MOMENTO ANGOLARE, ROTAZIONI e PARENTESI DI POISSON

Un esempio classico di gruppo di trasf. continuo è il gruppo delle ROTAZIONI $SO(3)$.

Data una particella con coord. cartesiane $\bar{q}=(q_1, q_2, q_3)$ e momenti coniugati $\bar{p}=(p_1, p_2, p_3)$, una rotazione agisce sullo spazio delle fasi ruotando simultaneamente $\bar{q}$ e $\bar{p}$:

$$\bar{p} \mapsto R\bar{p} \qquad \bar{q} \longmapsto R\bar{q} \qquad R \in SO(3)$$

Abbiamo visto che una rotazione infinitesima di angolo $\alpha \ll 1$ attorno all'asse $\hat{\omega}$ $(\|\hat{\omega}\|=1)$ è data dalla matrice

$$R(\alpha) = \mathbb{1} + \Omega(\alpha) \qquad \text{con} \quad \Omega_{ij} = -\alpha \sum_k \epsilon_{ijk}\, \hat{\omega}_k$$

Dalla meccanica Lagrangiana, sappiamo che se un sistema è invariante sotto $R(\alpha)$, allora la componente del momento angolare $\bar{M}$ lungo l'asse $\hat{\omega}$ è una COST. DEL MOTO.
Se qto sist. ammette una descrizione Hamiltoniana, da quanto detto sopra ci aspettiamo che $\bar{M}\cdot\hat{\omega}$ generi le rotazioni infinitesime $R(\alpha)$, cioè ci aspettiamo che

$$\underset{\delta\bar{p}}{\underset{\parallel}{\Omega(\alpha)\,\bar{p}}} = \alpha \left\{ \bar{p}, \bar{M}\cdot\hat{\omega} \right\} \iff \sum_k \Omega_{ik} p_k = \alpha \left\{ p_i, \sum_h M_h \hat{\omega}_h \right\}$$

e analogamente per $\bar{q}$.

Verifichiamo q.ta identità: ricordiamo che $\{p_i, M_h\} = \sum_\ell \epsilon_{\ell i h} p_\ell$

$$\alpha \sum_h \hat{\omega}_h \{p_i, M_h\} = \alpha \sum_{h,\ell} \epsilon_{\ell i h} p_\ell \hat{\omega}_h = \sum_\ell \left(-\alpha \sum_h \epsilon_{i\ell h} \hat{\omega}_h\right) p_\ell =$$

$$= \sum_\ell \Omega(\alpha)_{i\ell} \, p_\ell \quad //$$

In particolare, il MOMENTO ANGOLARE GENERA LE ROTAZIONI $SO(3)$.

(Analogamente si può dimostrare che $\bar{M}$ e $\bar{A}$ (vett. di Runge-Lenz) generano il gruppo $SO(4)$; vedi alla fine.)

In generale, la MOMENT MAP $\mu = \sum_{\alpha,\beta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cost.}}}{m_{\alpha\beta}} p_\alpha q_\beta$ genera

$$\left.\begin{aligned} \{q_\delta, \mu\} &= \sum_{\alpha,\beta} m_{\alpha\beta} q_\beta \delta_{\alpha\delta} = \sum_\beta m_{\delta\beta} q_\beta \\ \{p_\delta, \mu\} &= \sum_{\alpha,\beta} m_{\alpha\beta} p_\alpha (-\delta_{\beta\delta}) = -\sum_\alpha m^T_{\delta\alpha} p_\alpha \end{aligned}\right\}$$

Quanto visto sopra è un caso particolare in cui $m_{\alpha\beta}$ è ANTISIMMETRICA

Verifichiamo ora che se un'Hamiltoniana è invariante per rotazioni, allora $\{M_i, H\} = 0 \quad \forall i = 1,2,3$.

In generale, ora verifichiamo che se $f(p,q,t)$ è una funzione invariante per rotazioni, allora $\{M_i, f\} = 0$.

[Un caso particolare è $\{M_i, \bar{M}^2\} = 0$ che abbiamo già verificato.]

Vediamo come agisce M_h su una funz. INVARIANTE sotto ROTAZIONI:

in qto caso $f(\bar{p}, \bar{q}) = g(\underbrace{\bar{p}^2, \bar{q}^2, \bar{p}\cdot\bar{q}}_{\text{unici invarianti sotto rotaz. che posso definire usando i vett. } \bar{p} \text{ e } \bar{q}})$

Cioè f è composizione di $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mapsto g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

con le tre funzioni

$\alpha_1 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, $(\bar{p}, \bar{q}) \mapsto \bar{p}^2$ $\qquad$ $\alpha_2 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, $(\bar{p}, \bar{q}) \mapsto \bar{q}^2$ $\qquad$ $\alpha_3 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, $(\bar{p}, \bar{q}) \mapsto \bar{p}\cdot\bar{q}$

$$\{M_h, f\} = \sum_m \left(\frac{\partial M_h}{\partial q_m} \frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial M_h}{\partial p_m} \frac{\partial f}{\partial q_m} \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial M_h}{\partial q_m} \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial \alpha_\ell} \frac{\partial \alpha_\ell}{\partial p_m} - \frac{\partial M_h}{\partial p_m} \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial \alpha_\ell} \frac{\partial \alpha_\ell}{\partial q_m} \right) =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial \alpha_\ell} \sum_m \left(\frac{\partial M_h}{\partial q_m} \frac{\partial \alpha_\ell}{\partial p_m} - \frac{\partial M_h}{\partial p_m} \frac{\partial \alpha_\ell}{\partial q_m} \right)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial \alpha_\ell} \underbrace{\{M_h, \alpha_\ell\}}$$

dim. ora che qto è $= 0 \quad \forall h$ e $\forall \ell$

$$\{M_h, \bar{p}^2\} = \{M_h, \sum_j p_j^2\} = \sum_j 2p_j \{M_h, p_j\} =$$

$$= 2 \sum_j p_j \sum_k \epsilon_{hjk} p_k = 0$$

$$\{M_h, \bar{q}^2\} = \{M_h, \sum_j q_j^2\} = 2\sum_j q_j \sum_k \epsilon_{hjk} q_k = 0$$

$$\{M_h, \bar{p}\cdot\bar{q}\} = \{M_h, \sum_j p_j q_j\} = \sum_j \left(p_j \{M_h, q_j\} + q_j \{M_h, p_j\}\right)$$

$$= \sum_{jk} \left(p_j \epsilon_{hjk} q_k + q_j \epsilon_{hjk} p_k\right) =$$

$$= \sum_{jk} \underbrace{\epsilon_{hjk}}_{\text{antisim.}} \underbrace{(p_j q_k + p_k q_j)}_{\text{simm. in } j \leftrightarrow k} = 0$$

TRASLAZIONI

- $\{p_i, f(p,q)\} = -\dfrac{\partial f(p,q)}{\partial q_i}$

- $f(p, q+\delta q) - f(p,q) = \sum_j \dfrac{\partial f}{\partial q_j}\delta q_j = \varepsilon \dfrac{\partial f}{\partial q_{\bar{m}}} = \varepsilon\{f, p_{\bar{m}}\}$

$$\| $$

$$\varepsilon\{f, G\}$$

Se $\delta q_j = \varepsilon \delta_{j\bar{m}}$ ← indice fissato

TRASLAZ. LUNGO DIREZ. $\bar{m}$

$\Rightarrow$ generatore di traslaz. lungo direz. $i \longleftrightarrow p_i$

Generatori	Simmetrie
HAMILTONIANA (energia)	TRASLAZ. TEMPORALI
MOM. ANGOLARE	ROTAZ. SPAZIALI
QUANTITA' DI MOTO	TRASLAZ. SPAZIALI

Extra

$$\bar{A} = \frac{\bar{p}\times\bar{M}}{m} - k\frac{\bar{r}}{r} \quad (\cdot) \qquad \bar{M} = \bar{r}\times\bar{p} \qquad M_i = \sum_{jk}\epsilon_{ijk}x_j p_k$$

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

$$\{M_i, M_j\} = \sum_l \epsilon_{ijl} M_l$$

$$\{M_i, A_j\} = \sum_l \epsilon_{ijl} A_l \qquad (\bar{A} \text{ è un vett. sotto } SO(3))$$

$$\{A_i, A_j\} = -\frac{2H}{m}\sum_l \epsilon_{ijl} M_l \qquad (\cdot\cdot)$$

$$\delta_{lr}\delta_{ks} - \delta_{ls}\delta_{kr}$$

$$\{H, M_i\} = \{H, A_i\} = 0$$

Inoltre da def. $(\cdot)$ abbiamo

$$\bar{M}\cdot\bar{A} = 0 \qquad e \qquad \bar{A}^2 - k^2 = \frac{2H}{m}\bar{M}^2$$

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = (\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}$$

$$\bar{A}^2 = A_iA_i = \frac{1}{m^2}\sum_{lkrs}\epsilon_{ilk}p_lM_k\epsilon_{irs}p_rM_s + k^2 - \frac{2k}{mr}(\bar{p}\times\bar{M})\cdot\bar{r}$$

$$= \frac{1}{m^2}\left(\bar{p}^2\bar{M}^2 - \cancel{(\underbrace{\bar{p}\cdot\bar{M}}_{0})^2}\right) + k^2 - \frac{2k}{mr}\bar{M}^2 =$$

$$= \frac{2\bar{M}^2}{m}\left(\frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}\right) + k^2 = \frac{2H\bar{M}^2}{m} + k^2$$

$\bar{A}$ introduce solo un'ulteriore cost. del moto INDIPEND. (oltre a H e M_i)

↳ 5 cost. del moto in sp. delle fasi 6d ⇒ traiettoria giace su curva di livello.

Verifichiamo $(\cdot\cdot)$

$$\{M_s, V_k\} = \epsilon_{skl}V_l$$

$$A_i = \frac{1}{m}\epsilon_{imn}P_mM_n - k\frac{x_i}{r}$$

$$\{A_i, A_j\} = \frac{1}{m^2}\epsilon_{imn}\epsilon_{jrs}\{P_mM_n, P_rM_s\} - \frac{k}{m}\epsilon_{imn}\left\{P_mM_n, \frac{x_j}{r}\right\}$$

$$-\frac{k}{m}\epsilon_{jrs}\left\{\frac{x_i}{r}, P_rM_s\right\} + k^2\underbrace{\cancel{\left\{\frac{x_i}{r}, \frac{x_j}{r}\right\}}}_{=0}$$

$$\{P_mM_n, P_rM_s\} = P_m\{M_n, P_r\}M_s + P_m\{M_n, M_s\}P_r + M_n\{P_m, M_s\}P_r$$

$$= P_mM_s\epsilon_{nrk}P_k - P_rM_n\epsilon_{smq}P_q + P_mP_r\epsilon_{nsb}M_b$$

$$\frac{1}{m^2}\epsilon_{imn}\epsilon_{jrs}\{P_mM_n, P_rM_s\} = \Big\{P_mP_kM_s\epsilon_{jrs}(\delta_{ri}\delta_{km} - \delta_{rm}\delta_{ki})$$

$$\epsilon_{ijm} M_m = \epsilon_{ijn}\,\epsilon_{nrs}\, x_r p_s = x_i p_j - x_j p_i$$

$$- p_r p_q M_n (\delta_{mj}\delta_{qr} - \delta_{mr}\delta_{qj})\,\epsilon_{imn}$$
$$+ p_m p_r M_b (\delta_{ci}\delta_{bm} - \delta_{sm}\delta_{bi})\,\epsilon_{jrs} \Big\}\cdot 1/m^2$$

$$= \Big\{ \epsilon_{jis}\, \bar{p}^2 M_s - p_i p_r M_s \epsilon_{jrs} - \bar{p}^2 M_n \epsilon_{ijn} + p_m p_j M_n \epsilon_{imn}$$
$$+ \bar{p}\cdot\bar{M}\, \epsilon_{jri}\, p_r - \cancel{p_s p_r M_i}\, \epsilon_{jrs} \Big\} 1/m^2$$

$$= \Big\{ - p_i \epsilon_{jrs} p_r M_s + p_j \epsilon_{irs} p_r M_s + \epsilon_{ijn}\big(\underbrace{\cancel{\bar{p}\cdot\bar{M}}}_{=0}\, p_n - 2\bar{p}^2 M_n\big)\Big\} 1/m^2$$

$$\epsilon_{irs} p_j p_r M_s = \epsilon_{irs}\,\epsilon_{smn}\, p_j p_r x_m p_n = p_j p_r x_m p_n (\delta_{im}\delta_{rn} - \delta_{in}\delta_{rm}) = x_i p_j \bar{p}^2 - p_i p_j\, \bar{x}\cdot\bar{p}$$

$$= (x_i p_j - x_j p_i)\frac{\bar{p}^2}{m^2} - 2\,\epsilon_{ijn} M_n \frac{\bar{p}^2}{m^2} = -\frac{2}{m}\,\epsilon_{ijl} M_l \frac{\bar{p}^2}{2m}$$

$$\{p_m, \tfrac{1}{r}\} = -\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{1}{\sqrt{\cdots}} = \frac{1}{2r^3}2x_m = x_m/r^3$$

$$\epsilon_{imn}\cdot\{p_m M_n, \frac{x_j}{r}\} = \Big(-\delta_{mj}\frac{M_n}{r} + p_m\,\epsilon_{njr}\frac{x_r}{r} + M_n x_j \overbrace{\{p_m, \tfrac{1}{r}\}}^{x_m/r^3}\Big)\cdot\epsilon_{imn} =$$
$$= -\epsilon_{ijn}\frac{M_n}{r} + \frac{\delta_{ij}}{r}\,\bar{p}\cdot\bar{x} - p_j\frac{x_i}{r} + \epsilon_{imn}\, x_m M_n x_j \cdot\frac{1}{r^3}$$
$$= -\epsilon_{ijn}\frac{M_n}{r} + \delta_{ij}\frac{\bar{p}\cdot\bar{x}}{r} - p_j\frac{x_i}{r} + \frac{1}{r^3}\big(x_i x_j\, \bar{x}\cdot\bar{p} - p_i x_j r^2\big)$$
$$= -\frac{x_i p_j}{r} + \cancel{\frac{x_j p_i}{r}} + \delta_{ij}\frac{\bar{p}\cdot\bar{x}}{r} + \frac{1}{r^3} x_i x_j\, \bar{x}\cdot\bar{p} - \frac{x_i p_j}{r} - \cancel{\frac{x_j p_i}{r}}$$
$$= -\frac{2}{r} x_i p_j + \cancel{\frac{\delta_{ij}}{r}\bar{p}\cdot\bar{x}} + \frac{1}{r^3}\cancel{x_i x_j}\,\bar{x}\cdot\bar{p}$$

$$\epsilon_{jrs}\{\frac{x_i}{r}, p_r M_s\} = -\epsilon_{jmn}\{p_m M_n, \frac{x_i}{r}\} = -\uparrow \text{ con } i \leftrightarrow j$$
$$= \frac{2}{r} x_j p_i - \cancel{\frac{\delta_{ij}}{r}}\,\bar{p}\cdot\bar{x} - \frac{1}{r^3}\cancel{x_i x_j}\,\bar{x}\cdot\bar{p}$$

$$-\frac{k}{m}(\ldots + \ldots) = +\frac{2k}{mr}(x_i p_j - x_j p_i) = +\frac{2k}{mr}\,\epsilon_{ijl} M_l$$

$$\epsilon_{imn}\, x_m M_n x_j = \epsilon_{imn}\,\epsilon_{nrs}\, x_m x_j x_r p_s = x_m x_j x_r p_s (\delta_{ir}\delta_{ms} - \delta_{is}\delta_{mr})$$
$$= x_i x_j\, \bar{x}\cdot\bar{p} - p_i x_j r^2$$

$$\Rightarrow \{A_i, A_j\} = -\frac{2}{m}\epsilon_{ijl} M_l \left(\frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}\right) \quad //$$

MOMENT MAP

Es. $n=2$ $\qquad \mu = p_1 q_1 - p_2 q_2$

$$\delta p_1 = \varepsilon\{p_1, \mu\} = -\varepsilon p_1 \qquad \delta p_2 = \varepsilon p_2$$
$$\delta q_1 = \varepsilon\{q_1, \mu\} = \varepsilon q_1 \qquad \delta q_2 = -\varepsilon q_2$$

$$p_1' = e^{-\varepsilon} p_1 \qquad p_2 = e^{\varepsilon} p_2$$
$$q_1' = e^{\varepsilon} q_1 \qquad q_2 = e^{-\varepsilon} q_2$$

Gruppo $\mathbb{R}^*$ con moltiplicaz.

μ indip. da ε $\Rightarrow$ μ è cost lungo il flusso Ham. generato da μ stesso
$(\{\mu, \mu\} = 0)$

Posso quindi prendere come sottosp. (dello sp. delle fasi) ben def.

$$\mathcal{C} = \{(p_1, p_2, q_1, q_2) \mid \mu(p,q) = \lambda \in \mathbb{R}\} / \mathbb{R}^*$$

Qto è sempre fattibile: data moment map $\mu(p,q)$, qta definisce un sottosp. dello sp. delle fasi dato da

$$\mathcal{C} = \{(p,q) \mid \mu(p,q) = \lambda \in \mathbb{R}\} / G_\mu$$

dove G_μ è il gruppo a un parametro generato da μ.

$\mathcal{C}$ è chiamato il simplectic quotient di T^*Q $\left(\mathcal{C} = T^*Q /\!/ G_\mu\right)$

$\rightarrow$ $\mathcal{C}$ è ancora una varietà simplettica, cioè è ancora uno sp. delle fasi per un sist. Hamiltoniano.

Trasformazioni finite vs infinitesime

Abbiamo visto che $\qquad \tilde{x}(\varepsilon; x,t) = x + \delta x + \dots$

$$\delta x_i = \varepsilon \{ x_i, G(x,t) \} \qquad \stackrel{!}{=} x + \varepsilon \frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon}(0) + \dots$$

Vogliamo derivare qta espressione da

$$\dot{\tilde{x}} = \{ x, G \} (x = \tilde{x}(\varepsilon), t) \hookrightarrow \{x, G\}(x + \varepsilon \delta x, t)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d\tilde{x}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon}(0) + \varepsilon \frac{d^2\tilde{x}}{d\varepsilon^2}(0) + \dots$$

All'ordine zero qta espressione implica

$$\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon}(0) = \{x, G\}(x,t)$$

$$\underset{\frac{1}{\varepsilon}\delta x}{\overset{\|}{}} \quad \Rightarrow \quad \delta x(x,t;\varepsilon) = \varepsilon \{x, G\}(x,t)$$

ES.

$$\tilde{p}_1(\alpha) = \cos\alpha \, p_1 - \operatorname{sen}\alpha \, p_2 \qquad G = q_1 p_2 - q_2 p_1$$

$$\frac{d}{d\alpha}\tilde{p}_1(\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \, p_1 - \cos\alpha \, p_2$$

$$(E \nabla_x G)_1 = \sum_j E_{1j} \frac{\partial G}{\partial x_j} = \sum_{h=1}^{2} E_{1,h+2} \frac{\partial G}{\partial q_h} = -p_2 = \{p_1, G\}$$

$$(E \nabla_x G)(\tilde{p}(\alpha)) = -(\operatorname{sen}\alpha \, p_1 + \cos\alpha \, p_2) = \frac{d}{d\alpha}\tilde{p}_1(\alpha)$$