Consideriamo una trasf. di coord.

$$x_i' = x_i + \delta x_i(x,t) \qquad \text{dove } \delta x_i \ll 1$$

$$\begin{cases} p_h' = p_h + \delta p_h(p,q,t) \\ q_h' = q_h + \delta q_h(p,q,t) \end{cases}$$

Se la consideriamo come una trasf. attiva, ci dice che partiamo da $\bar{x}$ e arriviamo a un $\bar{x}'$ molto vicino a $\bar{x}$. $\rightsquigarrow$ TRASFORMAZIONE INFINITESIMA

Vediamo quando è CANONICA: usiamo P. di P. :

$$\{x_i', x_j'\} = \{x_i + \delta x_i, \; x_j + \delta x_j\} =$$

$$= \{x_i, x_j\} + \{x_i, \delta x_j\} - \{x_j, \delta x_i\} + \dots$$

ordini superiori

Le P.P. fondam. sono preservate se e solo se

$$\{x_i, \delta x_j\} - \{x_j, \delta x_i\} = 0$$

cioè

$$\sum_k E_{ik} \frac{\partial \delta x_j}{\partial x_k} - \sum_k E_{jk} \frac{\partial \delta x_i}{\partial x_k} = 0 \qquad (*)$$

Se chiamiamo $\Omega_{lm} \equiv \dfrac{\partial \delta x_l}{\partial x_m}$, $(*)$ può essere scritta in forma matriciale come:

$$\Omega E + E \Omega^T = 0$$

Per il Lemma 3 (alla fine di Lezione IFT26), qto implica che $\exists\ G(x,t)$ t.c.

$$\delta\bar{x} = E\,\bar{\nabla}_x(\epsilon G) = \epsilon\{\bar{x}, G\} \qquad (\bullet)$$

dove abbiamo introdotto il parametro $\varepsilon \ll 1$ affinché la trasformazione sia infinitesima con G generica.

Quindi ogni trasf. canonica infinitesima può essere scritta a partire da una funz. $G(x,t)$, che è detta GENERATORE DELLA TRASF. CANONICA

ES. Trasf. puntuali estese infinitesime

$$q' = q + \delta q(q) \longrightarrow q = q' - \delta q(q')$$

$$p' = p - \frac{\partial \delta q(q)}{\partial q} p$$

Partiamo ora da una famiglia a un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ di trasf. canoniche finite (cioè α non necessariam. "piccolo").

$$x_i' = w_i'(x,t;\alpha) = w_i'(x;\alpha) \qquad \text{con } w_i'(x,t;0) = x_i$$

qndo non dip. dal tempo

Vogliamo dimostrare che anche queste sono sempre generate da una funzione $G(x,t)$.

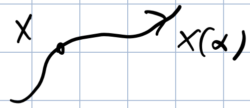
• Per semplicità consideriamo trasf. can. non dip. dal tempo

$$x_i' = w_i'(x;\alpha) \qquad (*)$$

Tali trasf. definiscono una curva nello sp. delle fasi

(stiamo consid. la trasf. can. come attiva, non come trasf. coord.)

$$x_i(\alpha) = w_i'(x;\alpha)$$



$$x_i(0) = x_i$$

• Prendiamo la versione infinitesima di (*), cioè consideriamo $\alpha \ll 1$. Allora posso espandere attorno $\alpha = 0$:

$$x_i' = x_i + \frac{dx_i(0)}{d\alpha}\cdot\alpha + O(\alpha^2) \qquad (\circ)$$

• D'altro canto se $w'(x;\alpha)$ è fam. di trasf. can. vuol dire che sono canoniche $\forall\alpha$ e quindi anche per $\alpha \ll 1$.

$\Rightarrow$ $(\circ)$ è TRASF. CAN. INFINITESIMA con

$$\delta x(x;\alpha) = \alpha\,\frac{dx_i(0)}{d\alpha}$$

Ma sappiamo che $\exists\, G(x)$ t.c. $\delta x_i(x;\alpha) = \alpha\{x_i, G\}$

$\Rightarrow$ $x_i(\alpha)$ deve soddisfare la condizione

$$\frac{dx_i(0)}{d\alpha} = \{x_i, G\} = \sum_j E_{ij}\frac{\partial G}{\partial x_j}(x) = (E\nabla_x G(x(0)))_i$$

- Lo stesso ragionamento lo possiamo fare partendo da qualsiasi pto della curva $x(\alpha)$ (cioè espandendo attorno ad ogni α con un $\delta\alpha \ll 1$). Otteniamo quindi l'eq.

$$\frac{dx_i(\alpha)}{d\alpha} = \sum_j E_{ij} \frac{\partial G}{\partial x_j}(x(\alpha)) \quad (\otimes)$$

← Eq. di Hamilton con Hamiltoniana G

$\Rightarrow$ $x_i(\alpha) = w_i(x;\alpha)$ può essere interpretato come FLUSSO HAMILTONIANO relativo all'Hamiltoniana G.

- In particolare, possiamo partire da una trasf. canonica infinitesima generata da $G(x)$ e domandarci come trovare la trasf. finita di cui essa è la versione infinitesima.

Abbiamo appena visto che la risposta è trovare il flusso Hamiltoniano relativo all'Hamiltoniana $G(x)$, cioè risolvere

$$\frac{d x(\alpha)}{d\alpha} = E \nabla_x G(x(\alpha))$$

← Stiamo "integrando" la trasf. infinitesima

$\Rightarrow$ Le trasf. canoniche a un param. (continuo) sono sempre generate da una variabile dinamica, detta GENERATORE.

- Se trasf. canonica $w'_i(x,t;\alpha)$ dip. dal tempo, le eq. sopra rimangono invariate, t è considerato come un parametro spettatore: la curva è data da

$$x_i(\alpha;t)$$

al variare di t ho una famiglia di curve.

param. della curva

$x_i(\alpha;t)$ è soluz. di eq. diff. (ora G dip. anche da t)

$$\frac{d}{d\alpha}x_i(\alpha) = \sum_j E_{ij}\frac{\partial G}{\partial x_j}(x(\alpha),t)$$

param. dell'eq. diff.
$\Rightarrow$ soluz. dipende da t.

- G è anche detto MOMENT MAP (μ) associata al gruppo di trasf.

- Dato un sist. Hamiltoniano con Hamiltoniana H, H stessa genera come trasf. il moto del sistema, cioè H è il GENERATORE di TRASLAZIONI TEMPORALI

TEOREMA DI NÖTHER in Meccanica Hamiltoniana

- Torniamo a $\delta x_i = \varepsilon \{ x_i, G \}$ (0)

Qta relazione ci permette di calcolare la variaz. infinitesima di una generica VARIABILE DINAMICA $f(x,t)$

$$\delta f(\bar{x},t) = f(\bar{x}+\delta\bar{x},t) - f(\bar{x},t)$$

← qta è data dal differenziale df applicato alla variazione $\delta\bar{x}$

$$df(x,t) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x_i} dx_i$$

$$= df(x,t)[\delta x] = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x_i} \delta x_i$$

← usiamo (0)

$$= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \epsilon \sum_{j=1}^{2n} E_{ij} \frac{\partial G}{\partial x_j} = \epsilon \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial G}{\partial x_j} = \epsilon \{ f, G \}$$

cioè, noto il generatore G, esso determina la variazione di f:

$$\delta f = \epsilon \{ f, G \}$$

- Consideriamo l'Hamiltoniana $H(x,t)$ del sistema e calcoliamo la sua variazione rispetto a una trasf. canonica infinitesima e indip. dal tempo generata da $G(x)$:

$$\delta H = H(x+\delta x) - H(x) = \varepsilon \{ H, G \}$$

$$\downarrow$$

H è invariante sotto trasf. infinitesima generata da $G(x)$ $\Longleftrightarrow$ G è una COST. DEL MOTO per le eq. di Ham. relative ad H.

Teorema di Nöther in meccanica Ham.

- Per trasf. canoniche dipendenti dal tempo, bisogna stare attenti a come si definisce la variazione di H; infatti per l'Hamilt. la trasf. non è solo data da $H(x) \mapsto H(x+\delta x)$: infatti c'è anche il termine correttivo K_0.

Vediamo come si generalizza $\delta H(x) = H(x+\delta x) - H(x)$:

- $H(x+\delta x) - H(x) = H(x') - \underbrace{H(x'-\delta x)}_{\tilde{H}(x')} =$
$= H(x') - K(x')$ (se $K_0 = 0$)

- Se trasf. dip. da t, la variaz. di H è

$$\delta H(x) = H(x') - K(x') =$$
$$= H(x+\delta x) - H(x) - K_0(x')$$
$$= \varepsilon\{H, G\} - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t}(x,t)$$

vedi sotto

(*) : Ricordiamo che $E\nabla_{\tilde{x}}K_0 = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(w(\tilde{x},t),t)$

Per trasf. infinitesime

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x+\delta x(x,t)) = \frac{\partial \delta x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon E \nabla_x G = E\nabla_x\left(\varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}\right) \leftarrow \text{funz. di } x$$

$$\Rightarrow \nabla_{\tilde{x}}K_0(\tilde{x},t) = \nabla_x\left(\varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}\right)(\tilde{x}-\delta x,t)$$

Definiamo $\Lambda(\tilde{x}) \equiv \varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}(\tilde{x}-\delta x,t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Lambda}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_k \varepsilon\frac{\partial^2 G}{\partial x_k \partial t}(\tilde{x}-\delta x,t)\frac{\partial(\tilde{x}_k - \overbrace{\delta x_k}^{O(\varepsilon)})}{\partial \tilde{x}_j}$$

$$= \sum_k \varepsilon\frac{\partial^2 G}{\partial x_k \partial t}\delta_{kj} + \cancel{O(\varepsilon^2)} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}\right)(\tilde{x}-\delta x,t)$$

$$\rightsquigarrow \nabla_{\tilde{x}}\Lambda(\tilde{x},t) = \nabla_x\left(\varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}\right)(\tilde{x}+\delta x,t)$$

$$\Rightarrow \nabla_{\tilde{x}}K_0(\tilde{x},t) = \nabla_{\tilde{x}}\Lambda(\tilde{x},t) \Rightarrow K_0(\tilde{x},t) = \Lambda(\tilde{x},t)$$ a meno di cost. irrilevante

$$\Rightarrow K_0(\tilde{x},t) = \varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}(\tilde{x}-\delta x,t)$$