

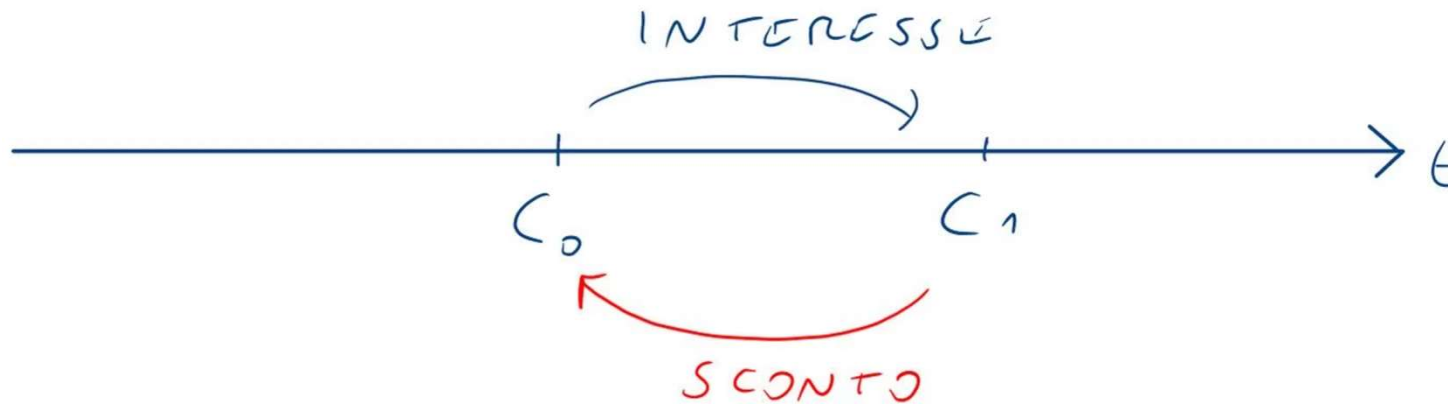
# Calcolo di Interessi e Sconti

MATEMATICA FINANZIARIA

ECONOMIA AZIENDALE

## Il Concetto di Interesse e Sconto

In matematica finanziaria, il **capitale**, il **tempo** e il **tasso di interesse** sono le tre grandezze fondamentali che governano ogni operazione finanziaria. La distinzione tra interesse e sconto rappresenta il punto di partenza concettuale essenziale.



### Interesse

Il montante  $C_1$  è il risultato della capitalizzazione di un capitale iniziale  $C_0$ . L'interesse viene calcolato *in avanti* nel tempo: partendo da  $C_0$  si arriva a  $C_1$ . È la remunerazione del capitale prestato per un certo periodo.

### Sconto

Lo sconto è l'operazione inversa: partendo da un valore futuro  $C_1$ , si vuole determinare il valore attuale  $C_0$ . Si calcola *a ritroso* nel tempo.

- ③ Sul diagramma temporale: la freccia blu (da  $C_0$  a  $C_1$ ) rappresenta la capitalizzazione tramite interesse; la freccia rossa (da  $C_1$  a  $C_0$ ) rappresenta l'attualizzazione tramite sconto.

# Il Tasso d'Interesse e le Tre Grandezze

Il calcolo dell'interesse si basa su tre variabili fondamentali che devono essere sempre specificate con precisione prima di procedere con qualsiasi calcolo.

## Capitale ( $C_0$ )

Il capitale iniziale è la somma di denaro disponibile al tempo zero. Rappresenta il punto di partenza di ogni operazione finanziaria. Nell'esempio didattico:  $C_0 = 10.000 \text{ €}$ .

## Tempo ( $t$ )

La durata dell'operazione finanziaria. Può essere espressa in **anni**, **mesi** o **giorni**. È fondamentale specificare se si utilizza l'**anno civile** (365 giorni) o l'**anno commerciale** (360 giorni - mesi da 30 giorni).

## Tasso di Interesse ( $i$ )

Il tasso esprime il costo del denaro per unità di tempo. Nell'esempio:  **$i = 10\%$  annuo**. Va sempre coerentemente rapportato all'unità di misura del tempo utilizzata nel calcolo.

- ☐ **Attenzione alla coerenza tra tasso e tempo:** se il tasso è annuo e il tempo è in mesi, occorre convertire dividendo per 12. Se il tempo è in giorni, si divide per 365 (anno civile) o 360 (anno commerciale).

## L'Interesse Semplice: Formula e Applicazioni

Nel regime dell'**interesse semplice**, gli interessi vengono calcolati esclusivamente sul capitale iniziale e non vengono mai capitalizzati.

La formula fondamentale è:

$$I = C_0 \times i \times t$$

Dove  $I$  è l'interesse maturato,  $C_0$  il capitale iniziale,  $i$  il tasso annuo,  $t$  il tempo espresso in anni o frazione di anno.

Esempi numerici con  $C_0 = 10.000 \text{ €}$  e  $i = 10\%$  annuo

$t = 18$  mesi

$$I = 10.000 \times 10\% \times \frac{18}{12} = 1.500 \text{ €}$$

Tempo convertito in anni:  $18 \div 12 = 1,5$  anni. Risultato: **1.500 €** di interessi.

$t = 2$  mesi

$$I = 10.000 \times 10\% \times \frac{2}{12} = 166,67 \text{ €}$$

Tempo convertito in anni:  $2 \div 12 = 0,1667$  anni. Risultato: **166,67 €** di interessi.

$t = 17$  giorni (anno civile)

$$I = 10.000 \times 10\% \times \frac{17}{365} = 46,58 \text{ €}$$

Con anno civile (365 giorni). Risultato: **46,58 €** di interessi. Con anno commerciale (360 giorni) il risultato sarebbe leggermente diverso.

**ⓘ Anno civile vs Anno commerciale:** L'anno civile utilizza 365 giorni (o 366 negli anni bisestili). L'anno commerciale, convenzionalmente, considera 360 giorni (12 mesi  $\times$  30 giorni). La scelta dipende dalle convenzioni contrattuali.

# Capitalizzazione nel Regime dell'Interesse Semplice

Il **montante** ( $C_1$ ) è la somma complessiva che si ottiene alla scadenza, data dal capitale iniziale più gli interessi maturati. Nel regime dell'interesse semplice, il montante cresce in modo **lineare** nel tempo.

Derivazione della formula del montante

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_1 = C_0 + C_0 \times i \times t$$

$$C_1 = C_0(1 + i \times t)$$

Applicazione numerica:  $C_0 = 10.000 \text{ €}$ ,  $i = 10\%$ ,  $t = 18 \text{ mesi}$

$$C_1 = 10.000 \times \left(1 + 10\% \times \frac{18}{12}\right) = 10.000 \times 1,15 = 11.500 \text{ €}$$

## Interpretazione economica

Il montante di **11.500 €** si compone di:

- **10.000 €** = capitale iniziale restituito
- **1.500 €** = interessi maturati in 18 mesi al tasso del 10% annuo

La crescita è lineare: per ogni mese aggiuntivo gli interessi aumentano sempre della stessa quantità ( $1.500 \div 18 = 83,33 \text{ €}$  al mese).

## Capitalizzazione

La funzione  $C_1 = C_0(1 + i \times t)$  è una funzione *lineare* in  $t$ . Il suo grafico è una retta che parte da  $C_0$  (all'istante  $t=0$ ) e cresce con pendenza costante pari a  $C_0 \times i$ . Questo la distingue nettamente dalla capitalizzazione composta, che segue invece una curva esponenziale.

# Attualizzazione nel Regime dell'Interesse Semplice (Sconto Razionale)

L'operazione inversa della capitalizzazione è l'**attualizzazione**: dato un valore futuro  $C_1$ , si determina il corrispondente valore attuale  $C_0$ . Nel regime dell'interesse semplice, questa operazione prende il nome di **sconto razionale** (o matematico).

Legge di attualizzazione — Sconto Razionale

Partendo dalla formula del montante e invertendola:

$$C_1 = C_0(1 + i t) \Rightarrow C_0 = \frac{C_1}{1 + i t}$$

Verifica numerica con  $C_1 = 11.500 \text{ €}$ ,  $i = 10\%$ ,  $t = 18 \text{ mesi}$

$$C_0 = \frac{11.500}{1 + 10\% \times \frac{18}{12}} = \frac{11.500}{1,15} = 10.000 \text{ €}$$

## Lo sconto razionale (D)

Lo sconto razionale è la differenza tra valore futuro e valore attuale:  $D = C_1 - C_0 = 11.500 - 10.000 = 1.500 \text{ €}$ . Si noti che lo sconto razionale coincide con l'interesse: entrambi valgono 1.500 €. Questo avviene perché lo sconto razionale è coerente con la legge di capitalizzazione semplice.

## Caratteristica fondamentale

Lo sconto razionale viene calcolato sul **valore attuale  $C_0$**  (non sul valore futuro  $C_1$ ). Questa è la differenza concettuale chiave rispetto allo sconto commerciale, dove invece lo sconto è calcolato sul valore nominale futuro  $C_1$ .

## Il Regime dello Sconto Commerciale

Lo **sconto commerciale** è un regime finanziario ampiamente utilizzato nella pratica bancaria, in particolare per lo sconto di cambiali e titoli di credito. A differenza dello sconto razionale, qui lo sconto viene calcolato sul **valore nominale futuro  $C_1$**  e non sul valore attuale.

Formule fondamentali dello sconto commerciale

$$D = C_1 \times d \times t$$

$$C_0 = C_1 - D$$

$$C_0 = C_1(1 - d \times t)$$

Dove **d** è il tasso di sconto commerciale (distinto dal tasso di interesse  $i$ ), **t** è il tempo residuo alla scadenza, e **D** è lo sconto applicato.

Applicazione numerica:  $C_1 = 11.500$  €,  $d = 10\%$ ,  $t = 18$  mesi

$$C_0 = 11.500 \times \left(1 - 10\% \times \frac{18}{12}\right) = 11.500 \times 0,85 = 9.775 \text{ €}$$

### Confronto: Sconto Razionale vs Commerciale

Partendo dallo stesso valore futuro  $C_1 = 11.500$  € con  $i = d = 10\%$  e  $t = 18$  mesi:

- **Sconto razionale:**  $C_0 = 10.000$  € (sconto = 1.500 €)
- **Sconto commerciale:**  $C_0 = 9.775$  € (sconto = 1.725 €)

Lo sconto commerciale è *sempre più elevato* dello sconto razionale perché viene applicato all'importo maggiore  $C_1$ .

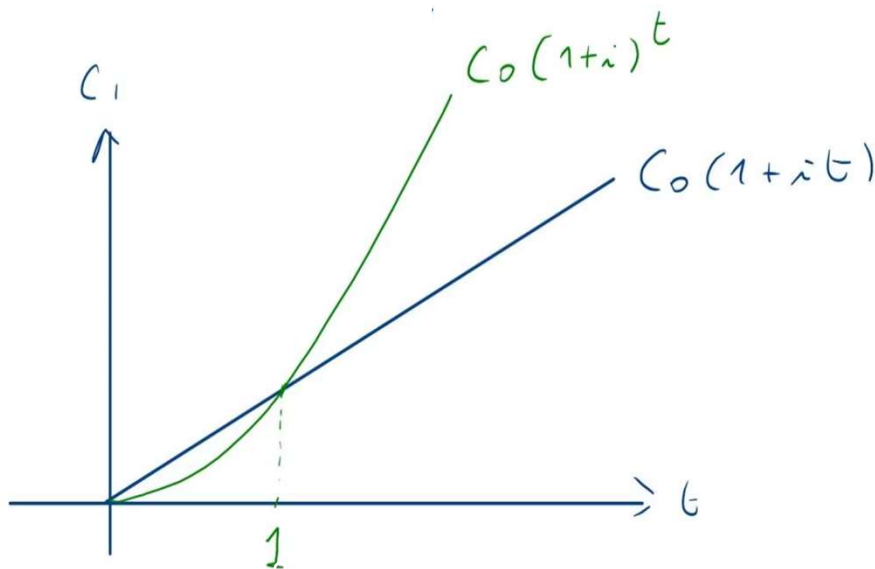
### Limite del regime commerciale

Attenzione: la formula  $C_0 = C_1(1 - dt)$  diventa negativa se  $d \times t \geq 1$ . Per  $t = 18$  mesi e  $d = 10\%$ , il prodotto è 0,15, quindi il regime è ancora valido. Ma per durate molto lunghe o tassi elevati, il regime dello sconto commerciale può portare a risultati economicamente non sensati.

## Il Regime degli Interessi Composti

Nel regime dell'**interesse composto**, gli interessi maturati vengono periodicamente capitalizzati, cioè aggiunti al capitale e produttivi di ulteriori interessi nei periodi successivi. Questo meccanismo genera una crescita **esponenziale** del capitale nel tempo, a differenza della crescita lineare dell'interesse semplice.

Legge di capitalizzazione composta:



Il grafico mostra chiaramente le due leggi di capitalizzazione:

- **Retta blu:**  $C_0(1+it)$  — interesse semplice, crescita lineare
- **Curva verde:**  $C_0(1+i)^t$  — interesse composto, crescita esponenziale

Le due funzioni si incontrano in  $t = 1$  (fine del primo periodo). Per  $t < 1$  il montante semplice è maggiore; per  $t > 1$  il montante composto supera quello semplice.

# Confronto tra i Regimi Finanziari

Riepilogo schematico delle caratteristiche distintive dei tre regimi finanziari studiati, con le rispettive formule di capitalizzazione e attualizzazione.

Caratteristica	Interesse Semplice	Sconto Commerciale	Interesse Composto
Capitalizzazione	$C_1 = C_0(1 + i \cdot t)$	–	$C_t = C_0(1+i)^t$
Attualizzazione	$C_0 = C_1 / (1 + i \cdot t)$	$C_0 = C_1(1 - d \cdot t)$	$C_0 = C_t / (1+i)^t$
Base di calcolo	Capitale iniziale $C_0$	Valore futuro $C_1$	Capitale iniziale $C_0$
Tipo di crescita	Lineare	Lineare (decrescente)	Esponenziale
Uso tipico	Breve periodo	Sconto cambiali	Lungo periodo, investimenti

- ☑ Regola pratica: per operazioni a breve termine (meno di 1 anno) si usa preferibilmente l'interesse semplice; per operazioni a medio-lungo termine si adotta l'interesse composto. Lo sconto commerciale è tipico delle operazioni bancarie di smobilizzo crediti.