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$ così definito

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d, \gamma(y) \le x \le \delta(y)\Big\}.$$

si chiama dominio normale regolare rispetto all'asse y

Domini regolari

Definizione

Un dominio regolare D è per definizione l'unione di un numero finito di domini normali regolari, a due a due privi di punti interni in comune.

Osserviamo esplicitamente che la frontiera di un dominio regolare D, ∂D, è unione di un numero finito di curve generalmente regolari e chiuse.

Trasformazione di coordinate

Volendo calcolare

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

può talvolta essere utile effettuare una trasformazione di coordinate nel piano, cioè considerare una trasformazione

$$\Phi : (u,v) \in T \longrightarrow (x,y) \in D \tag{1}$$

che porta ad esprimere la funzione integranda in termini delle nuove coordinate u, v. Il dominio D viene trasformato in T.

Trasformazione di coordinate

Sia T un dominio regolare del piano u, v. Sia $\Phi : T \longrightarrow D$ definita dalle funzioni:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \qquad (u, v) \in T,$$

sia $\Phi \in C^1(T)$ e $D = \Phi(T)$.

Si definisce matrice Jacobiana della trasformazione Φ, la matrice cosi definita

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

e il determinante Jacobiano, che si indica con $J_\Phi(u, v)$, è il determinante di $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, ovvero

$$J_\Phi(u, v) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = x_u y_v - x_v y_u .$$

Teorema (Teorema di cambiamento di variabili)

Siano T, D domini regolari di $\mathbb{R}^2$. Sia $\Phi : T \longrightarrow D$ inveribile, $\Phi \in C^1(T)$ e

$$J_\Phi(u,v) = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \neq 0 \qquad (u,v) \in T.$$

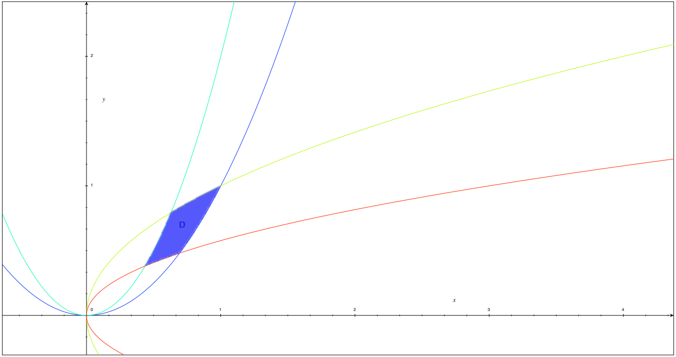
Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_T f(x(u,v),y(u,v)) \left| J_\Phi(u,v) \right| dudv \tag{1}$$

L'elemento infinitesimo di area *dxdy* si trasforma nell'elemento di area $|J_\Phi(u,v)|\, dudv$.

Esempio

Calcolare l'area del dominio D del piano delimitato dalle parabole $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ *e* $x = 3y^2$.



Esempio

Poniamo:

$$u = \frac{y}{x^2}, \; v = \frac{x}{y^2}.$$

Allora il dominio D corrisponde al rettangolo T del piano u, v, individuato dalle seguenti limitazioni:

$$T = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 3\}.$$

Osserviamo che

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \left| \begin{matrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \end{matrix} \right| = \frac{3}{x^2 y^2} = 3u^2 v^2$$

dunque

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{3u^2 v^2} \neq 0.$$

Esempio

L'area di D è dunque data da

$$\begin{aligned}\iint_D dxdy &= \iint_T \frac{1}{3u^2v^2}dudv \\ &= \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{u^2}du \int_1^3 \frac{1}{v^2}dv = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^2 \left[-\frac{1}{v}\right]_1^3 = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

2. Integrali doppi in coordinate polari

LEZIONE: CAMBIAMENTO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI DOPPI

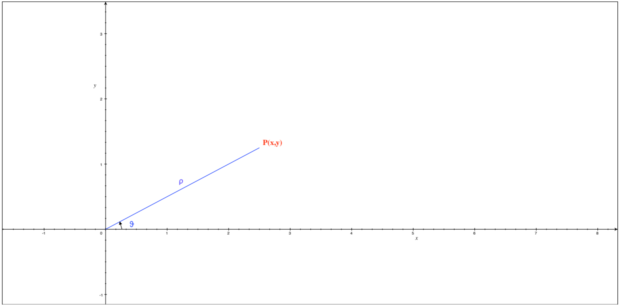
Coordinate polari

Come appena osservato, un opportuno cambio di variabili permette di trasformare un dominio non normale in un dominio normale dove quindi è possibile usare le formule di riduzione per il calcolo dell'integrale.

Ad esempio se il dominio D ha una simmetria di tipo radiale si esprime facilmente in coordinate polari. Un cerchio, una corona circolare, un settore circolare, in coordinate polari diventano rettangoli. Ricordiamo come vengono definite le coordinate polari di un punto.

Coordinate polari

La posizione di un punto P del piano è individuabile per mezzo delle coordinate cartesiane (x, y) o per mezzo delle coordinate polari (ρ, θ).
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ è la distanza di P dall'origine O e θ è la misura in radianti dell'angolo che OP forma con il semiasse positivo delle x.



Le coordinate cartesiane e polari sono legate dalle seguenti formule di trasformazione:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \tag{2}$$

che possiamo utilizzare come formule di cambiamento di variabili. La trasformazione individuata non soddisfa però le ipotesi del teorema di cambiamento di variabili.
Osserviamo inoltre che

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

che si annulla nell'origine.

Si dimostra comunque che vale il seguente risultato:

Formula di cambiamento di variabili, da coordinate cartesiane in polari

Sia $f(x, y)$ una funzione continua nel dominio regolare D, allora

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_{polare}} f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\ \rho\ d\rho\ d\theta. \qquad (3)$$

dove si è indicato con D_{polare} la rappresentazione di D in coordinate polari, cioè

$$D_{polare} = \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi] : (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) \in D\}$$

Esempio 1

Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ *esteso* al cerchio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Bisogna calcolare l'integrale

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2)\,dxdy.$$

Vogliamo utilizzare la formula (3). Se descriviamo D in coordinate polari otteniamo le seguenti limitazioni su ρ e θ:

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

cioè il dominio D_{polare} è il rettangolo $[0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Esempio 1

Usando (3) si ottiene che

$$
\begin{aligned}
&\iint_D (1 - x^2 - y^2) dxdy \\
= \quad &\iint_{D_{polare}} (1 - (\rho \cos\theta)^2 - (\rho \operatorname{sen}\theta)^2)\ \rho\ d\rho\ d\theta \\
= \quad &\iint_{D_{polare}} (1 - \rho^2)\ \rho\ d\rho\ d\theta.
\end{aligned}
$$

Il dominio D_{polare} è normale rispetto all'asse ρ e all'asse θ, per cui, usando le formule di riduzione si ottiene

$$
\iint_{D_{polare}} (1 - \rho^2)\ \rho\ d\rho\ d\theta. = \int_0^1 \rho(1 - \rho^2)\ d\rho \int_0^{2\pi} d\theta
$$

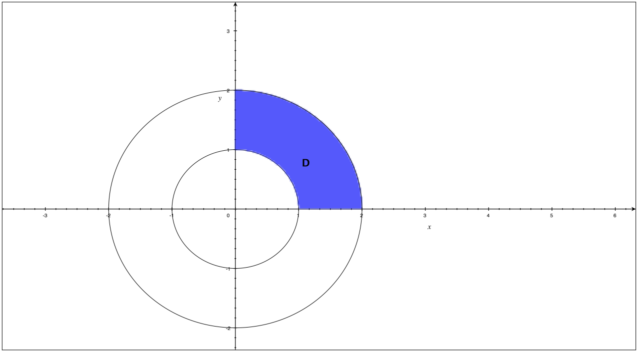
$$
= \quad 2\pi \int_0^1 \rho(1 - \rho^2)\ d\rho\ = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}
$$

Esempio 2

Calcolare

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dxdy,$$

dove D è la porzione di corona circolare centrata nell'origine di raggio interno 1 *e raggio esterno* 2 *che si trova nel primo quadrante.*



Esempio 2

Se descriviamo D in coordinate polari otteniamo le seguenti limitazioni su ρ e θ:

$$\begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

cioè il dominio D_{polare} è il rettangolo $[1,2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Utilizziamo la formula (3):

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} dxdy &= \iint_{D_{polare}} \frac{(\rho \cos\theta)(\rho \operatorname{sen}\theta)}{(\rho\cos\theta)^2 + (\rho \operatorname{sen}\theta)^2} \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \iint_{D_{polare}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, \rho \, d\rho \, d\theta \end{aligned}$$

Esempio 2

Il dominio D_{polare} è normale, per cui usando le formule di riduzione si ottiene

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_{polare}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \ \rho \ d\rho \ d\theta \\
= \ & \int_1^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \ \rho \ d\theta \\
= \ & \int_1^2 \rho \ d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \ d\theta \\
= \ & \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 \left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(2 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$