

## Esercizio 1:

1) Dall'equazione dei gas perfetti si ottiene direttamente:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{n R} = \frac{p_1 V_1}{R}$$

2) Essendo l'espansione adiabatica  $\rightarrow pV^\gamma = \text{cost}$   
con  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} \rightarrow$  biatomico

$$\Rightarrow p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \quad \text{e sapendo che } V_2 = 2V_1$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{p_1}{2^\gamma} = p_1 \cdot 2^{-7/5}$$

Dall'equazione dei gas perfetti

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{n R} \stackrel{n=1}{=} \frac{p_1}{2^\gamma} \frac{2V_1}{R} = \frac{p_1 V_1}{R} \frac{1}{2^{\gamma-1}} = \frac{T_1}{2^{2/5}}$$

3) Essendo l'espansione reversibile si ottiene il lavoro integrando la pressione in  $dV$

$$\Rightarrow L = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} p V^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} =$$

$$\stackrel{pV^\gamma = \text{cost}}{=} p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1}{1-\gamma} (2^{1-\gamma} - 1)$$

$$= \frac{R T_1}{1-\gamma} (2^{1-\gamma} - 1) \stackrel{\gamma=7/5}{=} -\frac{5}{2} R T_1 (2^{-2/5} - 1)$$

4) Dalla formula della variazione di energia libera

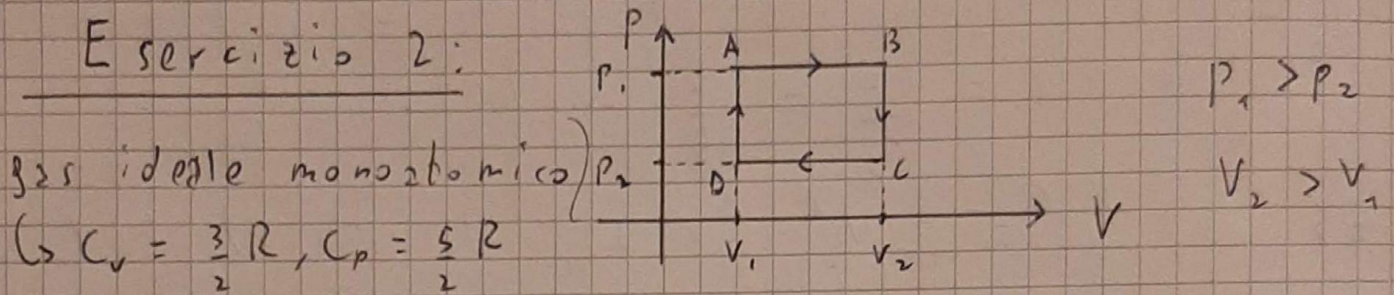
$$\Delta U = n C_v (T_2 - T_1) \stackrel{\text{biatomico}}{=} \frac{5}{2} R (T_1 \cdot 2^{-2/5} - T_1)$$

$$\Rightarrow L = -\frac{5}{2} R T_1 (2^{-2/5} - 1)$$

$$e \quad \Delta U = \frac{5}{2} R T_1 (2^{-2/5} - 1)$$

$\Rightarrow L = -\Delta U$ , in fatti dal primo principio della termodinamica  $L = -\Delta U + Q$  tuttavia  $Q = 0$  essendo l'espansione adiabatica

Esercizio 2:



1) Tutte le trasformazioni sono reversibili:

$$\Rightarrow L_{AB} = P_1 (V_2 - V_1), L_{BC} = 0, L_{CD} = P_2 (V_1 - V_2)$$

$$L_{DA} = 0 \Rightarrow L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}$$

$$\Rightarrow L = (P_1 - P_2) (V_2 - V_1)$$

A  $\rightarrow$  B trasformazione isobara  $\rightarrow C_p$

$$\Rightarrow Q_{AB} = n C_p (T_B - T_A) \stackrel{pV=nRT}{=} \frac{5}{2} P_1 (V_2 - V_1) > 0$$

B  $\rightarrow$  C trasformazione isocora  $\rightarrow C_v$

$$\Rightarrow Q_{BC} = n C_v (T_C - T_B) \stackrel{pV=nRT}{=} \frac{3}{2} V_2 (P_2 - P_1) < 0$$

C  $\rightarrow$  D Analogamente ad A  $\rightarrow$  B si ottiene

$$Q_{CD} = \frac{5}{2} P_2 (V_1 - V_2) < 0$$

D  $\rightarrow$  A Analogamente a B  $\rightarrow$  C si ottiene

$$Q_{DA} = \frac{3}{2} V_1 (P_1 - P_2) > 0$$

2) Il rendimento della macchina cresce con il lavoro totale che svolge durante un ciclo mentre decresce con il calore che il gas assorbe dall'esterno

$$\Rightarrow \eta = \frac{L}{Q_{\text{ass}}} = \frac{L}{Q_{\text{AB}} + Q_{\text{DA}}} = \frac{1010 \text{ J}}{6565 \text{ J}} = 0,15 //$$

La temperatura massima cresce proporzionalmente a  $pV$

$$\Rightarrow T_{\text{max}} \propto P_{\text{max}} V_{\text{max}} = P_1 V_2 \quad \text{mentre}$$

$$T_{\text{min}} \propto P_{\text{min}} V_{\text{min}} = P_2 V_1 \quad \rightarrow \text{ora possiamo ricavare il rendim. di un' m. di Carnot}$$

$$\Rightarrow \eta_c = 1 - \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}} = 1 - \frac{P_2 V_1}{P_1 V_2} = 0,75 //$$

3) Ora si suppone che il ciclo eseguito sia un "ciclo con rigenerazione"

$\Rightarrow$  Il calore ceduto dal gas viene immagazzinato in una riserva e nel momento in cui il gas dovrà assorbire calore per effettuare le trasformazioni richieste attingerà prima alla riserva interna ed in seguito, se necessario, all'ambiente esterno.

Dai risultati precedenti:

$$\rightarrow Q_{\text{AB}}^{\text{ass}} = 5050 \text{ J} \quad Q_{\text{BC}}^{\text{ced}} = -3030 \text{ J}$$

$$Q_{\text{CD}}^{\text{ced}} = -2525 \text{ J} \quad Q_{\text{DA}}^{\text{ass}} = 1515 \text{ J}$$

in questa caso la riserva basta per il ciclo

$$\Rightarrow Q_{\text{ass}}^{\text{dall'esterno}} = (5050 - 3030 + 1515 - 1515) \text{ J} = 2020 \text{ J} \Rightarrow \eta = \frac{L}{2020 \text{ J}} = 0,5 //$$

Abbiamo quindi ottimizzato l'efficienza della macchina termica  $\rightarrow \eta < \eta_R < \eta_C$

Si noti inoltre come il lavoro totale nel ciclo con rigeneratore sia rimasto lo stesso, infatti il ciclo termodinamico, e quindi le trasformazioni termodinamiche, rimangono sempre le stesse.

Esercizio 3:  $A = U - TS$

1)  $U$  è una funzione di stato,  $T$  pure ed  $S$  pure

$\Rightarrow A$  è funzione di stato in quanto funzione di funzioni di stato

$$2) dA = d(U - TS) = dU - d(TS) =$$

$$= dU - SdT - TdS \quad \text{non sappiamo se sia}$$

un gas perfetto o o che forse abbiamo  $U$  o  $S$   
tuttavia sappiamo che  $dS = \frac{\delta Q}{T}$

$$\Rightarrow dA = dU - \delta Q - SdT = -dL - SdT$$

Il principio

$$(dL = p dV) = -p dV - S dT = \left( \frac{\partial A}{\partial V} \right)_T dV + \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)_V dT$$

3)  $dA$  è un differenziale esatto

$$\Rightarrow \text{Th. di Schwarz} \rightarrow \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial A}{\partial V} \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)$$

→ Sostituendo i risultati ottenuti precedentemente  
si ottiene:  $dA = p = - \left( \frac{\partial A}{\partial V} \right)_T$ ,  $dS = - \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)_V$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} \right)_T //$$

$$4) \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \stackrel{pV = nRT}{=} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{nRT}{V} \right)_V = \frac{nR}{V} \left( \frac{\partial T}{\partial T} \right)_V$$

costanti  
↑

$$= \frac{nR}{V} //$$