TEOREMA DI NÖTHER

- Consideriamo trasf. infinitesime (possiamo sempre farlo se abbiamo trasf. CONTINUE).

$$\delta\phi_a(x) = X_a(\phi) \qquad a = 1, \dots, \#_{\text{fields}}$$

- Questa è simmetria se la densità di Lagrangiana cambia per una derivata totale (se imponiamo che i campi si annullino al bordo/infinito):

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu \qquad \text{per qualche } F^\mu(\phi).$$

- $$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\mu(\delta\phi_a) =$$

$$= \Bigg[\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}}_{=0}\Bigg]\delta\phi_a + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a\right)$$

se ϕ_a soddisfano eq. di Lagrange

- Siccome $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu$, allora $\exists\, j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}X_a(\phi) - F^\mu(\phi)$

t.c.
$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \quad \leftarrow \text{CORRENTE CONSERVATA}$$

Th. Nöther: simmetria $\Rightarrow$ corrente conservata

- Una corrente conservata implica una CARICA CONSERVATA

$$Q \equiv \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{x}\, j^0$$

Infatti $\frac{dQ}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{x}\, \partial_0 j^0 = -\int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{x}\, \bar{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$

assumendo $j \to 0$ per $|\bar{x}| \to \infty$

- Esistenza di una corrente conservata è una richiesta più forte dell'esistenza di una carica conservata, perché implica che la carica è conservata LOCALMENTE:

definiamo $Q_V = \int_V d^3\bar{x}\, j^0$

$$\Rightarrow \frac{dQ_V}{dt} = -\int_V \bar{\nabla}\cdot\bar{J}\, d^3x = -\int_{\partial V} \bar{j}\cdot d\bar{\Sigma}$$

$\leftarrow$ eq. di continuità

$\Rightarrow$ ogni carica che lascia V deve passare per ∂V (non si distrugge).

TRASLAZIONI spazio-temporali e TENSORE ENERGIA-IMPULSO

- Consideriamo le trasformazioni

$$\phi'_a(x) = \phi_a(x+\underset{\text{4 parametri}}{\epsilon}) \overset{\text{trasf. infinitesima}}{\cong} \phi_a(x) + \underbrace{\epsilon^\nu \partial_\nu \phi_a(x)}_{X_a(\phi)}$$

- La trasf. sulla Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \underset{\text{derivata totale}}{\epsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x)} \qquad F^\nu = \epsilon^\nu \mathcal{L}$$

$\Rightarrow$ possiamo applicare il teorema di Nöther per ognuna delle 4 traslazioni

$\rightarrow$ 4 correnti conservate

$$(j^\mu)_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \equiv T^\mu{}_\nu$$

TENSORE ENERGIA-IMPULSO

$$\rightsquigarrow \quad \partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$$

- Le quattro cariche conservate sono

$$E = \int d^3x\, T^{00} \qquad \text{e} \qquad P^i = \int d^3x\, T^{0i}$$

ENERGIA $\Leftrightarrow$ invar. per trasl. temp. QUANTITÀ DI MOTO (IMPULSO) $\Leftrightarrow$ invar. per trasl. spaziali

- $T^{\mu\nu}$ non è simmetrico in generale. Però posso aggiungere un altro termine per ottenere un nuovo tensore simm. che è conservato se e solo se $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$:

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} + \partial_\rho \Gamma^{\rho\mu\nu}$$

con $\Gamma^{\rho\mu\nu}$ antisimm. in $\rho \leftrightarrow \mu$
($\Rightarrow \partial_\mu \partial_\rho \Gamma^{\rho\mu\nu} = 0$)

- Un tensore come $\Theta^{\mu\nu}$ sta alla destra delle equazioni di Einstein (General Relativity).

$$\Theta^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left.\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}\right|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}}$$

ESEMPIO : corda

$$S = \int dt\, L = \int dt \int dx \left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{T}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \right]$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 & \rho \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ -T\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) & \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$E = \int d^3x \left(\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \right) \qquad P = \int d^3x\, \rho \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

Esempio: Campo elettro-magnetico nel vuoto

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$T^{\mu\nu} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}}_{-\frac{1}{2\pi} F^{\mu\rho}} \partial^\nu A_\rho - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} = -\frac{1}{2\pi} F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{8\pi}\eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

Qto tensore non è simmetrico e nemmeno invariante sotto trasf. di gauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda$. Aggiungiamo un termine che non distrugge il fatto che è conservato. Otteniamo

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi} F^{\mu\rho} F^{\nu}{}_{\rho} + \frac{1}{8\pi}\eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

$$T^{00} = -\frac{1}{2\pi} F^{0\rho}\partial^0 A_\rho - \mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi} F^{0\rho}\partial_0 A_\rho - \frac{1}{4\pi} F^{i\rho}\partial_i A_\rho \cdots$$

Vediamo le componenti:

$$T^{00} = -\frac{1}{2\pi} \underbrace{F^{0\rho} F^{0}{}_{\rho}}_{-\bar{E}^2} + \frac{1}{8\pi} \underbrace{F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}_{-2\bar{E}^2 + 2\bar{B}^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\bar{E}^2 - \frac{\bar{E}^2}{2} + \frac{\bar{B}^2}{2}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\bar{E}^2 + \bar{B}^2\right) \leftarrow$$

densità di ENERGIA del campo elettromagn.

$$T^{0i} = -\frac{1}{2\pi} F^{0\rho} F^{i}{}_{\rho} = +\frac{1}{2\pi} F^{0k} F^{ik} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} (-)^2 E_k \, \epsilon^{ikl} B_l = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{ikl} E_k B_l =$$

$$= \frac{1}{2\pi} (\bar{E} \times \bar{B})_i$$

$\leftarrow$ densità di QUANTITA' DI MOTO del campo elettromagnetico

$$T^{ij} = \frac{1}{2\pi} \left(-E^i E^j - B^i B^j + \frac{1}{2} \delta^{ij} (\bar{E}^2 + \bar{B}^2) \right)$$

flusso della componente j della quantità di moto attraverso sup. $\perp$ a direz. i.

(tensore degli sforzi)

Nota: $2\pi T^{\mu}{}_{\mu} = -F^{\mu\rho} F_{\mu\rho} + \frac{1}{4} \underbrace{\delta^{\mu}_{\mu}}_{=4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0$

$T^{\mu\nu}$ è traceless (campo elettromagn. nel vuoto)

$\rightarrow$ teorie di campo CONFORME.

Es: ONDA PIANA MONOCROMATICA

$$\bar{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \, \hat{i}_y$$

$$\bar{B}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \, \hat{i}_z$$

($c=1$ e $|\bar{E}| = |\bar{B}|$)

onda avanza in direzione x

$$T^{00} = \frac{1}{2\pi} E_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

en. sempre positiva ma varia nello sp. e nel tempo

$$\underbrace{\langle T^{00} \rangle}_{\text{media temporale}} = \frac{1}{4\pi} E_0^2$$

$T^{0x} = T^{00}$ $\qquad$ $T^{0y,z} = 0$

$\uparrow$

$p = E$ (em. si muove a velocità della luce)

L'altra componente $\neq 0$ è

$T^{xx} = T^{00}$

Qta dà la quantità di quantità di moto trasferita su superf. $\perp x$ per unità di tempo e di area $\longrightarrow$ è una PRESSIONE

$\Rightarrow$ pressione esercitata su una superf. perfettam. assorbente è

$$p = \langle T^{xx} \rangle = \frac{E_0^2}{4\pi} \quad \text{in unità } c=1$$

Troviamo che la pressione è proporzionale all'intensità dell'onda.

SIMMETRIE INTERNE

Un campo è della forma

$$\varphi_I(\bar{r})$$

indici continui

indici discreti

Analogo di q_n

indice discreto

Finora abbiamo visto trasformazioni che agiscono sia su indici continui $\bar{r}$ che su gli discreti (per es μ in $A_\mu(\bar{r})$)

Una classe di trasformazioni importanti sono quelle che non agiscono sulle coord. spaziali → "SIMMETRIE INTERNE"

Esempio: CAMPO SCALARE COMPLESSO

Prendiamo teorie di campo con due campi scalari reali $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ e scriviamo

$$\varphi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(x) + i\,\phi_2(x)\right)$$

Consideriamo la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi^*\,\partial^\mu\varphi - V(|\varphi|^2) \qquad |\varphi| = \varphi^*\varphi$$

Possiamo scrivere in funz. di ϕ_1 e ϕ_2:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1 - i\,\partial_\mu\phi_2\right)\left(\partial^\mu\phi_1 + i\,\partial^\mu\phi_2\right) - V\left(\frac{\phi_1^2+\phi_2^2}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - V\left(\frac{\phi_1^2+\phi_2^2}{2}\right)$$

Qta Lagrangiana è invariante sotto trasf.

$$\varphi \mapsto e^{i\alpha}\varphi \qquad \varphi^* \mapsto e^{-i\alpha}\varphi$$

$\rightarrow \quad j^\mu = i(\partial^\mu \varphi^*)\varphi - i\varphi^*(\partial^\mu \varphi)$ è conservato

Trucco per determinare carica conservata

Per una simmetria interna ($\alpha \ll 1$)

$$\delta\phi = \alpha\phi \quad (*) \qquad \alpha \text{ è un parametro (non dip. da } x)$$

- La lag. è invariante sotto $(*)$ con α cost.

- Variamo la lag. con $(*)$ ma in cui $\alpha = \alpha(x)$.

  La variaz. dovrà essere della forma

  $$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu \alpha)\, h^\mu[\phi]$$

  poiché sappiamo che $\delta\mathcal{L} = 0$ per $\partial_\mu \alpha = 0$

$$\Rightarrow \delta S = \int d^4x\, \delta\mathcal{L} = -\int d^4x\, \alpha(x)\, \partial_\mu h^\mu \qquad \text{(fatta integraz. per parti)}$$

$\Rightarrow$ per campi che soddisfano eq. del moto, cioè t.c. $\delta S = 0$ $\forall \alpha(x)$, abbiamo

$$\partial_\mu h^\mu = 0 \quad \Longrightarrow \quad h^\mu \text{ è corrente conservata.}$$

Applichiamolo a $\quad \mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - V(|\varphi|^2)$

$$\mathcal{L} \mapsto \left(\partial_\mu\, e^{-i\alpha(x)} \varphi(x)^*\right)\left(\partial^\mu e^{i\alpha(x)} \varphi(x)\right) - V(|\varphi|^2)$$

$$= \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - V(|\varphi|^2) +$$
$$+ \partial_\mu \alpha \left(-i \varphi^* \partial^\mu \varphi + i\, \partial_\mu \varphi^* \varphi\right)$$
$$+ \cancel{(\partial_\mu \alpha)^2 (\varphi^* \varphi)}^{\;\alpha \ll 1}$$