

# 11

## EFFETTI DEL SECONDO ORDINE

A. A. 2025-2026  
Corso di **Tecnica delle costruzioni**

*Effetti del secondo ordine*

### INSTABILITA' DI ELEMENTI SNELLI

Consideriamo un pilastro soggetto ad una sollecitazione di compressione assiale. Nella realtà fisica è di fatto impossibile che tale compressione solleciti l'elemento con uno sforzo normale puro (in conseguenza delle imperfezioni nella geometria e nei materiali che compongono la sezione e di quelle nell'applicazione del carico).

Queste imprecisioni determinano quindi l'insorgenza di una componente flettente di sforzo nell'asta, che tende ad incurvarla (deformazione trasversale).

A causa degli spostamenti laterali, l'azione assiale induce quindi sollecitazioni flessionali addizionali, che aumentano al crescere della snellezza dell'elemento.

Tali sollecitazioni sono dette **EFFETTI DEL SECOND'ORDINE**

In elementi snelli, questi effetti possono determinare il collasso prematuro dell'elemento per **instabilità**.

IN GENERALE...

...l'instabilità dell'equilibrio riguarda le **membrature snelle soggette a compressione**, per le quali le **sollecitazioni aggiuntive associate agli spostamenti trasversali** dell'elemento (ovvero gli «effetti del second'ordine») assumono rilevanza (non sono, cioè, trascurabili).



**CONCETTO DI SNELLEZZA:**

Qualitativamente, si parla di membrature snelle quando le dimensioni delle sezioni trasversali sono molto piccole rispetto alla lunghezza.

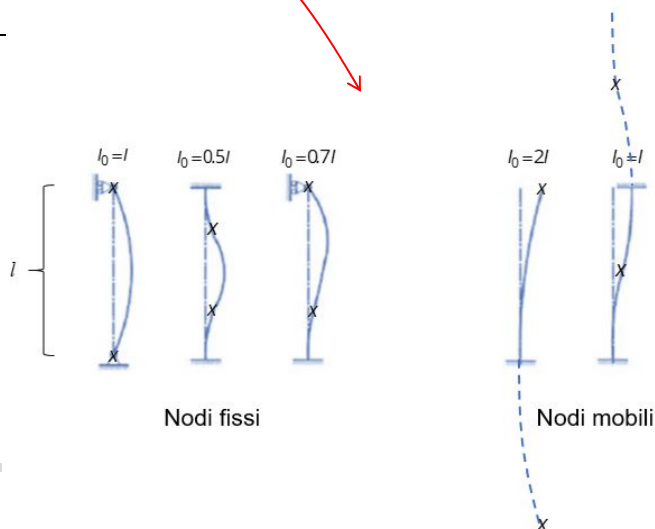
Quantitativamente, un elemento isolato e semplicemente compresso viene definito snello se la sua **snellezza**  $\lambda$ , **definita come il rapporto tra la luce libera di inflessione  $l_0$  e il raggio d'inerzia  $i$** , supera il valore limite  $\lambda_{lim}$ :

Snellezza  $\lambda = \frac{l_0}{i}$  con  $i = \sqrt{J/A}$  e  $l_0 = \beta \cdot l$

Snellezza limite  $\lambda_{lim} = \frac{25}{\sqrt{v_m}}$  con  $v_m = \frac{N_{sd}}{f_{cd} A_c}$

$J$  momento d'inerzia della sezione  
 $A$  area della sezione  
 $l$  lunghezza dell'elemento

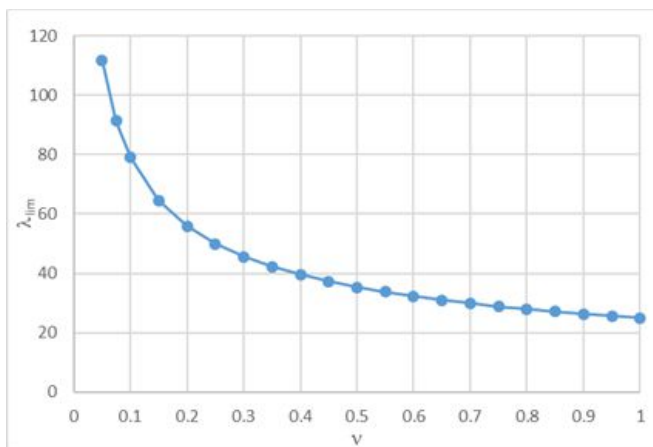
$N_{sd}$  azione assiale (di compressione)



Quindi l'elemento soggetto a compressione è snello se:

$\lambda > \lambda_{lim} = \frac{25}{\sqrt{v_m}}$

Si attiva quindi anche una componente di sollecitazione flettente non trascurabile (elemento soggetto a **PRESSOFLESSIONE**)



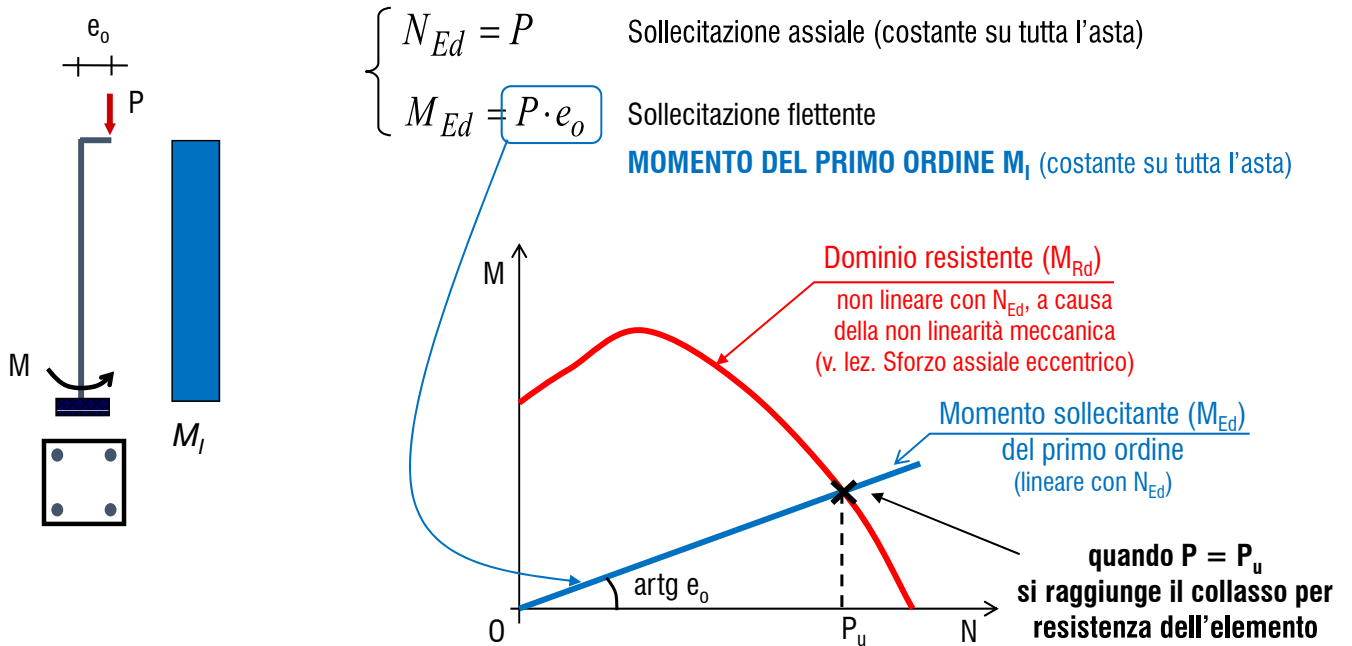
In generale, nelle **membrature in c.a.**, caratterizzate solitamente da dimensioni delle sezioni trasversali non trascurabili rispetto alla loro lunghezza, il problema della **instabilità** dell'equilibrio è **meno importante** rispetto a quanto si rileva, ad esempio, nelle **strutture in acciaio**, generalmente **più snelle**.

Esistono però varie **tipologie strutturali in c.a.** nelle quali la **snellezza** raggiunge valori **elevati**, come ad esempio pile di ponti e viadotti, colonne di capannoni prefabbricati, telai caratterizzati da notevoli deformabilità.

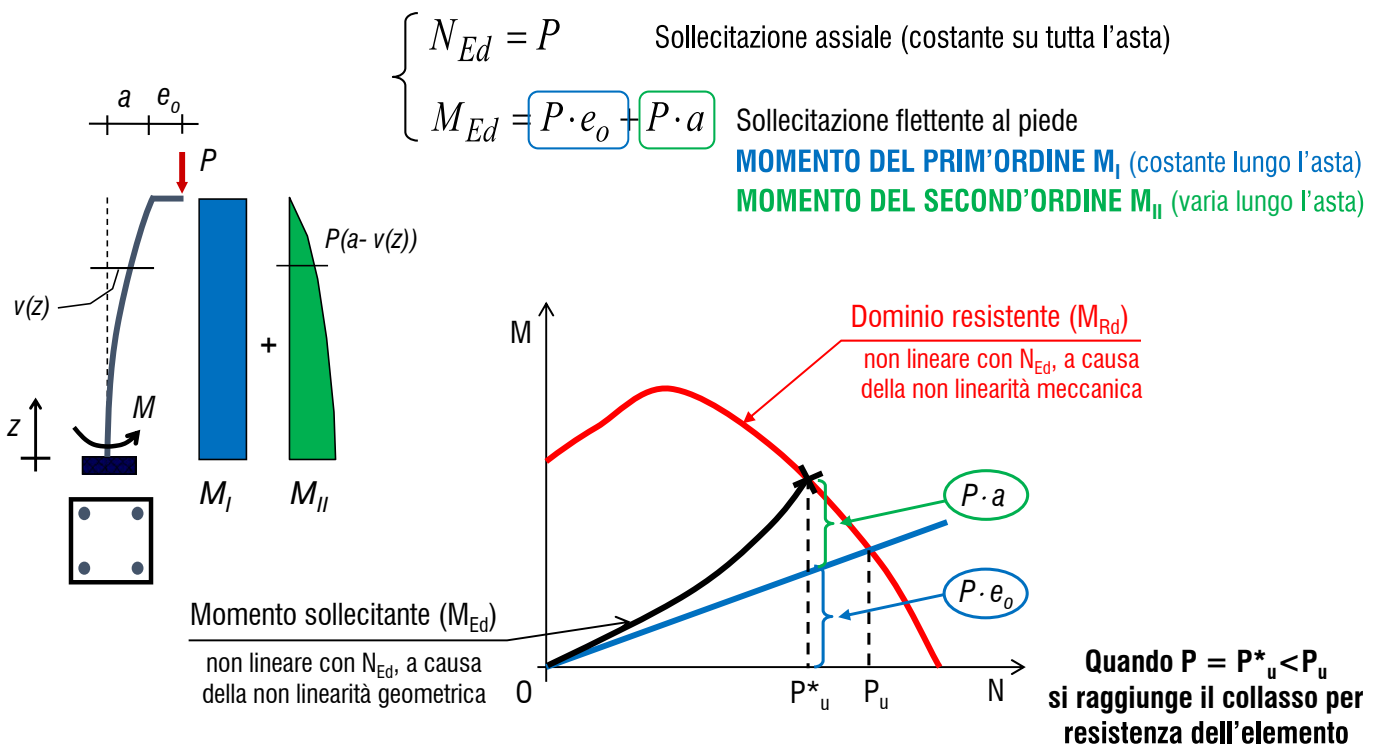
Va considerato inoltre che la crescente utilizzazione di calcestruzzi ad alta resistenza ha portato alla progettazione di membrature con sezioni di dimensioni più contenute, rendendo più importante l'entità delle sollecitazioni del secondo ordine ed i conseguenti problemi di instabilità dell'equilibrio

## EFFETTI DEL PRIMO E DEL SECOND'ORDINE

Si consideri un'asta incastrata al piede, con sezione costante, soggetta ad un carico assiale  $P$  eccentrico (eccentricità  $e_0$ ). Assumendo l'asta indeformabile (le deformazioni trasversali sono trascurabili) si ha:



In realtà, l'asta si deforma lateralmente e di conseguenza si ha un incremento della sollecitazione flessionale (effetto del SECONDO ORDINE). **Nelle aste snelle questo incremento non può essere trascurato:**

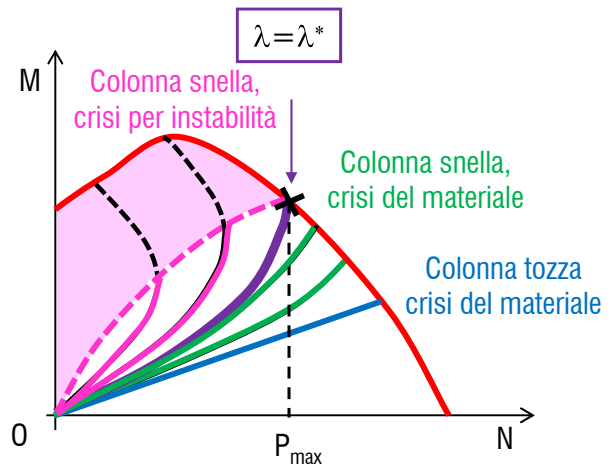
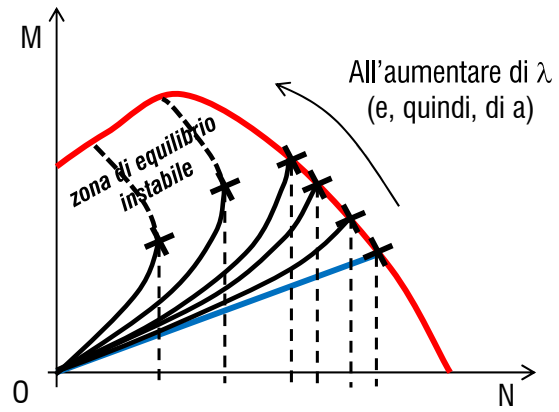


Quanto più l'elemento è snello, tanto più l'effetto del secondo ordine diventa importante e il collasso per raggiungimento della resistenza della sezione al piede avviene per un carico P inferiore.

Se però l'elemento è particolarmente snello, si raggiunge il **collasso per perdita dell'equilibrio (crisi per instabilità)** prima dell'esaurimento delle capacità di resistenza.

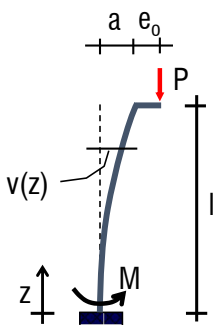
All'aumentare della snellezza della colonna si potrà quindi avere:

- Collasso di colonna tozza, governato dalla crisi del materiale
- Collasso di colonna snella (snellezza intermedia), ma ancora governato dalla crisi del materiale
- Collasso di colonna snella (snellezza elevata) governato dall'instabilità, senza crisi del materiale.



### TRACCIAMENTO DELLE CURVE $M_{Ed}(N_{Ed})$

Per determinare le curve  $M_{Ed}(N_{Ed})$  è necessario valutare come varia  $a$  con  $P$ . Scriviamo pertanto l'equilibrio alla rotazione tra forze interne ed esterne rispetto ad una generica sezione lungo  $l$ :



$$M_{int}(z) = M_{ext}(z)$$

$$M_{ext}(z) = P \cdot e_0 + P \cdot (a - v(z)) \quad \text{Somma dei momenti di I e II ordine}$$

$$M_{int}(z) = K(v''(z)) \cdot v''(z) \quad \text{Il momento flettente nella generica sezione è il prodotto della curvatura } \chi = v''(z) \text{ per la rigidezza flessionale } K(\chi) \text{ - [v. Eq.ne linea elastica]}$$

Otteniamo un'equazione differenziale:

$$K(v''(z)) \cdot v''(z) + P \cdot v(z) = P \cdot [e_0 + a]$$

Metodi risolutivi:

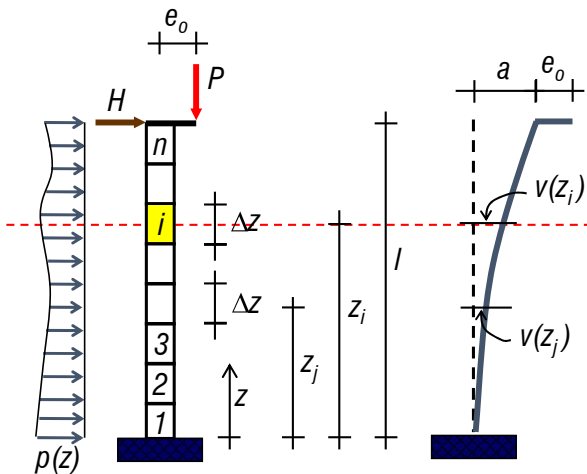
- Procedura iterativa → Metodo Generale
- Procedure semplificate → Metodo Colonna Modello  
Metodo Stato Equilibrio

**METODO GENERALE** - Procedimento iterativo che conduce al rispetto di equilibrio e congruenza in ogni concio

Consideriamo una generica asta di lunghezza  $l$  incastrata al piede, soggetta ad un carico assiale  $P$  in sommità eccentrico ( $e_0$ ), un carico orizzontale  $H$  in sommità ed un carico variabile distribuito lungo l'altezza  $p(z)$ .

Discretizziamo l'elemento in un numero finito  $n$  di conci di altezza  $\Delta z = l/n$ .

**Passo (1):** assumo che, in ogni sezione, il momento sia pari al **momento di primo ordine  $M_I$** ;



$$M^{(1)}(z_i) = M_I(z_i)$$

Per calcolarlo, mi posiziono in una generica **sezione  $i$**  e scrivo l'eq. alla rotazione delle forze esterne al di sopra

$$M_I(z_i) = P \cdot e_0 + H \cdot (l - z_i) + \int_{z_i}^l p \cdot \xi \cdot d\xi$$

Al passo (1), lo spostamento laterale  $v$  nella generica **sezione  $i$**  sarà dato dalla somma degli spostamenti di tutti i conci dalla base a  $i$ :

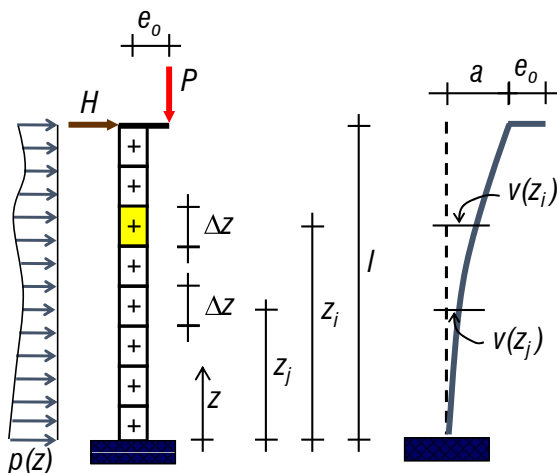
$$v^{(1)}(z_i) = \sum_{j=1}^i \chi_j^{(1)} \Delta z_j \cdot (z_i - z_j)$$

Rotazione della sezione  $j$

In sommità sarà:  $v^{(1)}(l) = a^{(1)} = \sum_{j=1}^n \chi_j^{(1)} \Delta z_j \cdot (l - z_j)$

**Passo (2):** assumo che, in ogni sezione, il momento sia pari a

- il **momento di primo ordine  $M_I$**  (già calcolato al passo 1, non varia)
- +
- il **momento di second'ordine  $M_{II}$**  generato dallo spostamento  $v^{(1)}(z)$  (calcolato al passo 1)



$$M^{(2)}(z_i) = M_I(z_i) + M_{II}(z_i)$$

Ovvero

$$M^{(2)}(z_i) = M_I(z_i) + N \cdot [a^{(1)} - v^{(1)}(z_i)]$$

Calcolati al precedente passo (1)

Al passo (2), lo spostamento laterale  $v$  nella generica **sezione  $i$**  sarà dato dalla somma degli spostamenti di tutti i conci dalla base a  $i$ :

$$v^{(2)}(z_i) = \sum_{j=1}^i \chi_j^{(2)} \Delta z_j \cdot (z_i - z_j)$$

In sommità sarà:  $v^{(2)}(l) = a^{(2)} = \sum_{j=1}^n \chi_j^{(2)} \Delta z_j \cdot (l - z_j)$

**Generico**

**passo (k):** assumo che, in ogni sezione, il momento sia pari a

- il **momento di primo ordine**  $M_I$  (già calcolato al passo 1, non varia)
- +
  - il **momento di second'ordine**  $M_{II}$  generato dallo spostamento  $v^{(k-1)}(z_j)$  (calcolato al passo precedente)

$$M^{(k)}(z_i) = M_I(z_i) + M_{II}(z_i)$$

Ovvero

$$M^{(k)}(z_i) = M_I(z_i) + N \cdot [a^{(k-1)} - v^{(k-1)}(z_i)]$$

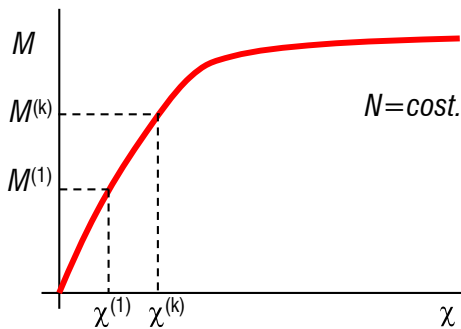
Calcolati al precedente passo (k-1)

Lo spostamento laterale  $v$  nella generica sezione  $i$

$$v^{(k)}(z_i) = \sum_{j=1}^i \chi_j^{(k)} \Delta z_j \cdot (z_i - z_j)$$

In sommità sarà:

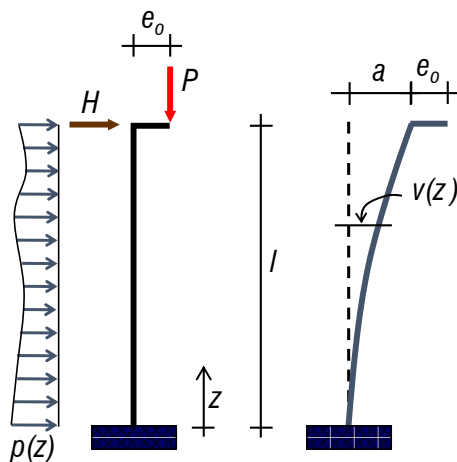
$$v^{(k)}(l) = a^{(k)} = \sum_{j=1}^n \chi_j^{(k)} \Delta z_j \cdot (l - z_j)$$



Si prosegue così per passi successivi, fino a quando le differenze in termini di inflessione ( $a$ ) e, quindi di momento ( $M$ ), non scendono al di sotto di una prefissata tolleranza rispetto al passo precedente.

**METODO della COLONNA MODELLO** - Applicabile a: elementi isostatici (o riconducibili a tali) con sezione trasversale costante e sforzo normale costante lungo l'asse

Si assegna a priori la forma semplificata della **deformata** come **semionda di sinusoidale** avente ampiezza indeterminata pari ad «a». La semplificazione connessa alla **scelta di una deformata di tipo predefinito** non determina una grave imprecisione e, grazie a tale assunzione, la deformata della colonna, cui sono connessi gli effetti del II ordine, dipende solo dall'ampiezza «a» dello spostamento in sommità.



Deformata (equazione della semionda di sinusoidale):

$$v(z) = a \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi z}{l_0}\right) \quad \text{con } l_0 = \beta \cdot l$$

Rotazione (è la derivata prima della deformata):

$$v'(z) = a \cdot \frac{\pi}{l_0} \sin \frac{\pi z}{l_0}$$

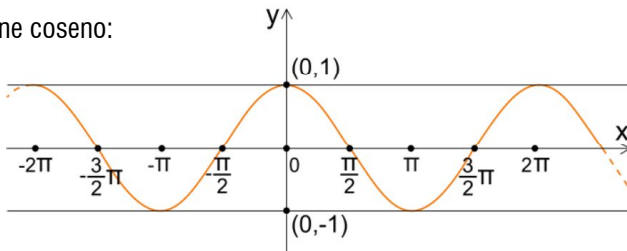
Curvatura (è la derivata seconda della deformata):

$$v''(z) = a \cdot \frac{\pi^2}{l_0^2} \cos \frac{\pi z}{l_0}$$

Nella sezione al piede ( $z=0$ ,  $\cos \pi z/l_0 = 1$ ), chiamando la curvatura al piede  $\chi = v''(0)$ :

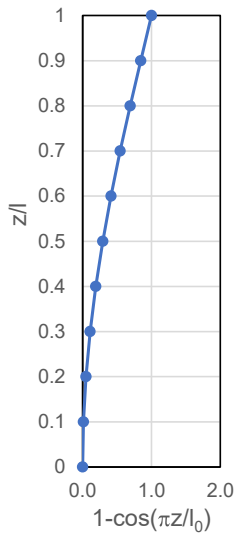
$$a = \frac{l_0^2}{\pi^2} \chi$$

Grafico funzione coseno:



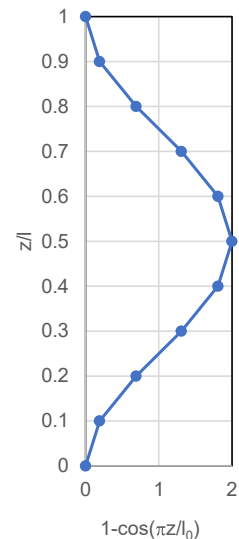
Esempio: mensola ( $l_0 = 2l$ )

$z/l_0$	$\cos(\pi z/l_0)$	$1-\cos(\pi z/l_0)$
0	1.000	0.000
0.05	0.988	0.012
0.1	0.951	0.049
0.15	0.891	0.109
0.2	0.809	0.191
0.25	0.707	0.293
0.3	0.588	0.412
0.35	0.454	0.546
0.4	0.309	0.691
0.45	0.156	0.844
0.5	0.000	1.000

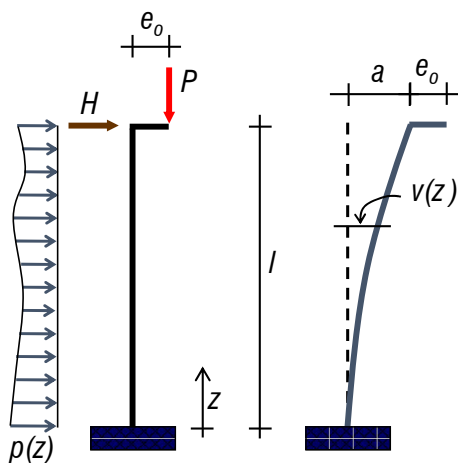


Esempio: incastro-incastro ( $l_0 = 0.5l$ )

$z/l_0$	$\cos(\pi z/l_0)$	$1-\cos(\pi z/l_0)$
0	1.00	0.00
0.2	0.81	0.19
0.4	0.31	0.69
0.6	-0.31	1.31
0.8	-0.81	1.81
1	-1.00	2.00
1.2	-0.81	1.81
1.4	-0.31	1.31
1.6	0.31	0.69
1.8	0.81	0.19
2	1.00	0.00



Calcolo il momento delle generato dalle forze esterne (equilibrio alla rotazione rispetto alla base):



$$M_e = M^I + M^{II}$$

Momento del primo ordine

$$M^I = P \cdot e_0 + H \cdot l + \int_0^l p \cdot \xi \cdot d\xi$$

Momento di secondo ordine

$$M^{II} = P \cdot a$$

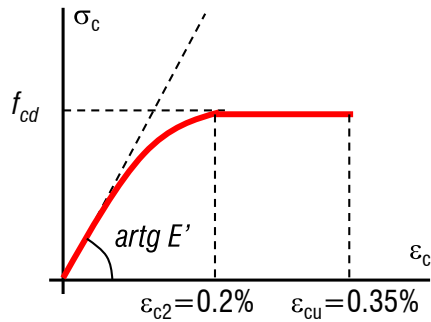
$$M^{II} = \frac{P \cdot l_0^2}{\pi^2} \cdot \chi \approx \frac{P \cdot l_0^2}{10} \cdot \chi$$

Nella sezione di base si dovrà verificare che  $M_e(N, \chi) \leq M_i(N, \chi)$

Per eseguire le verifiche, dobbiamo quindi calcolarci i diagrammi  $M_i - \chi - N$

$M_e$  Momento esterno (sollecitante)  
 $M_i$  momento interno

Per calcolare i diagrammi  $M-\chi-N$  dobbiamo quindi innanzitutto definire quali sono i **legami costitutivi** dei materiali calcestruzzo e acciaio (v. lez.03 Caratteristiche dei materiali)

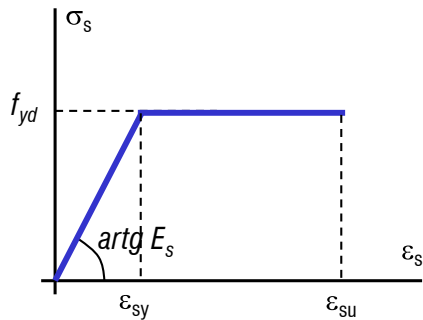


Per il calcestruzzo

$$\sigma_c = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \cdot f_{cd} \quad \text{per } \epsilon_c < \epsilon_{c2}$$

$$\sigma_c = f_{cd} \quad \text{per } \epsilon_{c2} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu}$$

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad E' = 850 \cdot f_{cd} \quad (<< E_c)$$



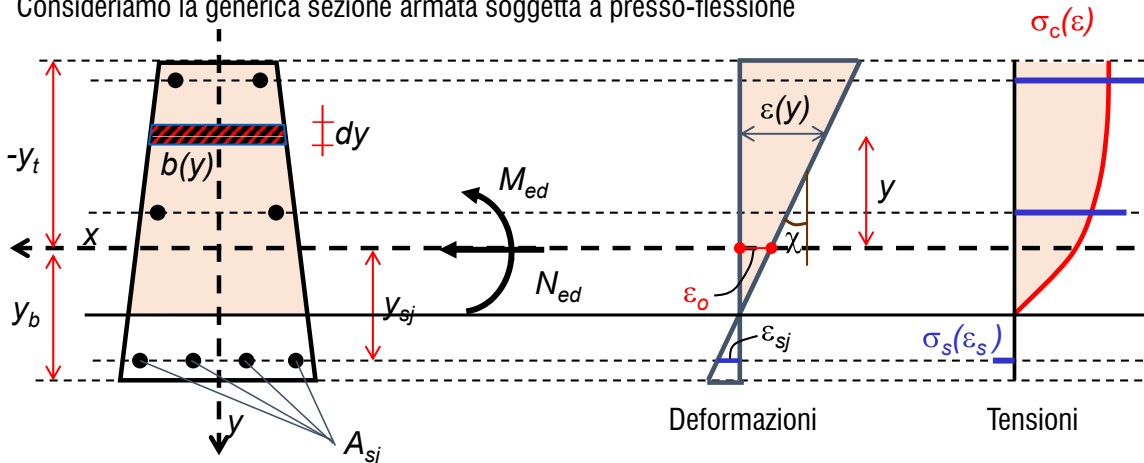
Per l'acciaio delle barre d'armatura

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s \quad \text{per } \epsilon_s < \epsilon_{sy}$$

$$\sigma_s = f_{yd} \quad \text{per } \epsilon_{sy} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{su}$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad E_s = 200 \text{ GPa}$$

Consideriamo la generica sezione armata soggetta a presso-flessione



Equilibrio alla traslazione:

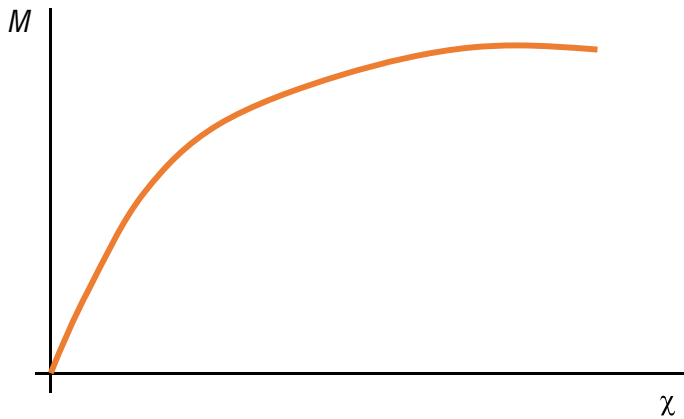
$$N = \int_{-y_t}^{y_b} b(y) \cdot \sigma_c(\epsilon) \cdot dy + \sum_{j=1}^m A_{sj} \cdot \sigma_s(\epsilon_{sj})$$

con  $\epsilon = \epsilon_0 - \chi \cdot y$

Equilibrio alla rotazione rispetto al baricentro G:

$$M = \int_{-y_t}^{y_b} y \cdot b(y) \cdot \sigma_c(\epsilon) \cdot dy + \sum_{j=1}^m y_{sj} \cdot A_{sj} \cdot \sigma_s(\epsilon_{sj})$$

Per la VERIFICA della SEZIONE CRITICA (ovvero la sezione al piede), si riportano le curve del **momento interno**  $M_i$  e del **momento esterno**  $M_e$  su uno stesso diagramma  $M-\chi$  (valutate per **una fissata azione assiale sollecitante**  $N_{Ed}=P$ )



**Diagramma  $M_i-\chi$  del MOMENTO INTERNO**

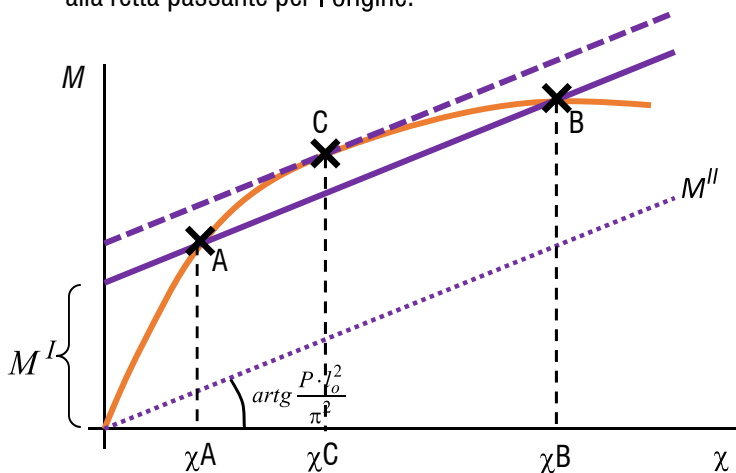
Relazione non lineare, articolata in 3 fasi:

- Fase lineare (calcestruzzo e acciaio lavorano in regime elastico)
- Fase non lineare crescente (il calcestruzzo in trazione è fessurato, ciò comporta una degrado di rigidezza)
- Fase pseudo-plastica (snervamento dell'acciaio e crisi del cls in compressione, aumento della curvatura senza grande aumento del momento).

Il punto di picco della curva indica il momento resistente ultimo. Segue degrado di resistenza

Per lo stesso valore di azione assiale sollecitante,  $N_{Ed}=P$ , il **diagramma del momento esterno**  $M_{ext}$  al variare della curvatura  $\chi$  (diagramma  $M_{ext}-\chi$ ) avrà un andamento di tipo lineare, traslato verso l'alto rispetto alla retta passante per l'origine:

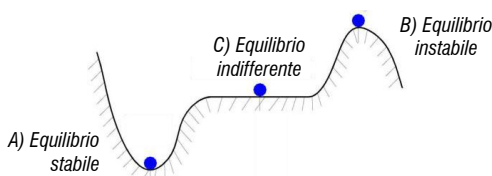
$$M_{ext} = \underbrace{\left[ N_{Ed} \cdot e_o + H_{Ed} \cdot l + \int_0^l p_{Ed} \cdot \xi \cdot d\xi \right]}_{M_I \text{ costante}} + \underbrace{N_{Ed} \cdot \frac{l_o^2}{\pi^2}}_{M_{II} \text{ lineare con } \chi} \chi$$



I punti di intersezione tra le curve  $M_{ext}-\chi$  e  $M_{int}-\chi$  rappresentano i punti di equilibrio tra  $M_{ext}$  e  $M_{int}$ .

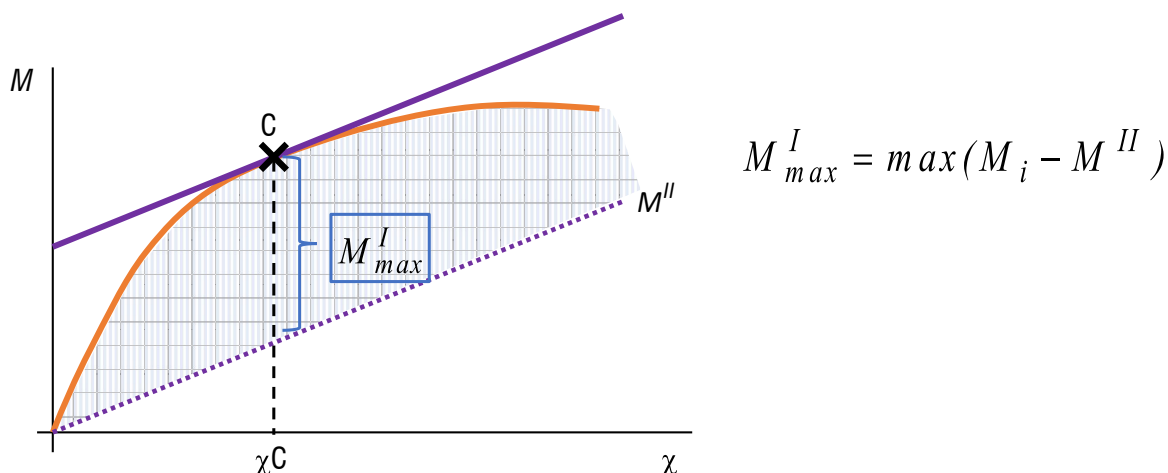
In particolare:

- l'intersezione nel **punto A** rappresenta una situazione di **equilibrio stabile** per l'asta (il sistema perturbato ritorna nella sua condizione iniziale di equilibrio);
- l'intersezione nel **punto B** rappresenta una situazione di **equilibrio instabile** per l'asta (il sistema perturbato si allontana dalla sua condizione iniziale di equilibrio);
- l'intersezione nel **punto C** rappresenta la situazione di **equilibrio limite** per l'asta (il sistema perturbato rimane in equilibrio in una nuova configurazione)



Il metodo consente di determinare il **massimo momento del primo ordine**  $M_{I,max}$  (valutato cioè sulla base della configurazione originale della membratura).

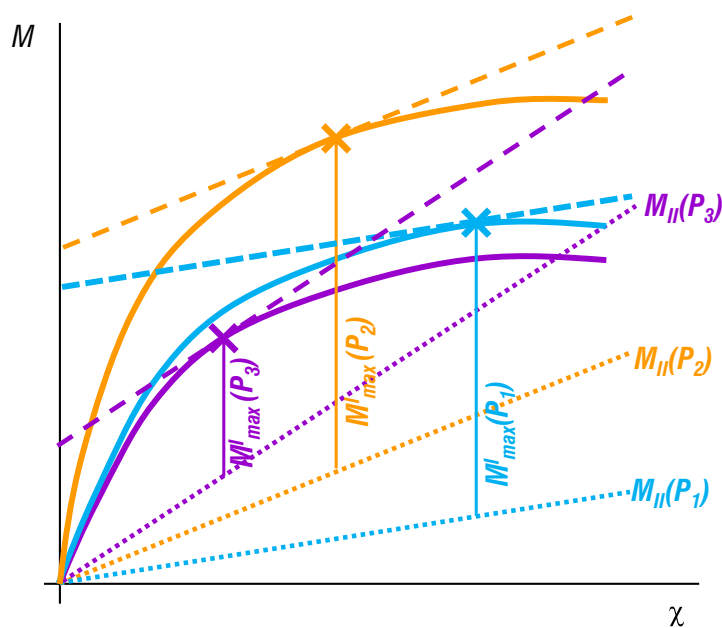
Tale valore sarà quindi inferiore rispetto all'effettivo momento sollecitante ( $M_{ext}$ ) che determina il collasso dell'asta e che comprende anche gli effetti delle deformazioni causate dal carico stesso ( $M_{II}$ ).



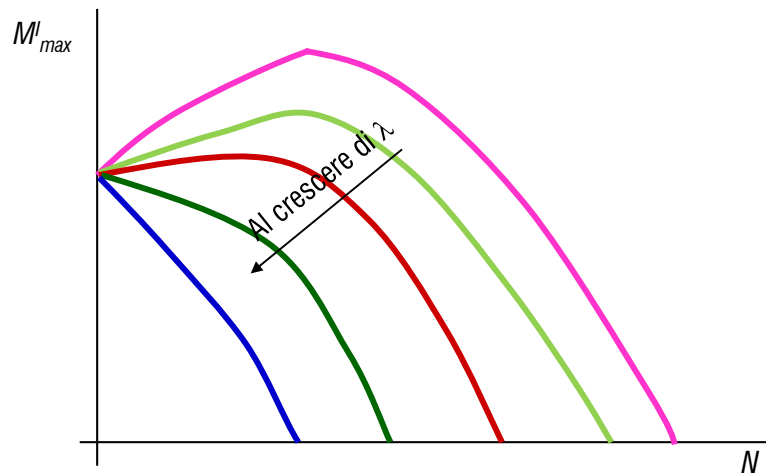
DOMINI DI INTERAZIONE

Consideriamo ora diversi valori di P (ossia di N) e tracciamo i rispettivi diagrammi di  $M_e$  e  $M_i$  e calcoliamo i relativi momenti massimi di primo ordine  $M_{I,max}^I$ .

In un diagramma  $M-\chi$ , avremo curve di  $M_e$  e  $M_i$  differenti per valori differenti di N, quindi anche differenti valori di  $M_{I,max}^I$ :



Possiamo anche rappresentare come varia  $M'_{max}$  al variare di  $N$ , per un determinato valore di  $\lambda$

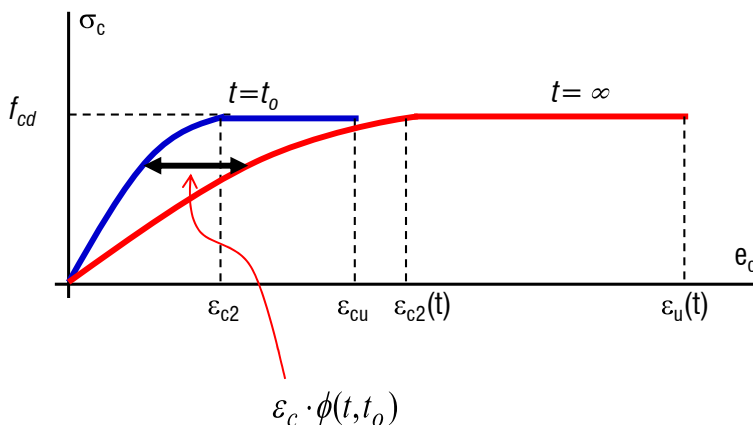


### Influenza della viscosità'

La viscosità è un fenomeno che determina un incremento delle deformazioni nel calcestruzzo rispetto al valore istantaneo (iniziale), per effetto dei carichi agenti per una lunga durata (v. lez. Caratteristiche materiali).

La viscosità causa quindi un incremento delle deformazioni flessionali, aumentando perciò gli effetti di 2° ordine.

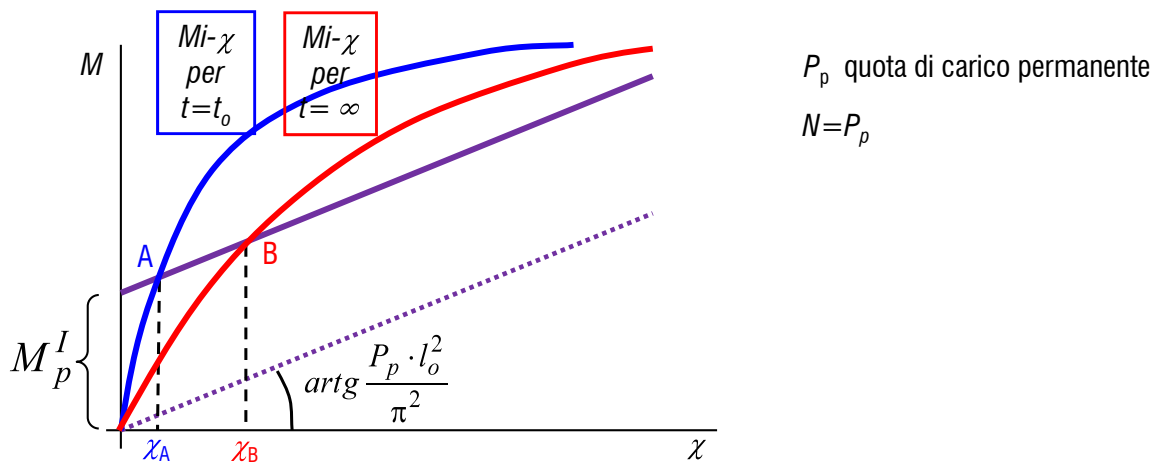
Un metodo approssimato per valutare questi effetti si basa sull'ipotesi di considerare per il calcestruzzo una legge costitutiva variata proporzionalmente al coefficiente di viscosità («stiriamo» orizzontalmente diagramma costitutivo)



$$\epsilon_{c2}(t) = \epsilon_{c2} \cdot [1 + \phi(t, t_0)]$$

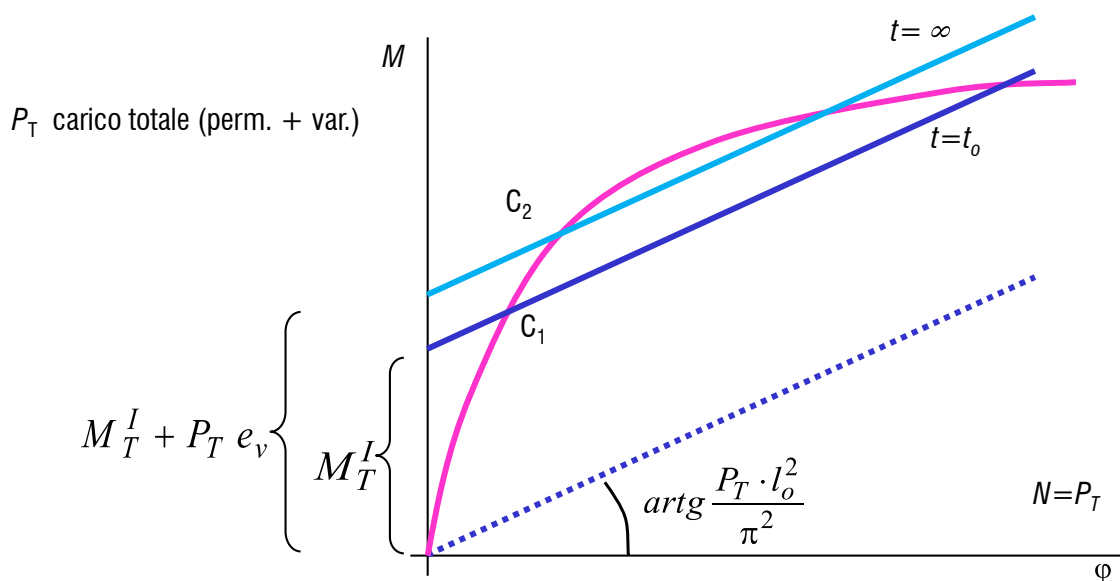
$$\epsilon_{cu}(t) = \epsilon_{cu} \cdot [1 + \phi(t, t_0)]$$

La viscosità incide quindi sul diagramma  $M_i$  del momento interno

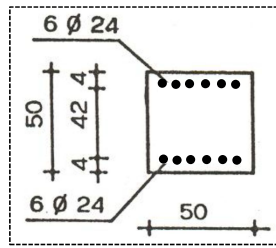
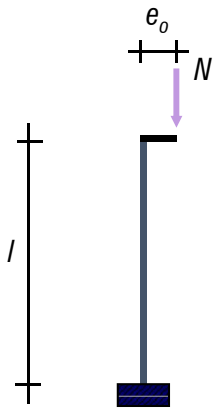


In alternativa, posso vedere gli effetti della viscosità come un'**eccentricità aggiuntiva  $e_v$**

Si considera comunque che gli effetti del secondo ordine correlati alla viscosità siano indotti dai soli carichi di lunga durata (carichi permanenti)



Esempio di applicazione del metodo colonna modello



$f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$f_{ys} = 430 \text{ MPa}$

$E_s = 206 \text{ GPa}$

$N = 1200 \text{ kN}$

$\gamma_c = 1.5$

$\gamma_s = 1.15$

$\epsilon_{yd} = 0.182\%$

Supponiamo di avere 3 pilastri in c.a. con la stessa sezione ma altezze diverse:

$l_1 = 4000 \text{ mm}$   
 $\lambda_1 = 55.4$

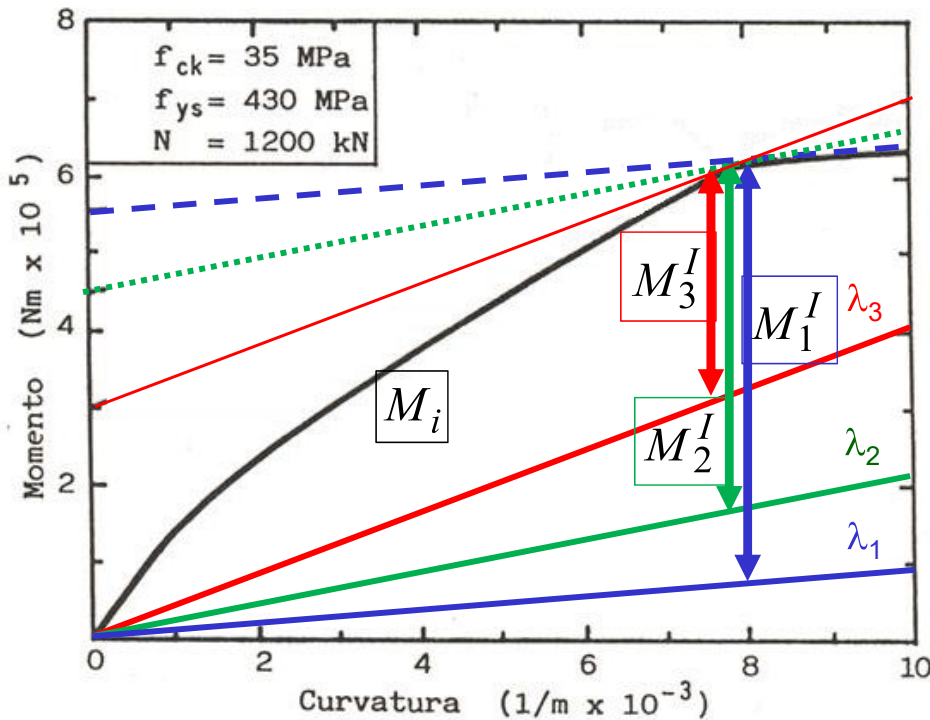
$l_2 = 6500 \text{ mm}$   
 $\lambda_2 = 90.1$

$l_3 = 9000 \text{ mm}$   
 $\lambda_3 = 124.7$

$\lambda = \beta l / i$ , con  $\beta = 2$  (mensola) e  $i = \sqrt{J/A} = 144.34$  ( $J = bh^3/12$  e  $A=bh$ )

Fissato un valore di N, ricaviamo il diagramma dei momenti interni  $M_i - \varphi$  (che sarà uguale per i 3 pilastri)

e determiniamo il momento max. di 1° ordine per i tre casi  $M_{max}^I = \max(M_i - M^{II})$



$M_1^I = 552 \text{ kNm}$

$M_2^I = 450 \text{ kNm}$

$M_3^I = 300 \text{ kNm}$

$M^{II} = \frac{P \cdot l_o^2}{\pi^2} \cdot \varphi_o$

$e_0 = 46.0 \text{ cm}$

$e_0 = 37.5 \text{ cm}$

$e_0 = 25.0 \text{ cm}$

Calcoliamo l'eccentricità per i 3 casi ( $M^I = P \cdot e_0$ )

## EFFETTI DEL SECONDO ORDINE SU TELAI

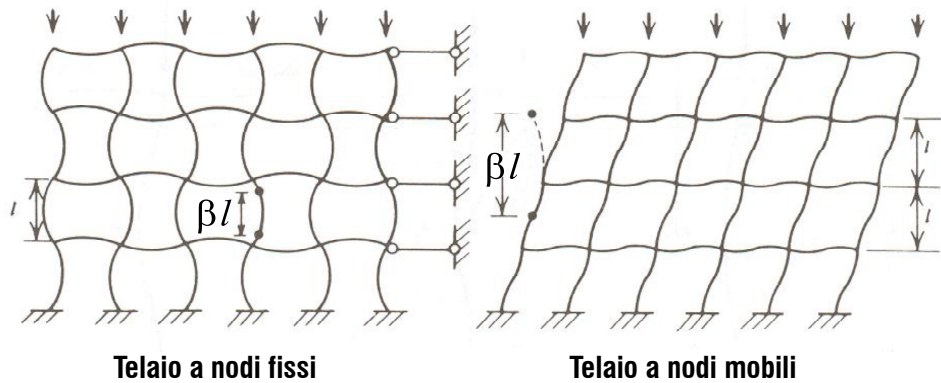
Per le strutture composte da più aste (telai) si possono avere due tipi di effetti del II ordine:

- se esiste uno spostamento relativo  $\Delta$  tra i due estremi della colonna, il carico verticale  $N$  provoca incrementi di momento per effetto dello spostamento laterale: **effetti del II ordine "globali"**;
- inoltre il carico assiale  $N$  induce rispetto alla deformata della linea d'asse momenti aggiuntivi: **effetti del II ordine "locali"** (appena visti)

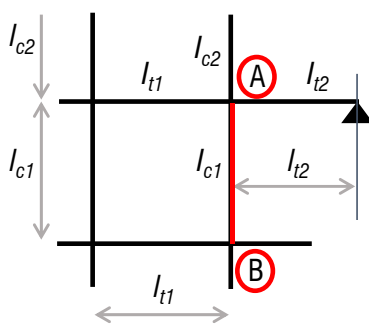
Il primo effetto è caratteristico delle **strutture a nodi mobili**, in quanto si verifica quando gli spostamenti laterali sono importanti; ad esso si sovrappone l'effetto locale.

Per i **telai a nodi fissi** invece è presente solo l'effetto di instabilità locale.

I metodi risolutivi visti in precedenza possono essere utilizzati anche per verificare i piedritti di strutture intelaiate, facendo riferimento ad una lunghezza equivalente di libera inflessione  $l_o = \beta l$



La lunghezza di libera inflessione  $l_o$  può essere ricavata mediante metodo grafico, utilizzando i **nomogrammi** proposti da Jackson e Moreland a partire dai valori  $k_A$  e  $k_B$  che rappresentano il grado di vincolo all'estremità della colonna:



$$l_o = \beta \cdot l$$

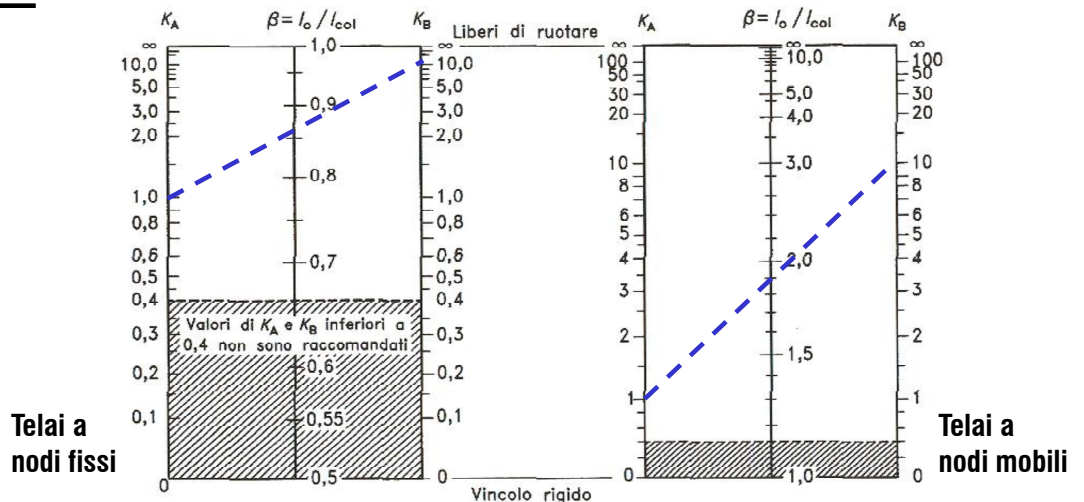
$$k_A (o k_B) = \frac{\sum EI_c / l_c}{\sum \alpha EI_t / l_t}$$

E modulo elastico  $E$

$I_c, I_t$  momenti d'inerzia di colonne e travi che concorrono nel nodo in esame

$l_c, l_t$  lunghezza di colonne e travi

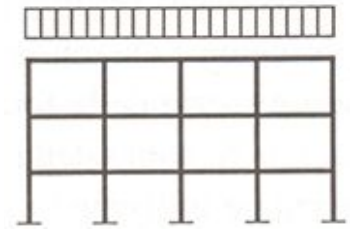
$\alpha$  Coefficiente che dipende dal vincolo all'altra estremità della trave in considerazione ( $\alpha=1.0$  per vincolo elastico o rigido,  $\alpha=0.5$  per estremo libero di ruotare,  $\alpha=0$  per mensola)



Gli effetti globali del second'ordine negli edifici possono essere trascurati se si ha:

$$P_{Ed} \leq 0.31 \cdot \frac{n}{n+1.6} \cdot \frac{\sum_i (E_{cd,i} I_{c,i})}{L^2}$$

0.12 ≤ < 1



con:

$P_{Ed}$  = carico verticale totale (su elementi controventati e di controvento)

$n$  = numero di piani

$L$  = altezza totale edificio (sopra il vincolo ad incastro di base)

$E_{cd,i}$  = valore di calcolo del modulo elastico del calcestruzzo dell' $i$ -esimo elemento di controvento

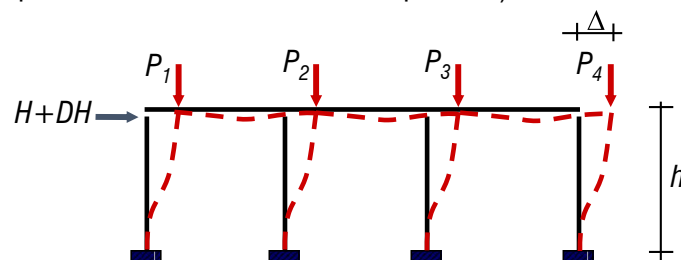
$I_{c,i}$  = momento d'inerzia dell' $i$ -esimo elemento di controvento (valuto nell'ipotesi di sezione interamente reagente)

$E_{cd,i} \cdot I_{c,i}$  = rigidezza flessionale dell' $i$ -esimo elemento di controvento

## METODO P-Δ per TELAI A NODI SPOSTABILI

Per lo studio degli **effetti globali** si possono applicare dei metodi semplificati di risoluzione, come il «**metodo P-Δ**» (*pi-delta*) per telai a nodi spostabili. Questo metodo è applicabile a telai a maglie rettangolari e rappresenta un procedimento iterativo che sostituisce al momento del II ordine prodotto sulle colonne dai carichi verticali  $P_i$  (dovuto agli spostamenti nodali  $\Delta$ ), quello prodotto dalla una forza orizzontale fittizia equivalente di piano DH (che si somma a quella orizzontale H eventualmente presente):

### Caso telaio ad 1 piano



- si parte calcolando  $\Delta$  come spostamento ottenuto da un'analisi lineare del 1° ordine
- si calcola poi la forza orizzontale aggiuntiva DH come:  
(con  $P_j$  azione assiale nell'asta  $j$ -esima

$$DH = \frac{\left( \sum_{j=1}^n P_j \right) \cdot \Delta}{h}$$

- si ripete poi di nuovo con l'aggiunta della forza DH e si ricava un nuovo valore dello spostamento  $\Delta$  ed una nuovo valore aggiornato di di DH;
- si procede così fino a convergenza di  $\Delta$  (e di DH).

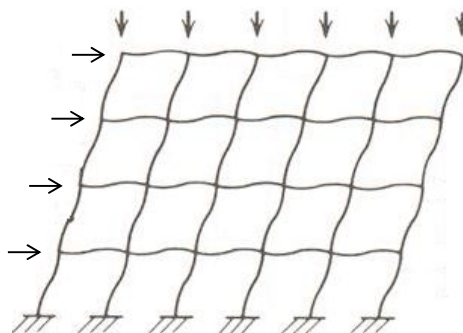
**Caso telaio a più piani**

- si calcola lo spostamento d'interpiano relativo al piano i-esimo ( $\Delta_i - \Delta_{i-1}$ ) attraverso un'analisi lineare del 1° ordine;
- si calcola poi la forza orizzontale di piano aggiuntiva  $DH_i$  come:

$$DH_i = \frac{\sum_{j=1}^n N_{i-1,j} \cdot (\Delta_i - \Delta_{i-1})}{h_i} - \frac{\sum_{j=1}^n N_{i,j} \cdot (\Delta_{i+1} - \Delta_i)}{h_{i+1}}$$

con  $N_{i,j}$  sforzo assiale sul pilastro  $j$  al piano  $i$ ;

- si ricalcolano di nuovo gli spostamenti relativi di interpiano con l'aggiunta delle forze  $DH_i$  e si ricava un nuovo valore degli spostamenti d'interpiano ( $\Delta_i - \Delta_{i-1}$ ) ed un nuovo valore aggiornato per  $DH_i$ ;
- si procede così fino a convergenza.



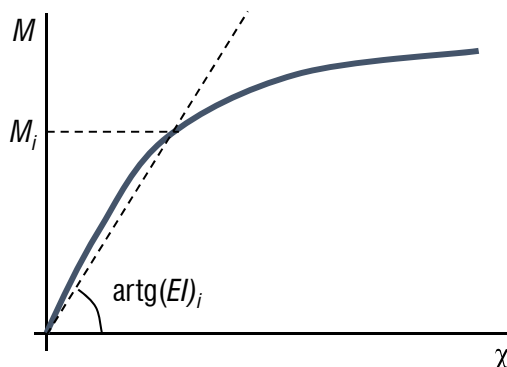
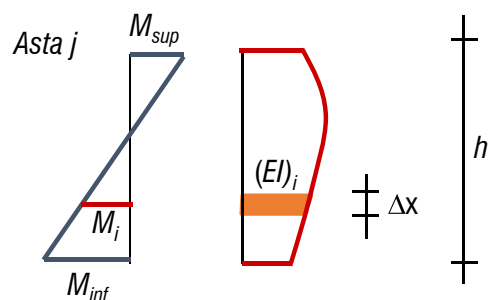
**Influenza della non linearità meccanica (ovvero relative al comportamento non-lineare dei materiali)**

Gli spostamenti  $\Delta$  dei nodi dipendono anche dalla rigidità flessionale  $EJ$  delle aste. Ma al crescere del livello di sollecitazione, la rigidità secante  $EJ$  varia a causa della non linearità meccanica dei materiali.

Pertanto, per un'analisi più accurata che tenga conto di questo, ad ogni passo del processo iterativo, una volta definite le sollecitazioni sugli elementi, si determinano i valori delle rigidità secanti dedotte dai legami momento-curvatura  $M-\chi$ .

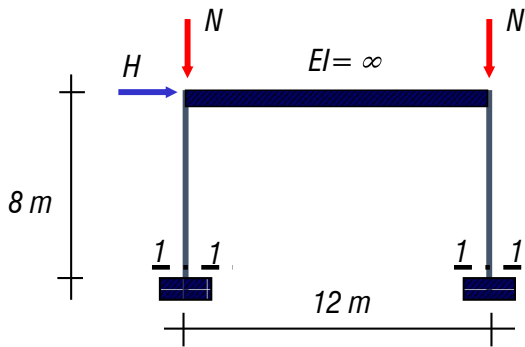
Bisogna inoltre tenere conto che la sollecitazione varia, in generale, lungo l'asta, e quindi anche  $EJ$  varia da sezione a sezione. In via semplificata, si può far riferimento per ciascuna asta ad una rigidità mediata equivalente  $(EJ)_{eq}$  pari a:

$$(EJ)_{eq,j} = \frac{h}{\left( \sum_{i=1}^m \frac{\Delta x}{(EI)_i} \right)}$$



Oppure, in via ancora più semplificata, si assume una rigidità dimezzata ( $EI_{eq} = 0.5EI_i$ ).

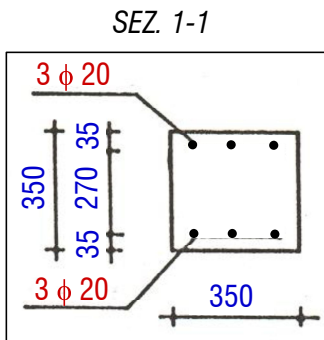
**Esempio: portale a nodi spostabili**



N (kN)	900
H (kN)	39.24
fys (MPa)	430
fck (MPa)	35
gammas	1.15
gammac	1.5
fyd (MPa)	374
0.85 fcd	19.8
Es (MPa)	206000
Ecm (MPa)	33500

Parametri caratteristici

Ic (mm <sup>4</sup> )	1250520833
Ecm Ic (Nmm <sup>2</sup> )	4.18924E+13
Ecm Ic/2 (Nmm <sup>2</sup> )	2.09462E+13



Per tenere conto della non-linearità meccanica, teniamo conto, in prima battuta, di una rigidezza dimezzata

$$\Delta = (H h^3 / 12EI) / n_c$$

$$H = (N+N) \Delta / h$$

Numero di colonne

$$\Delta(\text{passo1}) = (39.24 \cdot 10^3 \cdot 8000^3 / 12 \cdot 2.09462E+13) / 2 = 39.97 \text{ mm}$$

$$H(\text{passo1}) = 2 \cdot 900 \cdot 10^3 \cdot 39.97 / 8000 = 8993 \text{ N}$$

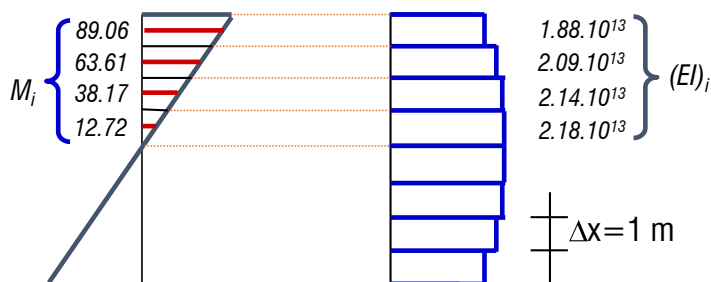
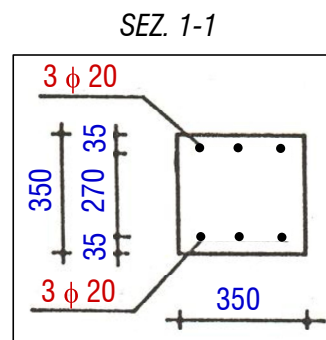
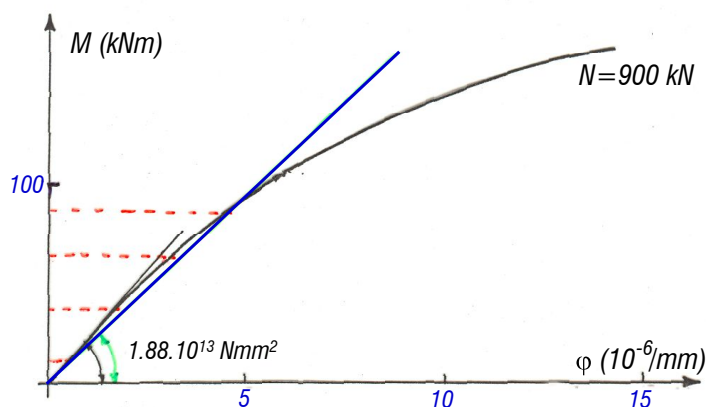
Passo 1		Passo 4	
Delta (mm)	39.97	Delta (mm)	51.70
DH (kN)	8.99	DH (kN)	11.63
Passo 2		Passo 5	
Delta (mm)	49.12	Delta (mm)	51.81
DH (kN)	11.05	DH (kN)	11.66
Passo 3		Passo 6	
Delta (mm)	51.22	Delta (mm)	51.84
DH (kN)	11.53	DH (kN)	11.66

Stabilizzato H, si calcola il relativo momento (equilibrio alla rotazione)

$$M = H h / 2 / n_c = (39.24 + 11.66) \cdot 8 / 2 / 2 = 101.8 \text{ kNm}$$

Mmax (kNm)	101.8
------------	-------

Si verifica la "bontà" della rigidezza equivalente adottata:



$$(EI)_{eq} = \frac{h}{\left( \sum_{i=1}^8 \frac{\Delta x}{(EI)_i} \right)} = 2.07 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

$$(EI)_{eq} = 2.07 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2 \approx 2.09 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

Verifica O.K.

## Bibliografia

- Toniolo G., Di Prisco M., "Cemento Armato – Calcolo agli stati limite", Vol. 2a, terza edizione, Ed. Zanichelli, 2010.
- Park R., Paulay T., "Reinforced Concrete Structures", John Wiley & Sons, New York, 1975.
- Mac Gregor J., "Reinforced Concrete – Mechanics and Design", Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- Santarella L., "Prontuario del Cemento Armato", XXXVIII edizione, Ed. Hoepli, Milano.