

# FISICA GENERALE

– Parte 3 –

## Statistica

**Link moodle:** <https://moodle2.units.it/course/view.php?id=16681>

Codice Teams del corso: gz0wuf4

# Programma delle lezioni

---

**Lezione 1:** Introduzione al corso, ai concetti generali e all'analisi degli errori; stima delle incertezze

**Lezione 2:** Errori casuali e sistematici, rappresentazione degli errori, cifre significative, discrepanza

**Lezione 3:** Errori assoluti e relativi, applicazioni particolari della propagazione degli errori, somma in quadratura

**Lezione 4:** Propagazione degli errori, funzioni di una o più variabili, formula generale; esempi ed esercizi

**Lezione 5:** Analisi statistica degli errori casuali; media, deviazione standard; errori sistematici

**Lezione 6:** Rappresentazione dei dati; istogrammi e distribuzioni, distribuzione limite

**Lezione 7:** Distribuzione normale o gaussiana (prima parte); livelli di confidenza

**Lezione 8:** Distribuzione gaussiana (seconda parte) e principio di massima verosimiglianza; rigetto dei dati

**Lezione 9:** Distribuzione binomiale

**Lezione 10:** Distribuzione di Poisson

**Lezione 11:** Metodo dei minimi quadrati; ripasso di eventuali argomenti a richiesta; esercizi

# Errori casuali

---

Come valutare l'**affidabilità** di una misura: ripeterla **più volte** ed esaminare i diversi valori ottenuti.

**Errori casuali:** incertezze sperimentali che possono essere riscontrate ripetendo le misure. Possono essere **trattati statisticamente**.

**Errori sistematici:** NON possono essere trattati statisticamente.

Esempio: misurare più volte un tempo o un periodo. Il tempo di reazione dell'osservatore nell'avviare e stoppare il cronometro introdurrà sovrastime o sottostime in modo casuale. Posso analizzare statisticamente lo sparpagliamento dei risultati ottenuti per stimare realisticamente questo tipo di errore. Altro esempio: misurare una lunghezza con un metro per cui bisogna interpolare tra le tacche della scala.

Comuni **sorgenti di errore casuali:** errori di giudizio dell'osservatore, disturbi meccanici dell'apparato di misura, problemi di definizione...

Più sorgenti di errore possono affliggere la stessa misura.

**Stima realistica degli errori casuali attraverso metodi statistici.**

Nelle misure che ipotizzeremo di fare per trattare statisticamente gli errori casuali, assumeremo che tutte le sorgenti di errore sistematico sono state identificate: errore sistematico trascurabile, perché inferiore della precisione richiesta.

# Analisi statistica degli errori casuali

---

Suppongo di dover misurare una grandezza  $x$  e che tutte le incertezze sulla mia misura siano di tipo **casuale** → posso trovare l'incertezza associata alla mia misura ripetendola più volte.

Ad esempio, la misura ripetuta di una stessa grandezza dà come risultato:

71, 72, 72, 73, 71

Qual è la **miglior stima**  $x_{\text{best}}$  della grandezza  $x$ ?

La miglior stima sarà la **media** dei valori trovati, ovvero:

$$x_{\text{best}} = \bar{x} = \frac{71 + 72 + 72 + 73 + 71}{5} = \frac{359}{5} = 71.8$$

# La media

---

**La media**  $\bar{x}$  di una serie di misure  $x_1, x_2, \dots, x_N$  è la miglior stima della grandezza  $\mathbf{x}$  basata sui valori misurati  $x_1, x_2, \dots, x_N$

Dati  $N$  valori misurati  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , la miglior stima per  $\mathbf{x}$  è di solito la media  $x_{\text{best}} = \bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum x_i}{N}$$

$$\sum x_i = \sum_{i=1}^N x_i = \sum_i x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_N$$

# La media

**La media**  $\bar{x}$  di una serie di misure  $x_1, x_2, \dots, x_N$  è la miglior stima della grandezza  $\mathbf{x}$  basata sui valori misurati  $x_1, x_2, \dots, x_N$

Dati  $N$  valori misurati  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , la miglior stima per  $\mathbf{x}$  è di solito la media  $x_{\text{best}} = \bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum x_i}{N}$$

$$\sum x_i = \sum_{i=1}^N x_i = \sum_i x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_N$$

**Esempio:** La misura ripetuta di una grandezza dà come risultato: 50, 52, 56, 52, 53, 54. La **media** dei valori è:

$$x_{\text{best}} = \bar{x} = \frac{50 + 52 + 56 + 52 + 53 + 54}{6} = \frac{317}{6} = 52.8$$

# La deviazione standard

Che incertezza associare alle singole misure?

La deviazione standard delle misure  $x_1, x_2, \dots, x_N$  è una stima dell'incertezza media delle misure  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , ed è ottenuta come segue.

Calcolo la **deviazione o residuo**  $d_i$  di  $x_i$  da  $\bar{x}$  : ottengo **quanto la singola misura differisce dalla media**.

Tabella 4.1. Calcolo delle deviazioni.

Numero della prova, $i$	Valore misurato, $x_i$	Deviazione $d_i = x_i - \bar{x}$
1	71	- 0.8
2	72	0.2
3	72	0.2
4	73	1.2
5	71	- 0.8
	$\bar{x} = 71.8$	$\bar{d} = 0.0$

# La deviazione standard

**La deviazione standard**  $\sigma_x$  di una serie di misure  $x_1, x_2, \dots, x_N$  è l'incertezza media nei singoli valori misurati  $x_1, x_2, \dots, x_N$

Una deviazione grande è indice di una misura poco precisa.

$d_i$  è piccolo se  $x_i$  è vicino a  $\bar{x}$ , mentre è grande se **la singola misura differisce molto dalla media.**

$d_i$  può essere sia positivo sia negativo.

**La media delle deviazioni è zero.** Questo è vero per qualsiasi set di misure  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Il modo migliore di caratterizzare l'attendibilità delle misure  $x_1, x_2, \dots, x_N$  è di elevare al quadrato tutte le deviazioni ( $\implies$  ottengo tutti numeri positivi) e poi mediare.

Facendo poi la radice quadrata, ottengo la **deviazione standard** di  $x_1, x_2, \dots, x_N$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

# La deviazione standard

La **deviazione standard**  $\sigma_x$  può essere descritta come la **deviazione quadratica media** (RMS, root mean square) di una serie di misure  $x_1, x_2, \dots, x_N$ : è utile per caratterizzare la loro affidabilità.

Tabella 4.2. Calcolo della deviazione standard.

Numero della prova, $i$	Valore misurato, $x_i$	Deviazione $d_i = x_i - \bar{x}$	$d_i^2$
1	71	-.8	.64
2	72	.2	.04
3	72	.2	.04
4	73	1.2	1.44
5	71	-.8	.64
	$\bar{x} = 71.8$		$\sum d_i^2 = 2.80$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum d_i^2 = \frac{2.80}{5} = 0.56$$

varianza

$$\sigma_x \approx 0.7$$

deviazione standard

L'incertezza media delle 5 misure 71, 72, 72, 73, 71 è quindi circa 0.7

# La deviazione standard

---

Generalmente, nel definire **la deviazione standard**  $\sigma_x$ , il fattore N al denominatore viene rimpiazzato da (N-1), e la deviazione standard di  $x_1, x_2, \dots, x_N$  è:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Ottengo così una varianza leggermente maggiore.

Questa correzione rispecchia il fatto che un grado di libertà è stato consumato nel calcolo della media (dato che la somma degli scarti dalla media deve essere zero, noti n-1 valori, l'ultimo è determinato automaticamente).

Così, se effettuo una sola misura (N=1) la varianza dà 0/0, ovvero  $\sigma_x$  non è definito, perché ho totale ignoranza dell'incertezza dopo una sola misura.

# La deviazione standard come incertezza in una singola misura

---

**La deviazione standard**  $\sigma_x$  caratterizza l'incertezza media delle misure  $x_1, x_2, \dots, x_N$  da cui è stata calcolata.

Suppongo di ottenere i valori  $x_1, x_2, \dots, x_N$  e poi di calcolare  $\bar{x}$  e  $\sigma_x$ . Se eseguo un'altra misura usando lo stesso setup (deriveremo questo risultato sotto l'ulteriore ipotesi che le misure siano distribuite normalmente più avanti), vi è una probabilità di circa il 70% che la nuova misura si trovi entro  $\sigma_x$  da  $\bar{x}$ .

Se il numero  $N$  di misure è grande,  $\bar{x}$  rappresenta una stima affidabile del valore vero di  $\mathbf{x}$ . Ho quindi circa il 70% di probabilità che una singola misura differisca meno di  $\sigma_x$  dal valore vero.

**$\sigma_x$  ha dunque il significato di incertezza  $\implies$  posso associare  $\delta x = \sigma_x$  ad una misura di  $\mathbf{x}$ , e stare certo al 70% circa che la misura si trovi entro  $\delta x$  dal risultato corretto.**

# La deviazione standard della media

---

**La deviazione standard della media**  $\sigma_{\bar{x}}$  caratterizza l'incertezza nella media  $\bar{x}$  assunta come la miglior stima per la grandezza  $\mathbf{x}$

Se  $x_1, x_2, \dots, x_N$  sono i risultati di  $N$  misure della stessa grandezza  $\mathbf{x}$ , allora la miglior stima per  $\mathbf{x}$  è  $\bar{x}$ .

La deviazione standard  $\sigma_x$  caratterizza l'incertezza media delle singole misure.

Il risultato  $x_{\text{best}} = \bar{x}$  rappresenta una combinazione opportuna di tutte le misure ed è più affidabile di qualunque delle altre misure considerate separatamente.

**Si può dimostrare che l'incertezza del risultato finale**  $x_{\text{best}} = \bar{x}$  **risulta essere**  $\sigma_x / \sqrt{N}$

**La deviazione standard della media è dunque:**  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$

# La deviazione standard della media

---

Per riassumere, basandoci sugli **N valori** misurati  $x_1, x_2, \dots, x_N$  della grandezza **x** possiamo stabilire come risultato finale:

$$\text{valore di } \mathbf{x} = x_{\text{best}} \pm \delta x$$

$$\text{dove } x_{\text{best}} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

**media**

$$\text{e } \delta x = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

**deviazione standard della media**

**La deviazione standard della media**  $\sigma_{\bar{x}}$  diminuisce lentamente all'aumentare del numero di misure N.

# La moda e la mediana

---

**La moda** di una serie di misure  $x_1, x_2, \dots, x_N$  è il numero che compare più frequentemente.

**Esempio:** La misura ripetuta di una grandezza dà come risultato: 50, 52, 56, 52, 53, 54. La **moda** dei valori è 52.

# La moda e la mediana

---

**La moda** di una serie di misure  $x_1, x_2, \dots, x_N$  è il numero che compare più frequentemente.

**Esempio:** La misura ripetuta di una grandezza dà come risultato: 50, 52, 56, 52, 53, 54. La **moda** dei valori è 52.

**La mediana** di una serie di misure  $x_1, x_2, \dots, x_N$  è il valore assunto dalla misura che si trova nel mezzo del set (dopo che l'insieme di misure è stato ordinato secondo un qualche criterio).

**Esempio A:** Un set di misure ordinato in ordine crescente è costituito dai valori: 40, 42, 42, 43, 46, 47, 48. La **mediana** dei valori è 43.

Se il set è costituito da un numero dispari di misure, la mediana occupa la posizione centrale.

**Esempio B:** Un set di misure ordinato in ordine crescente è costituito dai valori: 40, 42, 42, 43, 44, 46, 47, 48. La **mediana** dei valori è  $(43+44)/2=43.5$ .

Se il set è costituito da un numero  $N$  pari di misure, la mediana si ottiene facendo la media aritmetica dei valori nelle posizioni  $N/2$  ed  $(N/2 + 1)$ .

➔ Questi concetti torneranno particolarmente utili quando studieremo le distribuzioni.

# Errori sistematici

---

A differenza degli errori casuali, **NON** possono essere **trattati statisticamente**.

Esempi: misurare più volte un tempo o un periodo con un cronometro che marcia più lento (o più veloce) dell'effettivo scorrere del tempo. Il cronometro introdurrà sistematicamente (= spingendo il **risultato sempre nella stessa direzione**) sempre sovrastime (o sempre sottostime).  
Oppure misurare una lunghezza con un righello deformato.

Causa più ovvia di errori sistematici: **strumenti non tarati** opportunamente **o non calibrati** correttamente.  
Errore di parallasse: altra sorgente di errore sistematico, anche se può contribuire in misura minima anche all'errore casuale nella lettura di una scala o di uno strumento analogico.

Errori sistematici: **difficili da valutare** e da rilevare. Bisogna piuttosto prestare attenzione nel prevenirli e nell'**accertarsi che siano minori della precisione richiesta**.

**L'errore sistematico non può essere evidenziato confrontando varie misure della stessa grandezza.**

# Errori sistematici

Immaginiamo di voler comunque stimare l'incertezza totale  $\delta k$  sulla misura di una costante della molla  $k$  (ad es. misurando i tempi di oscillazione  $T$  di una massa  $m$  tramite l'equazione  $k = 4\pi^2 m/T^2$ )

$\delta k$  avrà una componente di errore casuale  $\delta k_{\text{casuale}}$  e una componente sistematica  $\delta k_{\text{sistematico}}$

Si può interpretare la deviazione standard della media  $\sigma_{\bar{k}}$  come componente casuale  $\delta k_{\text{casuale}}$

Come stimare  $\delta k_{\text{sistematico}}$ ?

Come combinare  $\delta k_{\text{casuale}}$  e  $\delta k_{\text{sistematico}}$  per ottenere  $\delta k = \delta k_{\text{tot}}$ ? Somma in quadratura?

Opzioni:  $\delta k_{\text{sistematico}}$  trascurabile, oppure noto, oppure stimabile ad una data %

se più grandezze misurate (es.  $T$  ed  $m$ ) affette da errore sistematico  $\implies$  propagazione degli errori

$\implies \delta k_{\text{sistematico}}$

Stima ragionevole nell'**incertezza totale**:  $\delta k_{\text{tot}} = \sqrt{(\delta k_{\text{casuale}})^2 + (\delta k_{\text{sistematico}})^2}$

$\implies$  Ogni apparato sperimentale ha una componente sistematica per cui  $\delta k_{\text{tot}} \neq 0$  anche se  $N \gg \implies \delta k_{\text{casuale}} = 0$

# Combinazione di misure distinte e indipendenti

---

Come combinare due o più misure separate e indipendenti di una singola grandezza fisica?  
È possibile fare una media delle varie misure?  
Si possono attribuire pesi diversi alle varie misure?

Due persone, A e B, misurano ciascuna la grandezza  $x$  e ottengono i seguenti risultati:

$$x = x_A \pm \sigma_A \qquad x = x_B \pm \sigma_B$$

Ciascuno dei risultati  $x_A$  e  $x_B$  è il risultato di parecchie misure dello stesso osservatore o nello stesso laboratorio, con ad es.  $x_A$  valor medio e  $\sigma_A$  deviazione standard della media.

Come combinare  $x_A$  e  $x_B$  per ottenere una singola miglior stima di  $x$ ?

Prima di procedere, bisogna accertarsi del fatto che le misure **non** siano **inconsistenti**:  
la discrepanza  $x_A - x_B$  NON deve essere significativamente più grande di  $\sigma_A$  e  $\sigma_B$

E poi?

# La media pesata

Se si usasse la media  $(x_A + x_B)/2$  NON si terrebbe conto dei valori di  $\sigma_A$  e  $\sigma_B$

La semplice media aritmetica dà uguale importanza ad entrambe le misure.

Se le due “incertezze”  $\sigma_A$  e  $\sigma_B$  non sono uguali, si può dare maggior peso alla misura più precisa (con  $\sigma$  minore)

È possibile definire dei **pesi**

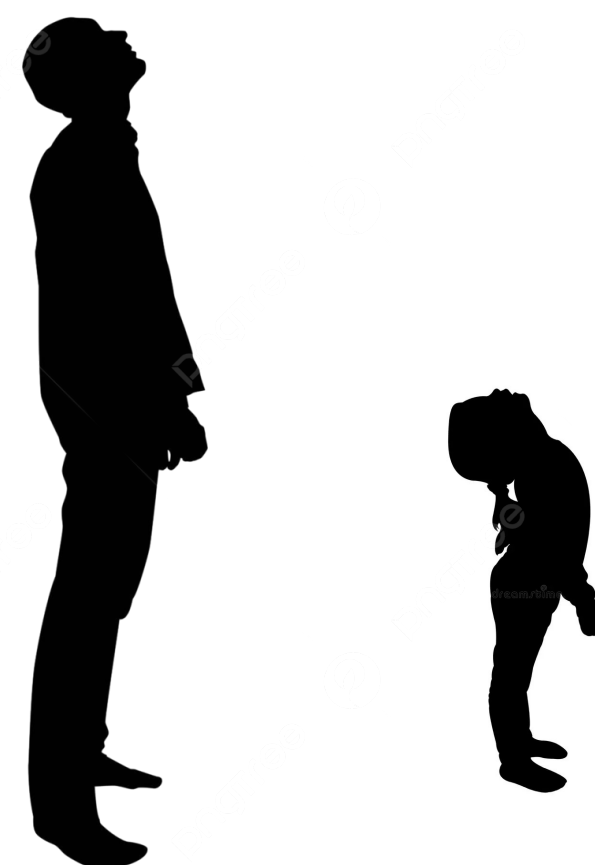
$$w_A = \frac{1}{\sigma_A^2} \quad \text{e} \quad w_B = \frac{1}{\sigma_B^2}$$

per calcolare una **media pesata**:

$$x_w = \frac{w_A x_A + w_B x_B}{w_A + w_B}$$

Se  $\sigma_A = \sigma_B$ , allora  $x_w$  si riduce alla semplice media.

Se  $\sigma_A < \sigma_B$ , allora  $x_w$  è più vicina ad  $x_A$  che ad  $x_B$ .



# La media pesata e l'incertezza della media pesata

---

È possibile generalizzare questo risultato per combinare  $N$  misure separate di una singola grandezza  $\mathbf{x}$ :

$$x_1 \pm \sigma_1, x_2 \pm \sigma_2, \dots, x_N \pm \sigma_N, \quad \text{con le incertezze } \sigma_i$$

La miglior stima per la grandezza misurata  $\mathbf{x}$  è la **media pesata**:

$$x_w = \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$$

dove i pesi sono l'inverso dei quadrati delle incertezze corrispondenti,  $w_i = 1/\sigma_i^2$ .

In questo modo una misura molto imprecisa (grande  $\sigma_i^2$  e piccolo  $w_i$ ) contribuisce molto poco al risultato finale (ad es. una misura 5 volte peggiore delle altre peserebbe 25 volte meno).

Applicando la formula generale per la propagazione degli errori alla  $x_w = f(x_1, \dots, x_N)$ , utilizzando la somma in quadratura, si ottiene il seguente **errore da associare a  $x_w$**  :

$$\sigma_{x_w} = \Delta x_w = \left( \sum_i w_i \right)^{-1/2}$$

# Esercizi per applicare quanto appreso in questa lezione (dal Taylor)

## Problemi

**Nota.** La presenza di un asterisco accanto al numero del problema indica che il problema è discusso, oppure che è dato il suo risultato, nella sezione Risposte alla fine del libro.

**\*4.1** (Sezione 4.2). Uno studente misura una grandezza  $x$  cinque volte, con i risultati

5, 7, 9, 7, 8.

Calcolare la media  $\bar{x}$  e la deviazione standard  $\sigma_x$ . (Fate il calcolo voi stessi; non premete i tasti della vostra calcolatrice! Dite quale definizione di  $\sigma_x$  usate).

**4.2.** (Sezione 4.2). Calcolare la media e la deviazione standard delle dieci misure riportate in (4.10). (I risultati sono dati nel testo; ma è importante che “facciate” realmente i calcoli da voi stessi. Dovete decidere come dare un aspetto ordinato ai vostri calcoli; una possibilità è mostrata in Tabella 4.2).

**\*4.3.** (Sezione 4.2). La media  $\bar{x}$  di  $N$  grandezze  $x_1, \dots, x_N$ , è definita come la loro somma divisa per  $N$ ; cioè  $\bar{x} = (\sum x_i)/N$ . La deviazione di  $x_i$  è la differenza  $d_i = x_i - \bar{x}$ . Mostrare chiaramente che la media delle deviazioni  $d_1, \dots, d_N$  è automaticamente zero.

Se non siete familiari con il simbolo  $\sum$ , può aiutarvi fare questo problema sia senza che con il simbolo. Per esempio, scrivete la somma  $\sum(x_i - \bar{x})$  come  $(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_N - \bar{x})$ , e raggruppate di nuovo.

**\*4.4** (Sezione 4.2). Per calcolare la deviazione standard  $\sigma_x$  di  $N$  misure  $x_1, \dots, x_N$ , occorre la somma  $\sum(x_i - \bar{x})^2$ . Provare che questa somma può essere riscritta come

$$\sum[(x_i - \bar{x})^2] = [\sum(x_i)^2] - N\bar{x}^2 \quad (4.27)$$

(Questo è un buon esercizio sull'uso del simbolo  $\sum$ . Il risultato è molto utile in pratica, ed è quello che tutte le calcolatrici tascabili usano per calcolare  $\sigma_x$ .)

**4.5** (Sezione 4.2). Ricalcolare la deviazione standard nel Problema 4.1 utilizzando l'identità (4.27).

**4.6** (Sezione 4.3). Uno studente misura il periodo di un pendolo tre volte e ottiene i risultati 1.6, 1.8, 1.7 (tutti in sec.). Quali sono la media e la deviazione standard? (Usare la definizione (4.9) della deviazione standard). Se lo studente fa una quarta misura, qual è la probabilità che questa nuova misura giaccia al di fuori dell'intervallo 1.6 – 1.8 sec? (Ovviamente questi numeri sono scelti “opportunamente”. Nel Capitolo 5 vedremo come risolvere questo genere di problema anche quando non lo sono).

**\*4.7** (Sezione 4.3).

(a) Calcolare la media  $\bar{t}$  e la deviazione standard  $\sigma_t$  delle seguenti trenta misure di un periodo  $t$  (tutte in sec). Vi occorre una calcolatrice, ma risparmierete la fatica di premere un mucchio di tasti se riconosce che occorre meditare soltanto le ultime due cifre, e se spostate il punto decimale di due posti a destra prima di fare i calcoli. Se la vostra

calcolatrice non calcola automaticamente le deviazioni standard, probabilmente dovrete usare l'identità (4.27).

8.16, 8.14, 8.12, 8.16, 8.18, 8.10, 8.18, 8.18, 8.18, 8.24  
8.16, 8.14, 8.17, 8.18, 8.21, 8.12, 8.12, 8.17, 8.06, 8.10  
8.12, 8.10, 8.14, 8.09, 8.16, 8.16, 8.21, 8.14, 8.16, 8.13

(b) Abbiamo visto che dopo molte misure possiamo aspettarci che circa il 70 per cento di tutti i valori giacciono entro  $\sigma_t$  di  $\bar{t}$  (cioè all'interno dell'intervallo  $\bar{t} \pm \sigma_t$ ). Nel Capitolo 5 mostreremo che possiamo anche aspettarci che circa il 95 per cento di tutti i valori giacciono entro  $2\sigma_t$  di  $\bar{t}$  (cioè all'interno dell'intervallo  $\bar{t} \pm 2\sigma_t$ ). Per le misure della parte (a), circa quante dovrete aspettarvi che giacciono “al di fuori” dell'intervallo  $\bar{t} \pm \sigma_t$ ?  
Quante lo fanno? Rispondete alle stesse domande per quanto riguarda il numero al di fuori di  $\bar{t} \pm 2\sigma_t$ .

**4.8** (Sezione 4.4). Calcolare la deviazione standard della media per le cinque misure del Problema 4.1. Quale dovrebbe essere il risultato finale dello studente, con la sua incertezza, per  $x$ ?

**\*4.9** (Sezione 4.4). Basandosi sulle trenta misure nel Problema 4.7, quale dovrebbe essere la vostra miglior stima per il periodo in questione e la sua incertezza, assumendo che tutte le incertezze siano casuali?

**4.10** (Sezione 4.4). Dopo aver misurato la velocità del suono  $u$  parecchie volte, uno studente conclude che la deviazione standard  $\sigma_u$  delle misure è  $\sigma_u = 10$  m/sec. Assumendo che gli errori siano tutti casuali, lo studente può raggiungere una precisione desiderata facendo un numero sufficiente di misure e mediando. Quante misure sono necessarie per ottenere un'incertezza finale di  $\pm 3$  m/sec? Quante per un'incertezza di soltanto 0.5 m/sec?

**\*4.11** (Sezione 4.5). Nella Tabella 4.3 sono riportate dieci misure sia della lunghezza  $l$  che della larghezza  $b$  di un rettangolo utilizzate per calcolare l'area  $A = lb$ . Se le misure fossero fatte in coppie (una di  $l$  e una di  $b$ ), allora sarebbe naturale moltiplicare ciascuna coppia insieme per ottenere un valore di  $A$ : il primo  $l$  per il primo  $b$  per ottenere il primo valore di  $A$ ; e così via. Calcolare i dieci valori risultanti di  $A$ ; la media,  $\bar{A}$ ; la deviazione standard  $\sigma_A$ ; e la deviazione standard della media,  $\sigma_{\bar{A}}$ . Confrontate i vostri risultati per  $\bar{A}$  e  $\sigma_{\bar{A}}$  con il risultato (4.18) ottenuto calcolando le medie  $\bar{l}$  e  $\bar{b}$ , e poi calcolando  $A$  come  $\bar{l}\bar{b}$ , con un'incertezza data dalla propagazione degli errori. (Per un numero grande di misure, i due metodi dovrebbero accordarsi).

**4.12** (Sezione 4.5) Completare i calcoli della costante della molla  $k$  nella Tabella 4.4. Poi calcolare  $\bar{k}$  e la sua incertezza (cioè  $\sigma_k$ ).

**\*4.13** (Sezione 4.6)

(a) Uno studente misura la velocità del suono come  $u = f\lambda$ , dove  $f$  è la frequenza mostrata sul quadrante di un oscillatore audio, e  $\lambda$  è la lunghezza d'onda misurata localizzando parecchi massimi in una colonna d'aria risonante.

Dal momento che ci sono parecchie misure di  $\lambda$ , esse possono essere analizzate statisticamente; e lo studente conclude che  $\lambda = 11.2 \pm 0.5$  cm. Vi è soltanto una misura di  $f = 3000$  Hz (fornita dall'oscillatore) e lo

# Esercizi per applicare quanto appreso in questa lezione (dal Taylor)

80 4. Analisi statistica degli errori casuali

studente non ha modo di giudicare la sua affidabilità. L'istruttore dice che l'oscillatore è "certamente affidabile all'1 percento"; allora lo studente assume un errore sistematico dell'1 percento in  $f$  (ma nessuno in  $\lambda$ ). Qual è il risultato dello studente per  $\nu$  e la sua incertezza? Il possibile errore sistematico dell'1 percento dovuto alla calibrazione dell'oscillazione è importante?

- (b) Se la misura dello studente è stata  $\lambda = 11.2 \pm 0.1$  cm, e la calibrazione dell'oscillatore fosse affidabile al 3 percento, quale dovrebbe essere stato il risultato? L'errore sistematico è importante?

124 7. Medie pesate

\*7.1 (Sezione 7.2)

- (a) Due misure della velocità del suono  $\nu$  danno i risultati  $334 \pm 1$  e  $336 \pm 2$  (entrambe in m/sec). Le considerereste consistenti? Se è così, calcolate la miglior stima per  $\nu$  e la sua incertezza.
- (b) Ripetete la parte (a) per i risultati  $334 \pm 1$  e  $336 \pm 5$ . In questo caso vale la pena di includere il secondo risultato?

\*7.2 (Sezione 7.2). Due studenti misurano una resistenza con metodi diversi. Ognuno fa dieci misure e calcola la media e la deviazione standard della media, con questi risultati:

$$\begin{array}{ll} \text{Studente } A, & R = 72 \pm 8 \text{ ohms;} \\ \text{Studente } B, & R = 78 \pm 5 \text{ ohms;} \end{array}$$

- (a) Includendo entrambe le misure, quali sono la miglior stima di  $R$  e la sua incertezza?
- (b) Quante misure circa dovrebbe fare lo studente  $A$  (usando la sua stessa tecnica) per ottenere il suo risultato con lo stesso peso di quello di  $B$ ?

7.3 (Sezione 7.2). Trovare la miglior stima e la sua incertezza basandosi sulle seguenti quattro misure di una grandezza:

$$1.4 \pm 0.5, \quad 1.2 \pm 0.2, \quad 1.0 \pm 0.25, \quad 1.3 \pm 0.2$$

7.4 (Sezione 7.2). Supponiamo che  $N$  misure della stessa grandezza  $x$  abbiano tutte la stessa incertezza. Mostrare chiaramente che in questa situazione la media pesata (7.10) si riduce alla media ordinaria,  $\bar{x} = (\sum x_i)/N$ , e che l'espressione (7.12) per l'incertezza si riduce alla familiare deviazione standard della media.

\*7.5 (Sezione 7.2). Date  $N$  misure  $x_1, \dots, x_N$  di una grandezza  $x$  con incertezze,  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ , la miglior stima per  $x$  è data dalla (7.10),  $x_{\text{best}} = (\sum w_i x_i) / (\sum w_i)$ , con i pesi  $w_i = 1/\sigma_i^2$ . Essa definisce  $x_{\text{best}}$  come una funzione di  $x_1, \dots, x_N$ . Usate la formula (3.47) per la propagazione degli errori per mostrare che l'incertezza in  $x_{\text{best}}$  è data dalla (7.12) come

$$\sigma_{x_{\text{best}}} = (\sum w_i)^{-1/2}.$$