Approfondimenti

Rinaldo Rui

ultima revisione:
14 gennaio 2025

5 Oscillazioni e Onde

5.1 Lezione #21

5.1.1 Fenomeni Ondulatori

I **fenomeni ondulatori** riguardano campi molto diversi, ma sono descritti dalle stesse equazioni. Si manifestano come oscillazioni, suono, luce, onde radio, terremoti...; sono **perturbazioni** di un qualche elemento con particolari proprietà fisiche. Le onde hanno origine in un determinato punto dello spazio, dove risiede la **sorgente** della perturbazione, e si propagano con una certa velocità nel mezzo circostante.

Le **onde meccaniche** si propagano in un **mezzo** che oscilla, trasportando in questo modo la perturbazione, mentre le **onde elettromagnetiche** sono oscillazioni del campo elettromagnetico (onde radio, luce, raggi X) e si propagano anche nel vuoto, e saranno argomento del corso di Fisica al II anno, ma la teoria qui descritta si applica anche ad esse.

Si definiscono **onde trasversali** le oscillazioni **perpendicolari** alla direzione di propagazione e **onde longitudinali** le oscillazioni **parallele** alla direzione di propagazione. Esempio: la corda vibrante è un'onda trasversale, il suono è un'onda longitudinale. Le onde longitudinali si possono manifestare in qualunque mezzo, mentre le onde trasversali sono generate da forze di richiamo che tendono a ripristinare la forma iniziale del mezzo, e quindi sono presenti solo nei solidi, dove appunto è possibile la compresenza di entrambe le onde (terremoti). Nei liquidi si possono avere onde trasversali, quali ad esempio le onde del mare, ma in questo caso la forza di richiamo è la gravità (quindi una forza esterna al mezzo).

5.1.2 Onde Trasversali su una corda elastica

Prendiamo in considerazione il tratto di corda di massa dm [fig. 1] La corda è soggetta alle tensioni applicate ad entrambi gli estremi e prima della perturbazione devono essere uguali in quanto il tratto di corda è fermo. Applicando una piccola perturbazione alla corda in modo che questa si muova lungo l'asse y ma non scorra lungo l'asse x, si formano due angoli θ_A e θ_B rispetto all'asse x, ed uno scostamento verticale tra i due punti ($y_A = 0$ e $y_B = dy$). Se risolviamo l'equazione della dinamica per le due componenti x e y, otteniamo

$$F_x = T_B \cos\theta_B - T_A \cos\theta_A = 0$$

e

$$F_y = T_B \sin\theta_B - T_A \sin\theta_A = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Per valori di $\theta \ll 1$ rad [1] valgono le approssimazioni: $\cos\theta_A \simeq \cos\theta_B \simeq 1$ e

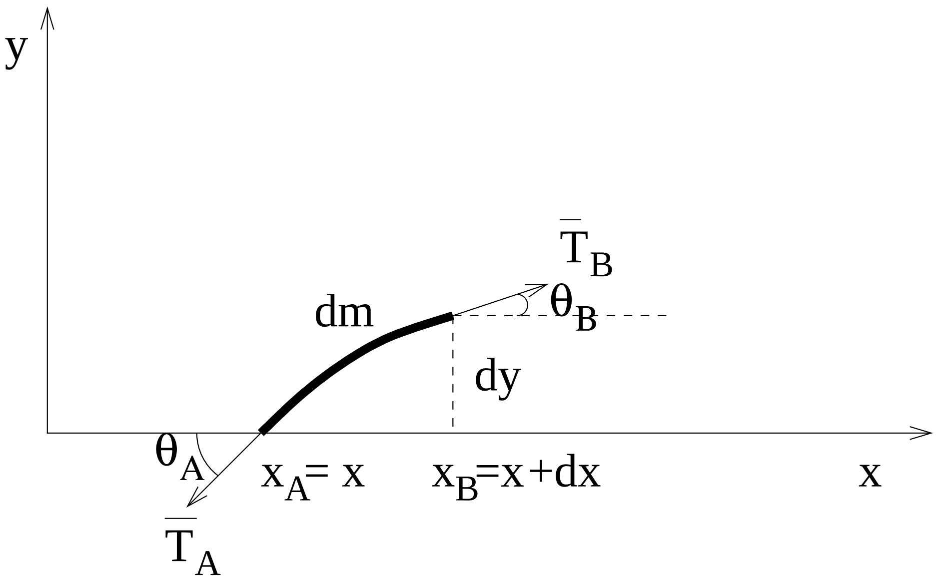

Figura 1: Tratto di corda soggetto a tensione

$\sin\theta \simeq \tan\theta$, e quindi

$$F_x = 0 \rightarrow T_A = T_B = T$$

e

$$F_y = T \tan\theta_B - T \tan\theta_A$$

Ma $\tan\theta = \partial y / \partial x$, per cui

$$F_y = T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \right] = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \ ,$$

con μ = densità lineare. Considero ora

$$y'(x) \equiv \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \quad \text{e} \quad y'(x+dx) \equiv \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B$$

[1]fino a $15° \simeq 0.4$ rad l'errore che si commette nell'approssimare il seno alla tangente è di circa il 4%

e sostituendo e dividento tutto per dx ottengo

$$T\left[\frac{y'(x+dx)-y'(x)}{dx}\right]=\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ .$$

la quantità μ/T ha la dimensione dell'inverso del quadrato di una velocità $v=\sqrt{T/\mu}$ da cui

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ .$$

L'espressione appena trovata prende il nome di **equazione differenziale delle onde**. Vedremo più avanti che questa equazione differenziale rappresenta un'onda che si propaga proprio con velocità v nella direzione dell'asse x.

Il caso appena analizzato rappresenta quindi un'onda trasversale in quanto l'oscillazione della corda avviene in modo perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda. Si osserva che la propagazione e' tanto più veloce quanto maggiore è la tensione e minore il peso della corda. A titolo di esempio, per un filo d'acciaio con densità lineare $\mu = 0.025$ kg/m [2] , teso da una forza di 10 N, si ricava il valore di $v=\sqrt{10/0.025}=20$ m/s.

5.1.3 Onde Sonore (Longitudinali) nei fluidi (compressibili)

Prima di iniziare dobbiamo porre alcune condizioni che ci permettano di fare alcune importanti approssimazioni; la perturbazione e' rapida e causa variazioni di pressione ma non flusso di molecole, la regione interessata è maggiore del libero cammino medio delle molecole (diversamente potremmo non avere urti...), i fronti di perturbazione sono piani e gli spostamenti indotti sull'asse x dipendono solo da x e da t (e non da y e z). Inizialmente l'elemento infinitesimo di massa dm di fluido imperturbato ha densità ρ_0 e volume dato dal prodotto della superficie S definita nel piano yz per la lunghezza dx, e si trascurano possibili variazioni della superficie S a causa della perturbazione. La perturbazione è descritta da una funzione $s(x,t)$ e la sorgente è una forza

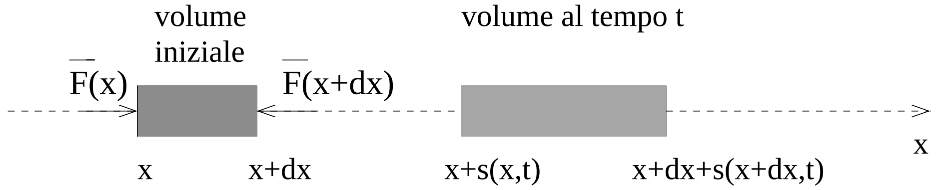

Figura 2: Perturbazione prodotta da una variazione di pressione

[2]equivale ad un cavo d'acciaio di circa 1 mm di raggio; infatti $S=\pi r^2=3.14\ 10^{-6}$ e quindi $\rho=\mu/S=0.025/(3.14\ 10^{-6})=7.9\ 10^3 kg/m^2$.

applicata ad un volume iniziale del fluido [fig. 2]. Le condizioni iniziali sono $s(x,0) = s(x+dx,0) = 0$. Quindi all'inizio la perturbazione si trova in x ed al tempo t si trova in $x + s(x,t)$. Analogamente a quanto già visto per il moto dei fluidi, applicando sulle due superifici unitarie in x e $x + dx$ due forze di superficie $\vec{F}(x)$ ed $\vec{F}(x+dx)$ [fig. 2], risulta

$$\vec{F}(x) + \vec{F}(x+dx) = dm\vec{a}$$

dove $\vec{a}$ rappresenta l'accelerazione della perturbazione $s(x,t)$. L'equazione lungo l'asse x diventa

$$F_x(x) - F_x(x+dx) = dm\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

Ma $F_x = p(x)S$ e $dm = \rho_0 S dx$, sostituendo

$$p(x)S - p(x+dx)S = \rho_0 S\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}dx$$

$$-\frac{p(x+dx) - p(x)}{dx} = \rho_0\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \ . \qquad (1)$$

Abbiamo quindi trovato una relazione tra la (variazione della) pressione e la variazione della perturbazione in funzione del tempo t (1). La perturbazione comporta anche una variazione del volume dell'elemento di massa dm del fluido e, per il principio di conservazione della massa, una corrispondente variazione della sua densità. Detta ρ la densità del fluido perturbato, la massa dm risulta:

$$dm = \rho_0 S dx = \rho S[(x + dx + s(x+dx,t)) - (x + s(x,t))]$$

$$\rho_0 dx = \rho[dx + s(x+dx,t) - s(x,t)] \ ,$$

ma

$$s(x+dx,t) - s(x,t) = ds(x,t)$$

e dividendo tutto per ρdx si ottiene

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 + \dfrac{\partial s}{\partial x}}$$

La derivata di s rispetto a x è una derivata parziale in quanto $s = s(x,t)$ (anche se abbiamo omesso di indicare le variabili per semplicità). Essendo $|\partial s/\partial x| \ll 1$ risulta [3]

$$\rho \simeq \rho_0\left(1 - \frac{\partial s}{\partial x}\right)$$

[3] quando l'ampiezza dell'onda è piccola rispetto alla lunghezza d'onda. Se ad esempio $s(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$, risulta $\partial s/\partial x = Ak\cos(kx - \omega t)$. Ma $k = 2\pi/\lambda$ e $|cos| \leq 1$ per cui $|\partial s/\partial x| \leq 2\pi A/\lambda$. Nel caso del suono nell'aria $\lambda \sim 10^{-1}$ m ($\nu = 3000$ Hz), mentre le ampiezze sono $\sim 10^{-9} m$, da cui $A \ll \lambda/2\pi$ e quindi $|\partial s/\partial x| \ll 1$. Infine per $|x| \ll 1$, sviluppando in serie di Taylor, $1/(1+x) \simeq 1 - x$.

e derivando rispetto ad x

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \tag{2}$$

Abbiamo ricavato una relazione tra la (variazione della) densità ρ e la variazione della perturbazione in funzione dello spostamento x, (2). Ci resta solo da trovare una relazione tra la pressione e la densità ed eliminare quest'ultima. Per farlo sviluppiamo in serie di Taylor

$$p(\rho) = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \cdots$$

e derivando rispetto ad x risulta, fermandosi al primo ordine [4]

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} \frac{\partial(\rho - \rho_0)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Definiamo ora la costante K_0

$$K_0 = \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0}$$

che assieme all'equazione (2) ci permette di scrivere

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -K_0 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \tag{3}$$

Il confronto tra le equazioni (1) e (3) ci dà alla fine

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{K_0} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

che rappresenta l'equazione di un onda con $v = \sqrt{K_0/\rho_0}$.

La costante K_0 appena introdotta nasce dalla definizione operativa di *Bulk modulus* [5]

$$K(V) = -V \frac{\partial p}{\partial V}$$

che rappresenta la variazione di pressione in funzione del cambiamento di volume. Poiché il volume è legato alla densità dalla semplice relazione $V = m/\rho$, risulta $\partial \rho / \partial V = -\rho/V$, e quindi

$$K(\rho) = -V \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial V} = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

[4] la pressione atmosferica e' circa 10^5 Pa, le perturbazioni sono di 10^{-2} Pa, quindi sette ordini di grandezza inferiori alla pressione atmosferica

[5] vedi gli appunti della lezione sulla Dilatazione Termica

che, calcolata in ρ_0 equivale alla costante K_0 già vista. La velocità di un'onda aumenta con l'incomprimibilità e diminuisce con la densità, ma queste due grandezze vanno generalmente nella stessa direzione, pertanto si osserva che la velocità non cambia troppo in funzione del mezzo in cui viaggia; ad esempio l'acqua e' mille volte più densa dell'aria, ma a causa della maggiore incomprimibilità ($K = 2.2 \times 10^9$ Pa) la velocità del suono nell'acqua è circa quattro volte maggiore che nell'aria.

Esempio: velocità di un'onda nell'aria (approssimata ad un gas perfetto, biatomico $\gamma = 7/5$). Si può pensare che la compressione del gas sia isoterma oppure adiabatica [6]. Il *Bulk modulus* nei due casi è [7].

$$K_T = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -V \left(-\frac{nrT}{V^2}\right) = p \to v = \sqrt{\left(\frac{p}{\rho}\right)_{\rho_0}}$$

$$K_S = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = -V \left(-\frac{\gamma p}{V}\right) = \gamma p \to v = \sqrt{\left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)_{\rho_0}}$$

dove il pedice S per il caso adiabatico sta ad indicare una trasformazione isoentropica. Quindi la velocità del gas in regime adiabatico è maggiore che a temperatura costante. Nell'ipotesi di pressione atmosferica ($p_0 = 1.01325\ 10^5$ Pa), a $T = 20°$, ed aria secca ($\rho_0 = 1.2041$ kg/m^3) si ricavano rispettivamente le due velocità $v_T = 290.1$ m/s e $v_S = 343.2$ m/s. La seconda velocità trovata è quella maggiormente in accordo con i dati sperimentali (343.8 m/s).

5.1.4 Onde Elastiche nei solidi

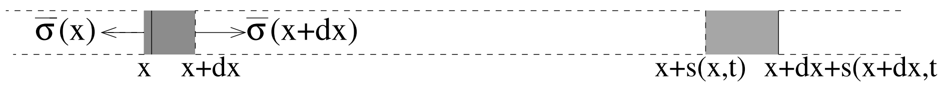

Figura 3: Perturbazione prodotta da una forza elastica

Come si può capire dalla figura 3, le considerazioni sono analoghe a quanto fatto per le onde di pressione in un fluido, solo che in questo caso non si ipotizza una variazione di densità del fluido, ma si utilizza la legge di Hooke che lega linearmente la forza applicata ad un solido elastico alla sua deformazione. Nel caso di una sbarra, omogenea di sezione S costante, la dilatazione (strain) lineare è definita come $\epsilon = \Delta L/L$, con L lunghezza del tratto di materiale preso in considerazione (ϵ è una grandezza adimensionale e, moltiplicata per cento, rappresenta un valore percentuale). Nel caso in esame la perturbazione del mezzo modifica la lunghezza dx ($\equiv L$) in $dx + ds$ ($\equiv L + \Delta L$), e quindi $\epsilon = \partial s/\partial x$ (s dipende sia da x che da t). Detta S la

[6] Il calore sviluppato dalla compressione non ha tempo di trasferirsi all'aria circostante prima della successiva immediata dilatazione a causa della bassa "diffusività" termica dell'aria, che è a proporzionale al numero di urti, ovvero all'inverso del libero cammino medio, dei "fononi" (che sono i portatori dell'energia termica)

[7] Per una trasformazione adiabatica è $pV^\gamma = cost$ per cui $d(pV^\gamma) = pdV^\gamma + V^\gamma dp = 0$ da cui $\gamma pV^{\gamma-1}dV + V^\gamma dp = 0$ ed infine $dp/dV = -\gamma p/V$.

sezione della sbarra si definisce la trazione (stress) $\vec{\sigma} = \vec{F}/S$, ed applicando la legge di Hooke, risulta, in modulo

$$\sigma = Y\epsilon \rightarrow \sigma = Y\frac{\partial s}{\partial x}$$

Y = modulo di Young, ed è una grandezza caratteristica del mezzo elastico (viene anche detto modulo di elasticità). Derivando σ rispetto ad x si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = Y\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \ .$$

Analogamente a quanto già visto per le onde trasversali, se applichiamo in x e $x + dx$ trazioni (di opposta direzione) $\vec{\sigma}(x)$ e $\vec{\sigma}(x + dx)$ [fig. 3], l'equazione della dinamica diventa (per la componente x)

$$-\sigma(x) + \sigma(x + dx) = \rho dx\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

$$\frac{\sigma(x + dx) - \sigma(x)}{dx} = \rho\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

da cui

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\rho}{Y}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

con

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \ .$$

Osservazione finale. In una sbarra elastica abbiamo affermato che la densità fosse costante, per cui ogni deformazione in x comporta necessariamente una variazione della sezione S della sbarra, dando quindi origine ad un'onda trasversale (che si propaga lungo x). Questo, semplificando, è quanto avviene nei terremoti, dove coesistono onde P (dette "*primae*") ed onde S ("*secundae*"); le onde P sono longitudinali di pressione ed elastiche, con $v_P = \sqrt{M/\rho}$ dove $M = f(K, Y)$, mentre le *secundae* sono onde trasversali aventi $v_S = \sqrt{G/\rho}$ con $G = g(K, Y)$. La determinazione dei parametri M e G è argomento tipico di un corso di sismologia...