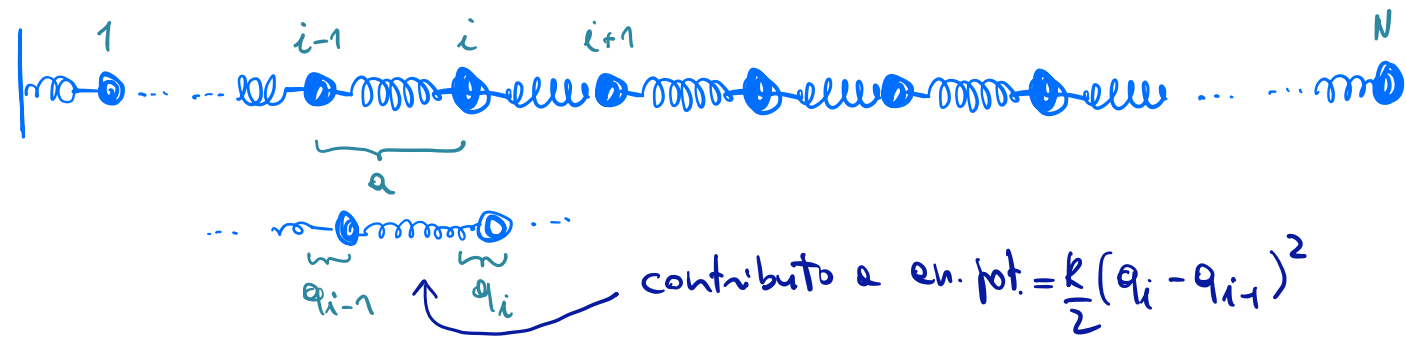


CATENA DI OSCILLATORI

- Consideriamo una catena di N materiali di masse m connessi da molle di cost. elastica k e distanti tra loro a (con molle a riposo). Chiamiamo q_i la distanza del pto i -esimo dalle posizioni di equilibrio:



- La Lagrangiana del sistema è $L = T - V$ dove

$$T = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N \dot{q}_i^2$$

$$V = \frac{k}{2} \sum_{i=0}^N (q_{i+1} - q_i)^2 \quad \leftarrow \text{accoppiate primi vicini}$$

$\nwarrow q_0 \equiv 0$

- Posso riscrivere

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a \left[\frac{m}{a} \dot{q}_i^2 - \underbrace{ka}_{\text{tensione}} \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{a} \right)^2 \right]$$

↑
massa per
unità di
lunghezza

→ densità nel
lim continuo

↑
qto ci dice l'elasticità delle
catene → tende a un valore finito
nel lim continuo
chiamato TENSIONE

- Limite CONTINUO: teniamo FINITE lunghezze l delle catene e la massa M e mandiamo

$$N \rightarrow \infty, \quad a = \frac{l}{N+1} \rightarrow 0, \quad m = \frac{M}{N} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{m}{a} \rightarrow \frac{M}{l} \equiv \rho$$

finite
(dens.)

- i diventa un indice continuo x :

$$q_i(t) \rightsquigarrow \phi(x, t)$$


$$\frac{q_{i+1} - q_i}{a} \rightsquigarrow \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\phi(x+a) - \phi(x)}{a} = \frac{\partial}{\partial x} \phi(x)$$

$$\sum_{i=1}^N a F_i \rightsquigarrow \int_0^l dx F(x)$$

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a \left[\frac{m}{a} \dot{q}_i(t)^2 - ka \left(\frac{q_{i+1}(t) - q_i(t)}{a} \right)^2 \right]$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2} \int_0^l dx \left[\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - T \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] \rightsquigarrow L = \int_0^l dx \mathcal{L}$$

$\equiv \mathcal{L}(\phi(x), \partial \phi(x); x, t)$

"densità Lagrangiana"

- $\phi(x)$ è un campo: assegna output diverso a diversi punti dello spazio (in qto caso uni-dimens.)

• Le coord. libere ora sono $\phi(x)$ e un moto in Q è dato da $\phi(x, t)$.

Diff. rispetto insieme finito di pts materiali: ora indica che mi labelle diversi coord. è continuo

$$\rightarrow \phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{vs} \quad q: \{1, \dots, m\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \phi(x) \quad \quad \quad i \mapsto q_i$$

• Azione :

$$S = \int dt L = \int dt \int dx \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{T}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right]$$

↑
Funzionale che dip. da funzione $\phi(x, t)$

• Eq. del moto da principio variazionale

$$\delta S = \frac{d}{d\alpha} S[\phi + \alpha \delta \phi] \Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{d}{d\alpha} \int dx dt \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \phi + \alpha \frac{\partial \delta \phi}{\partial t}}{\partial t} \right)^2 - \frac{T}{2} \left(\frac{\partial \phi + \alpha \frac{\partial \delta \phi}{\partial x}}{\partial x} \right)^2 \right] \Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int dx dt \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi}{\partial t} - T \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right) = \text{integr. per part.}$$

$$= \int dx dt \left(-\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \delta \phi + \int dx \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta \phi \Big|_{t_1}^{t_2} + \int dt T \frac{\partial \phi \delta \phi}{\partial x} \Big|_0^l$$

→
Se variaz.
nulle agli
estremi

$$\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} - (T/\rho) \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

← Eq. delle onde!

FORMULAZIONE LAGRANGIANA della meccanica del continuo.

- Config. di un mezzo continuo descritte da

$$\text{un campo } \phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\bar{r} \mapsto \phi(\bar{r}) = \phi(x_1, x_2, x_3)$$

- Evoluz. temporale della config. data da

$$\phi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(\bar{r}, t) \mapsto \phi(\bar{r}, t) = \phi(x_1, x_2, x_3, t)$$

- Dinamica descritta da densità Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}, \frac{\partial \phi}{\partial t}, x_1, x_2, x_3, t)$$

↑

Abuso notaz: gli simboli qui sono intesi come simboli indipend. da ϕ ; solo quando ϕ è valutato in $\phi(\bar{r}, t)$, allora $\partial \phi$ diventano derivate parziali di tale funzione.

- Azione Hamiltoniana:

$$S[\phi] = \int dt \int dx^3 \mathcal{L}(\phi(\bar{r}, t), \partial \phi(\bar{r}, t), \bar{r}, t)$$

- Moto reale nello sp. delle config. è la funz. $\phi(\bar{r}, t)$

che estremizza il funzionale S , cioè t.c. $\delta S = 0 + \delta \phi$
(nullo ed libero)

• Calcoliamo variazione δS :

$$\delta S[\phi, \delta\phi] = \left. \frac{d}{d\alpha} S[\phi + \alpha\delta\phi] \right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int dt d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} \delta \partial_i \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} \delta \partial_t \phi \right] =$$

$$= \int dt d^3x \delta\phi \left[\underbrace{\sum_{i=1}^3 \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}}_{\text{sottointeso}} \right] + \text{termini di bordo}$$

(che si annullano se $\delta\phi=0$ al bordo)

sottointeso $\rightarrow \sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$ $\mu = 0, 1, 2, 3$ $x^0 \equiv ct$

$\delta S = 0 \quad \forall \delta\phi$ che
si annulla al bordo

$$\iff \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

↑
Equazioni di Lagrange
per il campo ϕ .

Esempio: Equazione di Klein-Gordon

- Consideriamo la Lagrangiana del campo scalare $\phi(\vec{x}, t)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

- Possiamo scrivere $\mathcal{L} = T - V$, identificando

$$T = \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \quad \text{e} \quad V = \int d^3\vec{x} \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 \right)$$

↑ "gradient energy" ← "potential energy"

- Eq. del moto:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial_\mu (\partial^\mu \phi) = \ddot{\phi} - \nabla^2 \phi \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi$$

$$\rightarrow \ddot{\phi} - \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0 \quad \leadsto \quad \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0}_{\equiv \square}$$

Klein-Gordon eq.

- Se \mathcal{L} ha potenziale generico, cioè $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$

$$\rightarrow \text{Eq. moto:} \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

Esempio: Lagrangiana lineari nelle derivate

- Prendiamo campo scalare complesso $\Psi(x)$, cioè $\Psi: \mathbb{R}^{13} \rightarrow \mathbb{C}$ e la Lagrangiana data da

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\Psi^* \dot{\Psi} - \dot{\Psi}^* \Psi) - \nabla \Psi^* \cdot \nabla \Psi - m \Psi^* \Psi$$

- Consideriamo Ψ e Ψ^* come variabili indip. al posto di parte reale e parte immaginaria di Ψ .

Eq. moto di Ψ^* :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*} = \frac{i}{2} \dot{\Psi} - m \Psi \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}^*} = -\frac{i}{2} \Psi \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \Psi^*} = -\nabla \Psi$$

$$\rightarrow i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\nabla^2 \Psi + m \Psi \quad (\text{Schrödinger equation})$$

Esempio: Eq. di Maxwell come eq. di Lagrange

• Ricordiamo $\bar{\mathbf{E}} = -\bar{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t}$ e $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{A}}$

In qto caso le eq. $\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0$ & $\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$ sono automaticam. soddisfatte.

$\phi(\bar{\mathbf{r}}, t)$, $\bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{r}}, t)$ sono CAMPI!

• Le altre due eq. di Maxwell

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{E}} = 4\pi \rho \quad \text{e} \quad \bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi \bar{\mathbf{J}}}{c}$$

sono derivabili dalla dens. di Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} (\bar{\mathbf{E}}^2 - \bar{\mathbf{B}}^2) + \frac{1}{c} \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{A}} - \rho \phi \quad (*)$$

• Eq. per ϕ :

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = \partial_\mu \left(\frac{E_i}{4\pi} (-\delta_{i\mu}^{\mu}) \right) = -\frac{\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{E}}}{4\pi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\rho \Rightarrow -\frac{\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{E}}}{4\pi} = -\rho \quad //$$

• Eq. per A_j

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_j)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j} \right) &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial(\partial_\mu A_j)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_i} \frac{\partial B_i}{\partial(\partial_\mu A_j)} \right) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{E_i}{4\pi} \delta_{ij} \delta_0^\mu (-\frac{1}{c}) - \frac{B_i}{4\pi} \epsilon_{ilm} \delta_2^\mu \delta_{jm} \right) = -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial E_j}{\partial t} + \underbrace{\epsilon_{jli} \partial_l B_i}_{(\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{B}})_j} \frac{1}{4\pi} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j} = \frac{1}{c} j_j \Rightarrow \frac{\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{B}}}{4\pi} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{1}{c} \bar{\mathbf{J}} \quad //$$

• La RELATIVITÀ RISTRETTA ci dice che qk eq.

sono covarianti sotto trasf. di Lorentz.

Questo significa che eq. hanno la stessa forma in ogni sist. di rif., cioè in ogni sist. di rif. le eq. di Maxwell sono eq. di Lagrange in una certa lagrangiana.

Questo avviene se \mathcal{L} è INVARIANTE sotto trasf. di Lorentz.

Come facciamo a rendere manifesto che \mathcal{L} in (*) è inv.?

→ \mathcal{L} può essere scritto come

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu A_\mu \quad \text{con} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

dove $A_0 = \phi$ e A^i sono le tre componenti del pot. vett.

e $j^0 = c\rho$ j^i sono le tre componenti della corrente elettrica.

$$\bullet F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial_j^i A^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial A^i}{\partial t} + \partial_i \phi = -E_i$$

$$\bullet F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = \epsilon^{ijk} B^k = -\epsilon^{ijk} B_k$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2F_{0i} F^{0i} + F_{ij} F^{ij} = -2F_{0i} F^{0i} + F_{ij} F^{ij} =$$

$$= -2E_i E_i + \underbrace{\epsilon^{ijk} \epsilon^{ijl}}_{2\delta^{kl}} B_k B_l = (-\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \cdot 2$$

$$\leftarrow \delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{jl} \delta_{ki} = 2\delta_{kl} - \delta_{kl}$$

$$L = -\frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu A_\mu \quad \text{e' manifestamente invariante sotto trasf. di Lorentz.}$$

• Eq. di Maxwell in forma covariante \rightarrow da $\delta S = 0$

$$\text{con } S = \int d^4x \left(-\frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu A_\mu \right)$$

$$\delta S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu \right) =$$

$$= \int d^4x \left(-\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) - \frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu \right) =$$

$$= \int d^4x \left(-\frac{1}{2\pi} F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu - \frac{1}{c} j^\nu \delta A_\nu \right) =$$

$$= \int d^4x \delta A_\nu \left(\frac{1}{2\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\nu \right) + \text{termini di bordo}$$

$$\rightarrow \text{Eq. Maxwell} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{2\pi}{c} j^\nu$$

Mancano le due eq. automaticamente soddisfatte (Bianchi identities)

$$\rightarrow \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho} = 0 \quad \rightarrow \text{sostituendo espress. di } F \text{ in funz. di } E \text{ e } B \text{ si ottengono le due eq. cercate.}$$

automaticamente soddisf. da $F_{\sigma\rho}$ t.c. $F_{\sigma\rho} = \partial_\sigma A_\rho - \partial_\rho A_\sigma$, in fatti

$$\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \partial_\sigma A_\rho = \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}}_{\text{antisim. in } \mu \leftrightarrow \sigma} \underbrace{\partial_\mu \partial_\sigma A_\rho}_{\text{sim. in } \mu \leftrightarrow \sigma} = 0$$

LOCALITÀ

Le Lagrangiane considerate nei precedenti esempi sono LOCALI.

Qto significa che non ci sono termini che accoppino $\phi(\bar{x}, t)$ direttamente a $\phi(\bar{y}, t)$ con $\bar{x} \neq \bar{y}$.

Es. non-locale: $L = \int d^3x d^3y \phi(\bar{x}, t) \phi(\bar{y}, t)$

Nella lagr. sopra c'è $\int d^3x$ e tutte le espress. di ϕ sono valutate in \bar{x} . Il termine col gradiente in un certo senso c'è da intender. tra campi in \bar{x} e campi in $\bar{x} + d\bar{x}$, ma sarebbe una sola derivata non potremo "allontanarci" da \bar{x} (vedi serie Taylor).