FISICA GENERALE

— Parte 3 —

Statistica

Link moodle: https://moodle2.units.it/course/view.php?id=16681

Codice Teams del corso: gz0wuf4

Programma delle lezioni

Lezione 1: Introduzione al corso, ai concetti generali e all'analisi degli errori; stima delle incertezze

Lezione 2: Errori casuali e sistematici, rappresentazione degli errori, cifre significative, discrepanza

Lezione 3: Errori assoluti e relativi, applicazioni particolari della propagazione degli errori, somma in quadratura

Lezione 4: Propagazione degli errori, funzioni di una o più variabili, formula generale; esempi ed esercizi

Lezione 5: Analisi statistica degli errori casuali; media, deviazione standard; errori sistematici

Lezione 6: Rappresentazione dei dati; istogrammi e distribuzioni, distribuzione limite

Lezione 7: Distribuzione normale o gaussiana (prima parte); livelli di confidenza

Lezione 8: Distribuzione gaussiana (seconda parte) e principio di massima verosimiglianza; rigetto dei dati

Lezione 9: Distribuzione binomiale

Lezione 10: Distribuzione di Poisson

Lezione 11: Metodo dei minimi quadrati; ripasso di eventuali argomenti a richiesta; esercizi

La distribuzione limite

Quando il numero di misure si avvicina all'infinito, la loro distribuzione si avvicina a qualche curva continua e definita.

Quando ciò accade, la curva continua è chiamata la distribuzione limite.

La **distribuzione limite** è la distribuzione che si otterrebbe se il numero delle misure diventasse infinitamente grande.

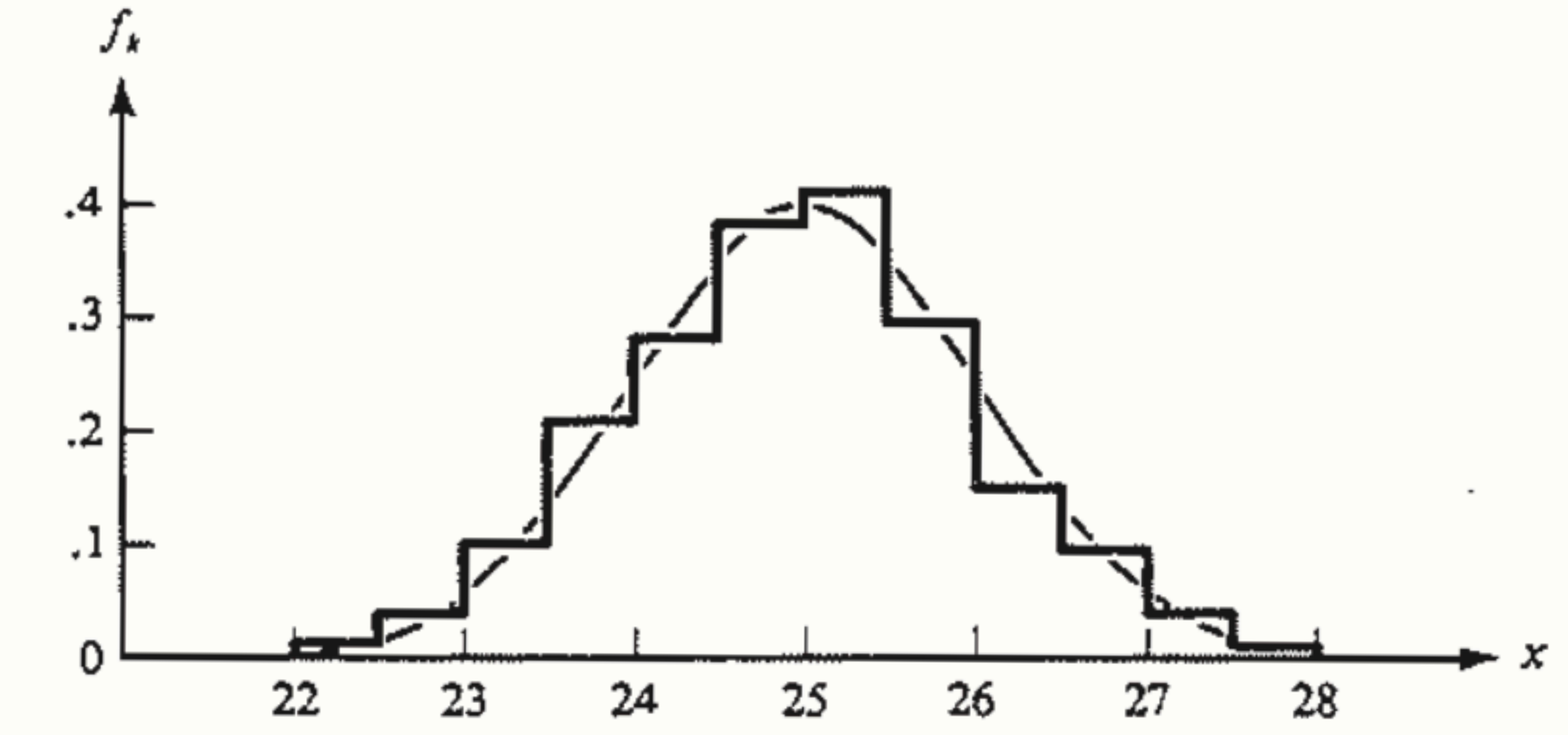
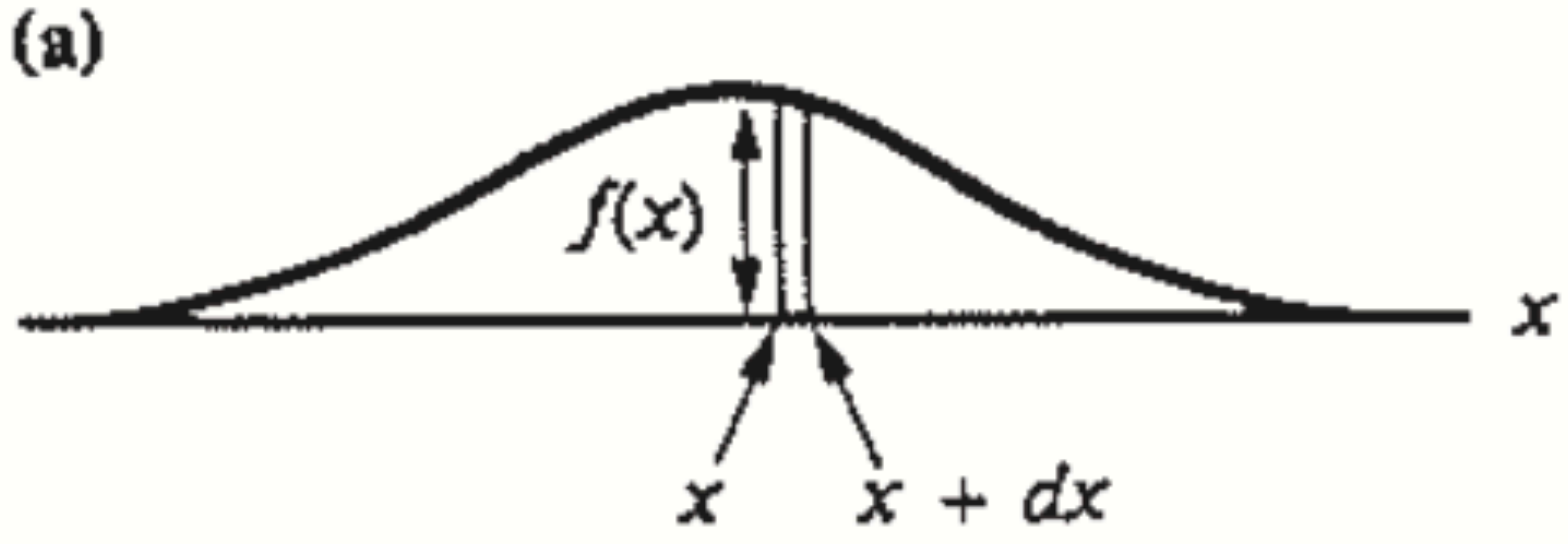


Figura 5.4. *Istogramma per 1000 misure della stessa grandezza di Figura 5.3. La curva tratteggiata è la distribuzione limite.*



Significato della distribuzione limite:
all'aumentare del numero di misure della grandezza x, l'istogramma diventerà indistinguibile da $f(x)$.
Allora **la frazione di misure che cadono tra x e x+dx è uguale all'area** $f(x)dx$

La distribuzione limite

Dal momento che la probabilità totale di ottenere un risultato in qualunque punto tra $-\infty$ e $+\infty$ deve essere 1, la funzione limite $f(x)$ deve soddisfare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad \Longrightarrow \; f(x) \text{ è } \textbf{normalizzata}$$

$f(x)$ è essenzialmente zero al di fuori dell'intervallo in cui le misure sono più probabili, per cui non ci si deve aspettare di ottenere valori della grandezza misurata che siano prossimi a $\pm\infty$

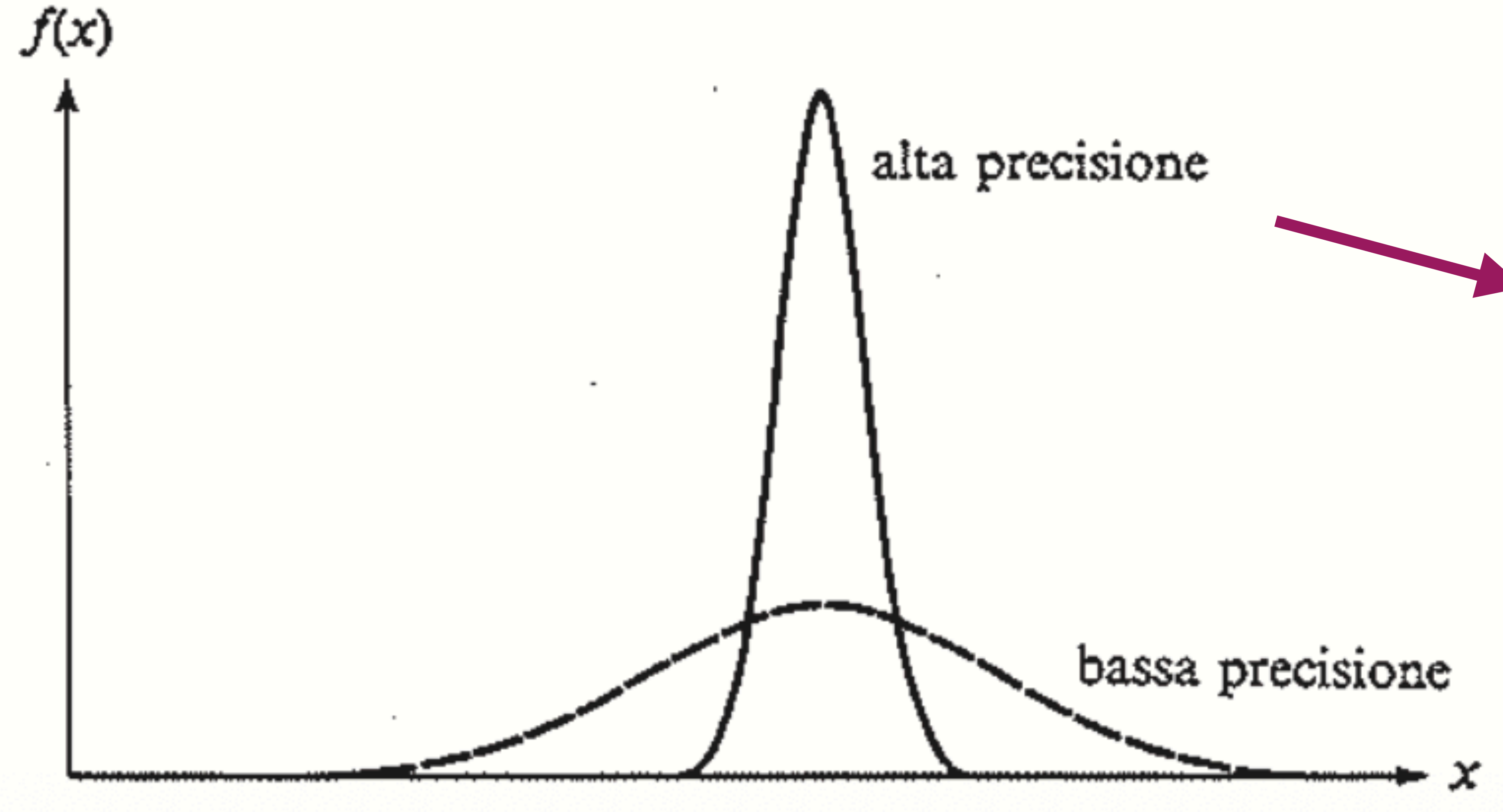


Figura 5.6. *Due distribuzioni limite, una per una misura ad alta precisione, l'altra per una misura a bassa precisione.*

distribuzione limite stretta e piccata

distribuzione limite più ampia

La media di una distribuzione

Se conosciamo $f(x)$ e dobbiamo calcolare il **valor medio** $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

dove $f(x)\, dx$ è la frazione di valori in ciascun intervallo dx, in analogia con $\bar{x} = \sum_k x_k F_k$

Con ragionamento simile, la **varianza** può essere calcolata come:

$$\sigma_x^{\ 2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2\, f(x)\, dx$$

scritta come la media della deviazione standard al quadrato.

Introduzione alla distribuzione normale

Diversi tipi di misure hanno **diverse distribuzioni limite**.
Non tutte le distribuzioni limite hanno una forma simmetrica e a campana come quelle mostrate.

La distribuzione normale o distribuzione di Gauss descrive la **distribuzione limite** dei risultati per qualunque **misura soggetta a molti piccoli errori casuali**.

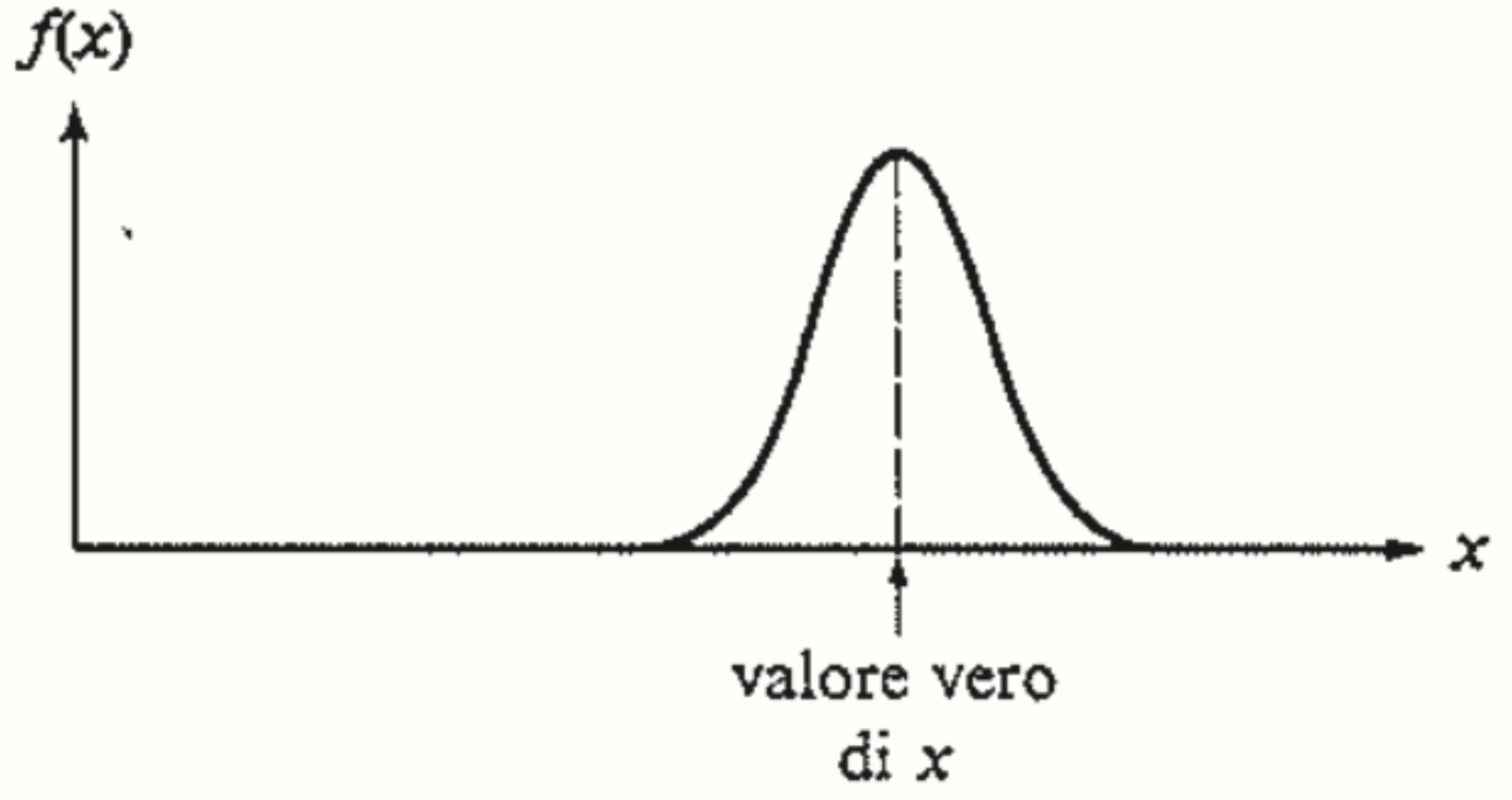


Figura 5.7. *La distribuzione limite per una misura che è soggetta a molti piccoli errori casuali. La distribuzione ha la forma di una campana ed è centrata sul valore vero della grandezza misurata* x.

Introduzione alla distribuzione normale

Se una **misura** è **soggetta a molte piccole sorgenti di errori casuali** e t**rascurabili errori sistematici**, allora i valori misurati saranno distribuiti su una curva a campana, e questa curva sarà centrata sul valore vero di x.

In presenza di errori sistematici apprezzabili, la distribuzione limite non sarà centrata sul valore vero.

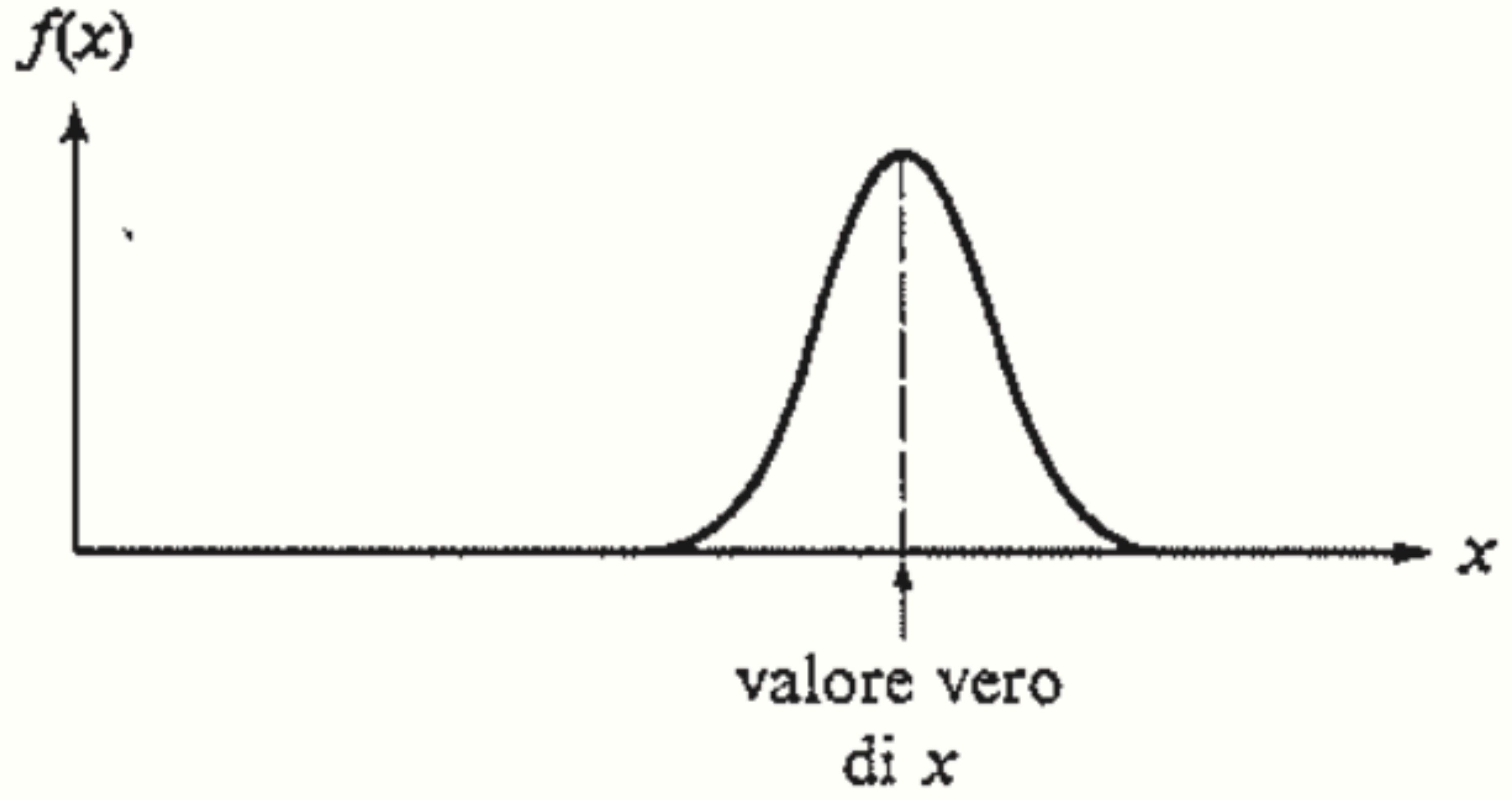


Figura 5.7. *La distribuzione limite per una misura che è soggetta a molti piccoli errori casuali. La distribuzione ha la forma di una campana ed è centrata sul valore vero della grandezza misurata* x.

Introduzione alla distribuzione normale

Qual è il **valore vero** di una misura?
Nessuna misura può determinare con certezza ed esattezza il valore di una variabile continua.

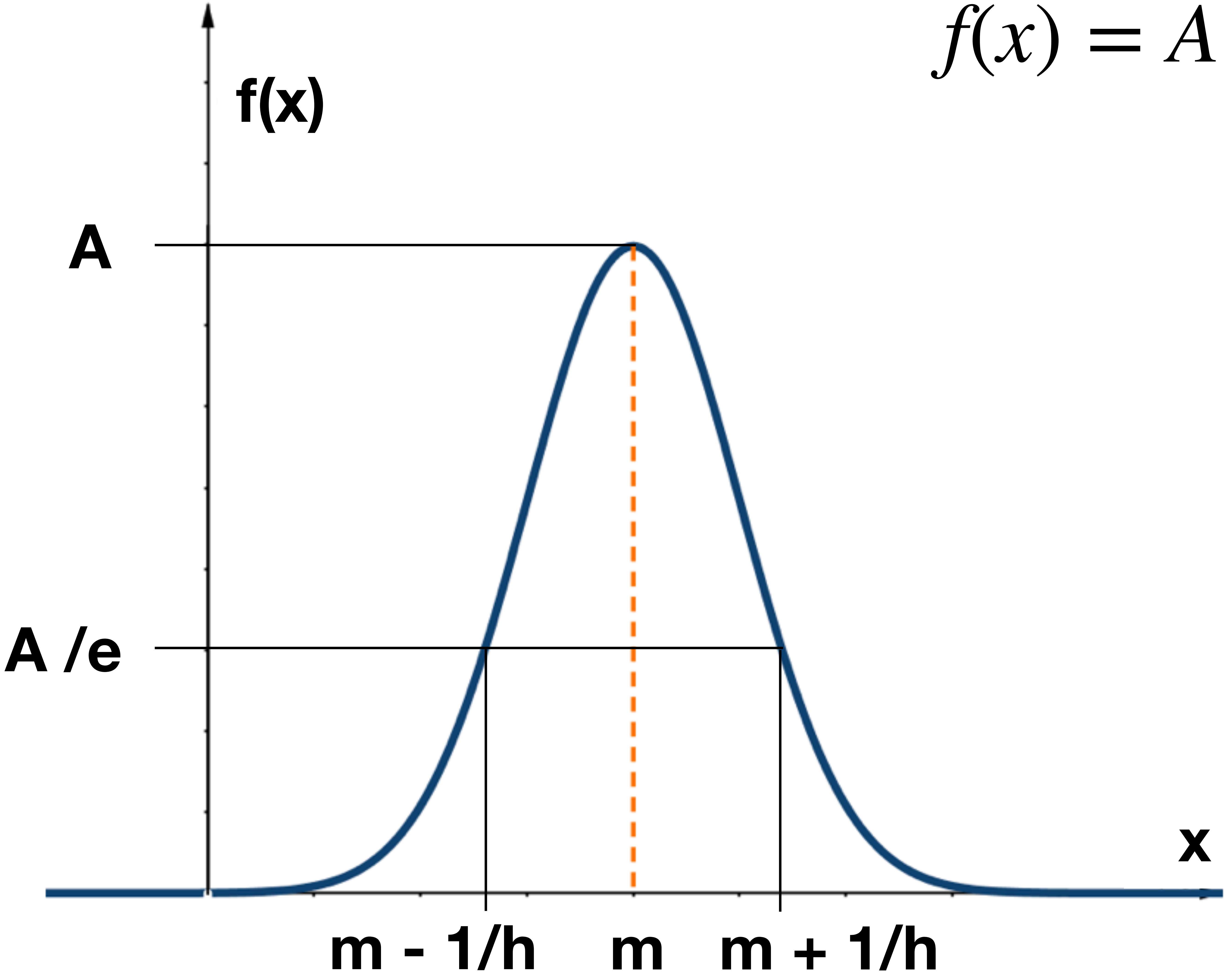
Possiamo pensare che il valore vero di una misura sia quel valore al quale ci si avvicina sempre più facendo più e più misure, sempre più accuratamente.

Convenzionalmente, i valori veri delle grandezze misurate x, y, … si denotano con X, Y, …

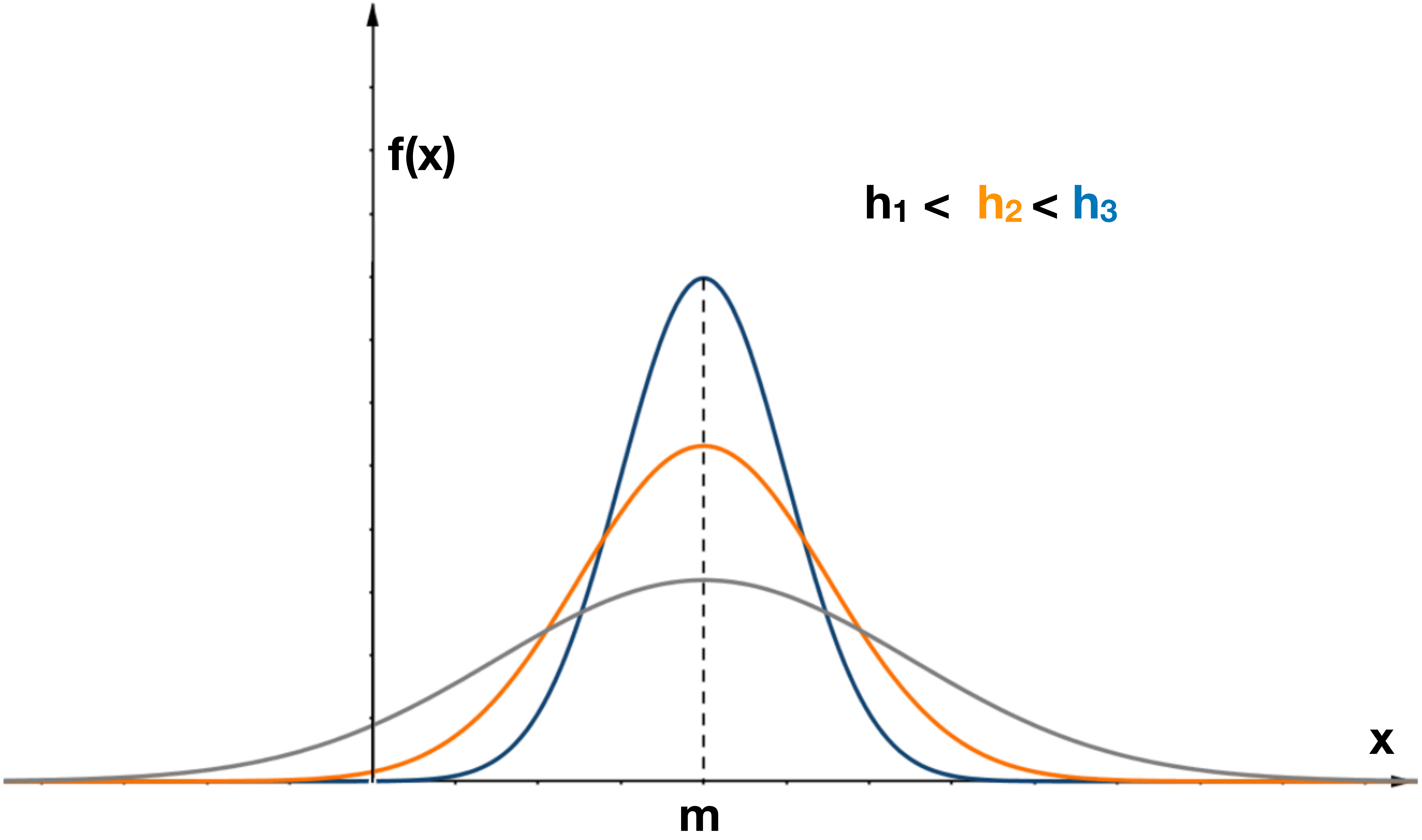
La distribuzione normale o distribuzione di Gauss descrive la **distribuzione limite** dei risultati per qualunque **misura soggetta a molti piccoli errori casuali**.

Rappresentazione della distribuzione normale

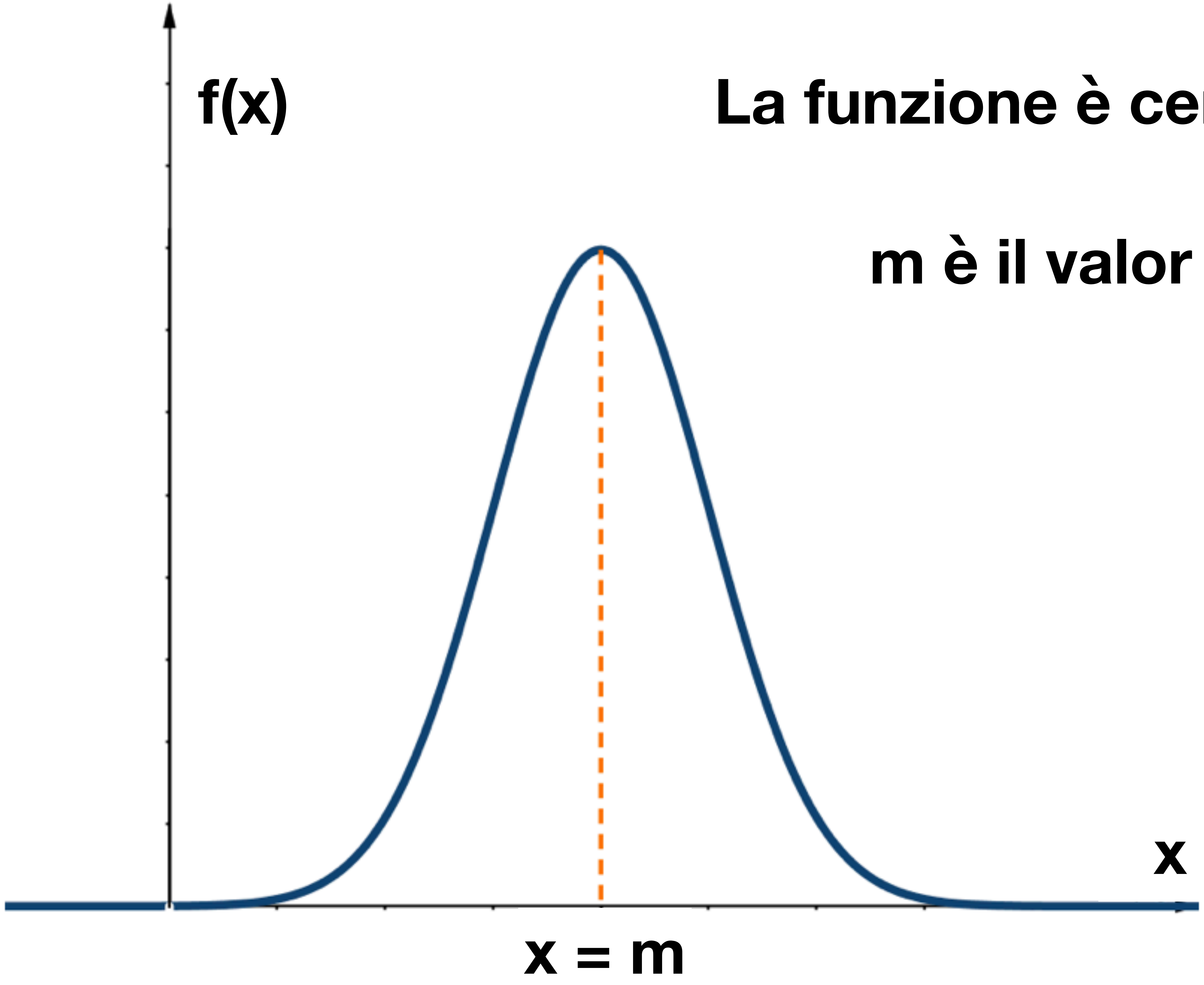
$$f(x) = A\, e^{-h^2 (x-m)^2}$$



Distribuzioni normali con diverso valore di h



Valor medio della distribuzione normale



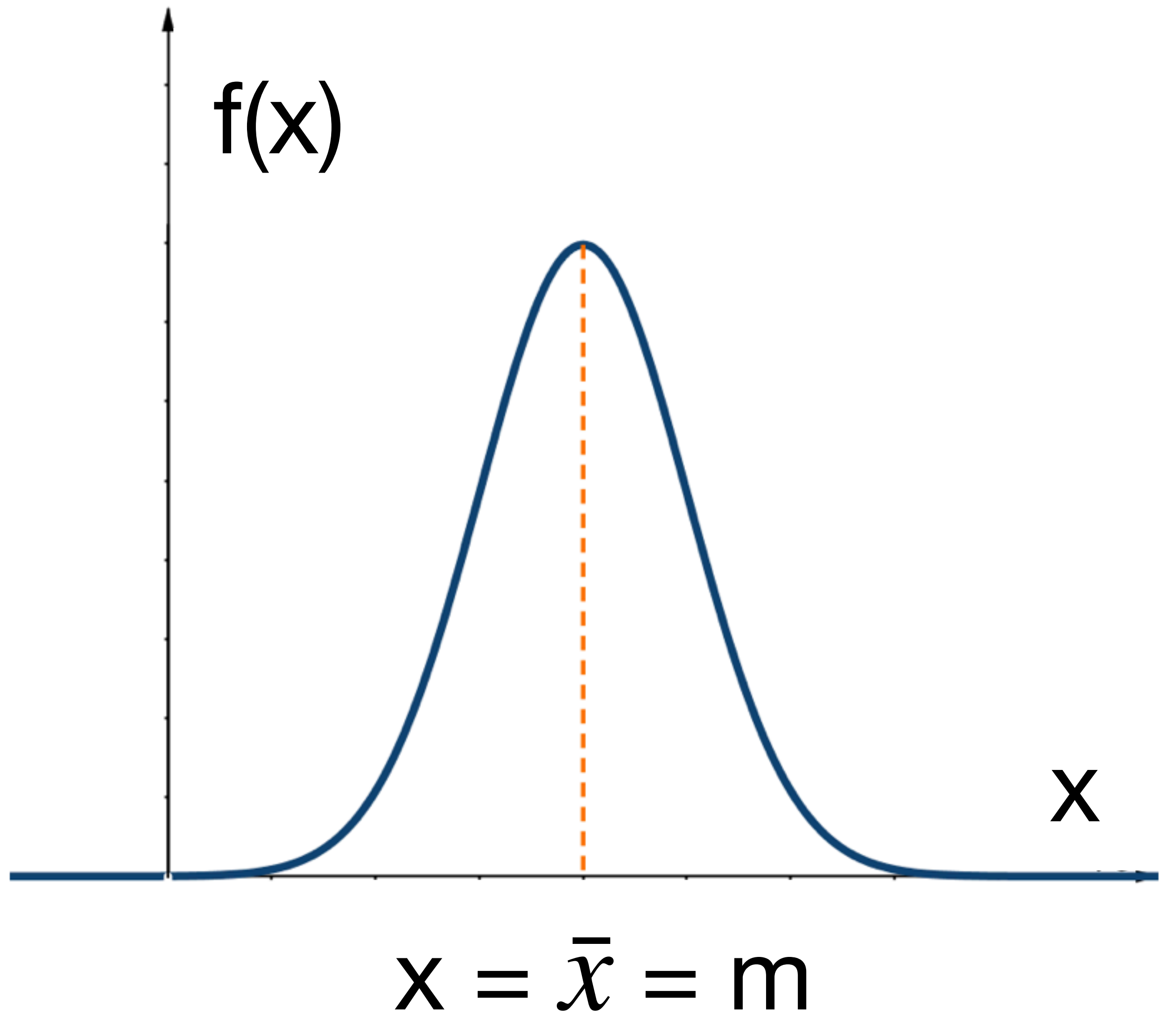
La funzione è centrata in x = m

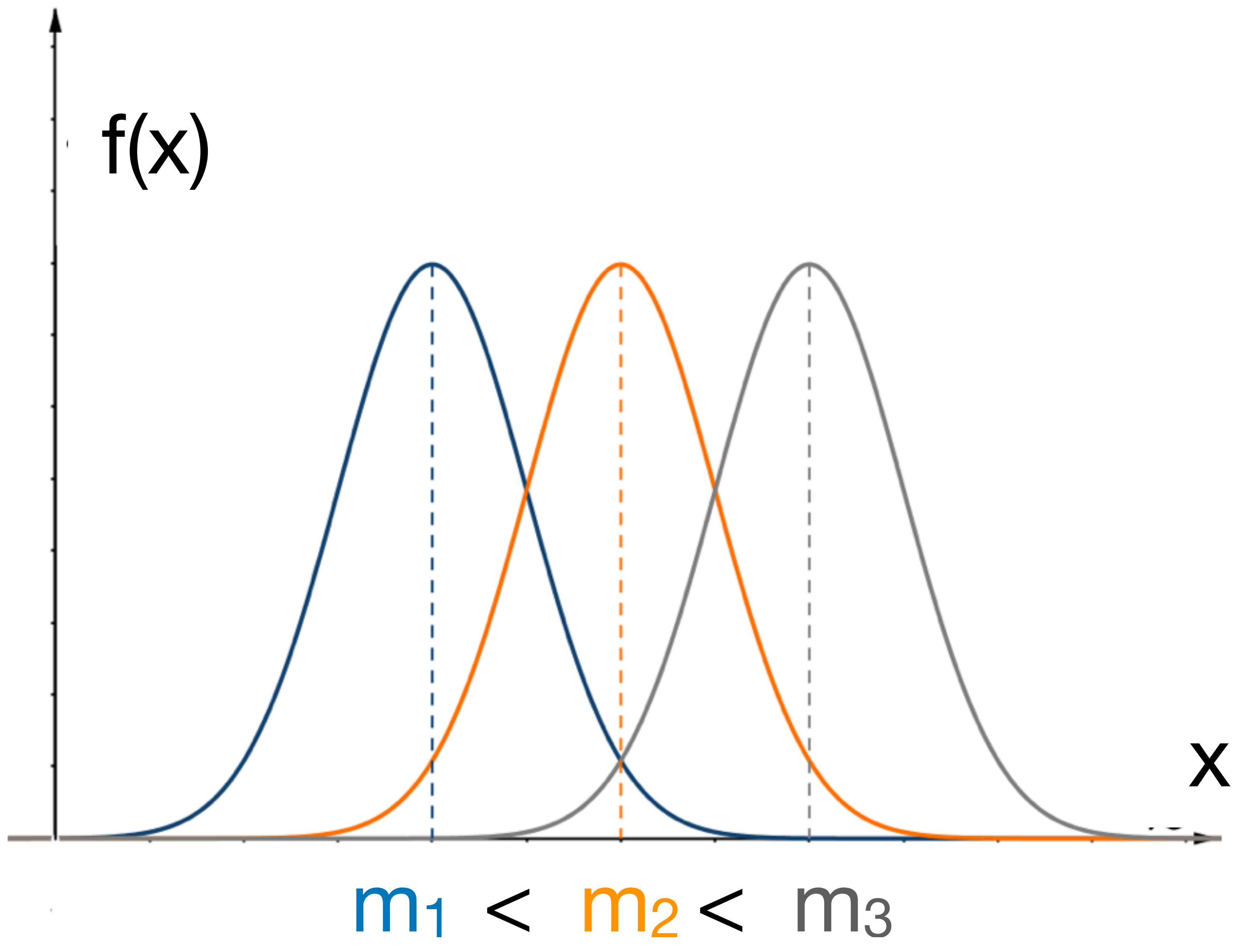
m è il valor medio di f(x)

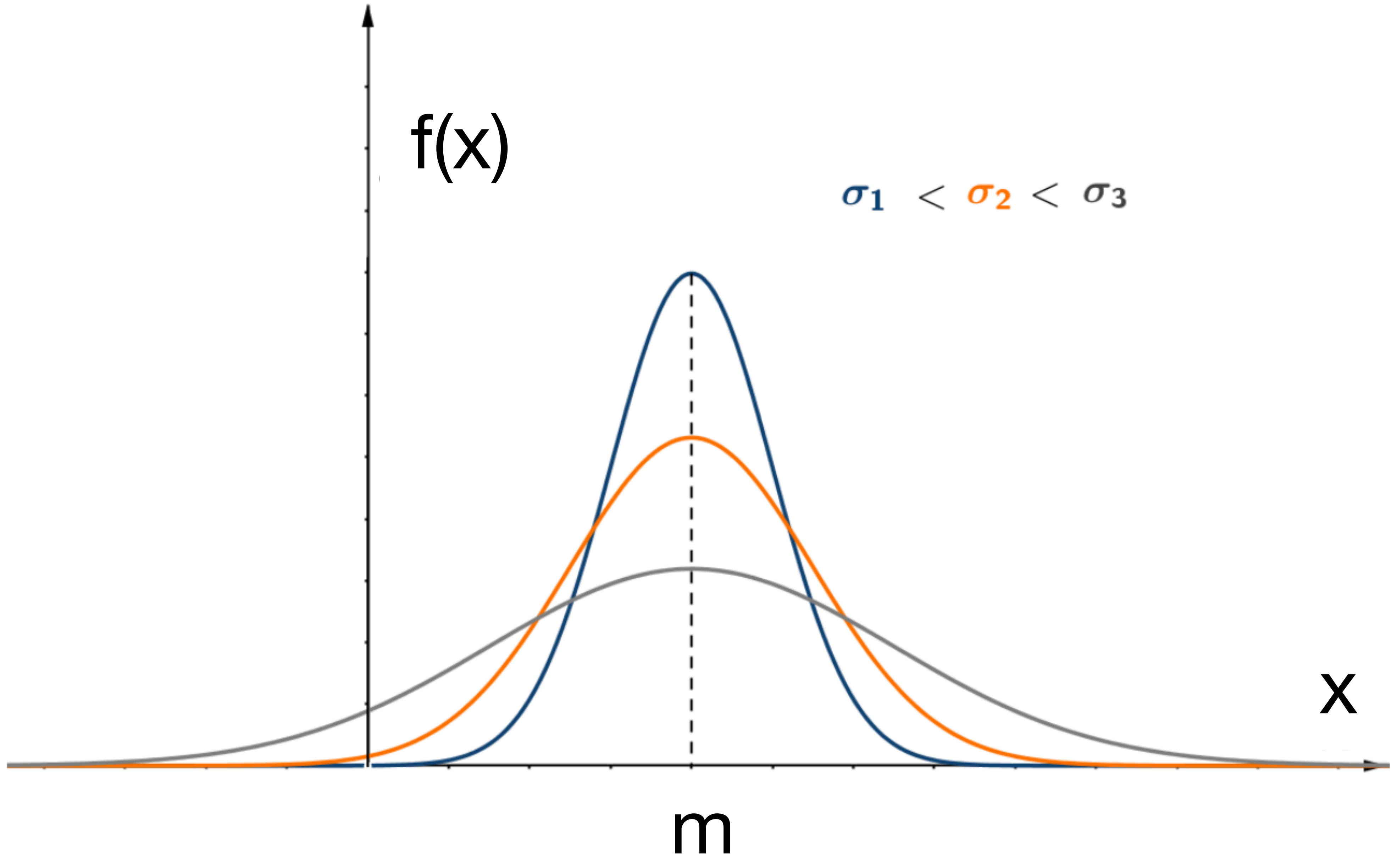
Gaussiana: normalizzazione, media e varianza

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = f_{m,\sigma}(x)$$







Deviazione standard come limite di confidenza del 68%

$$P(\text{entro } \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-z^2/2}\, dz$$

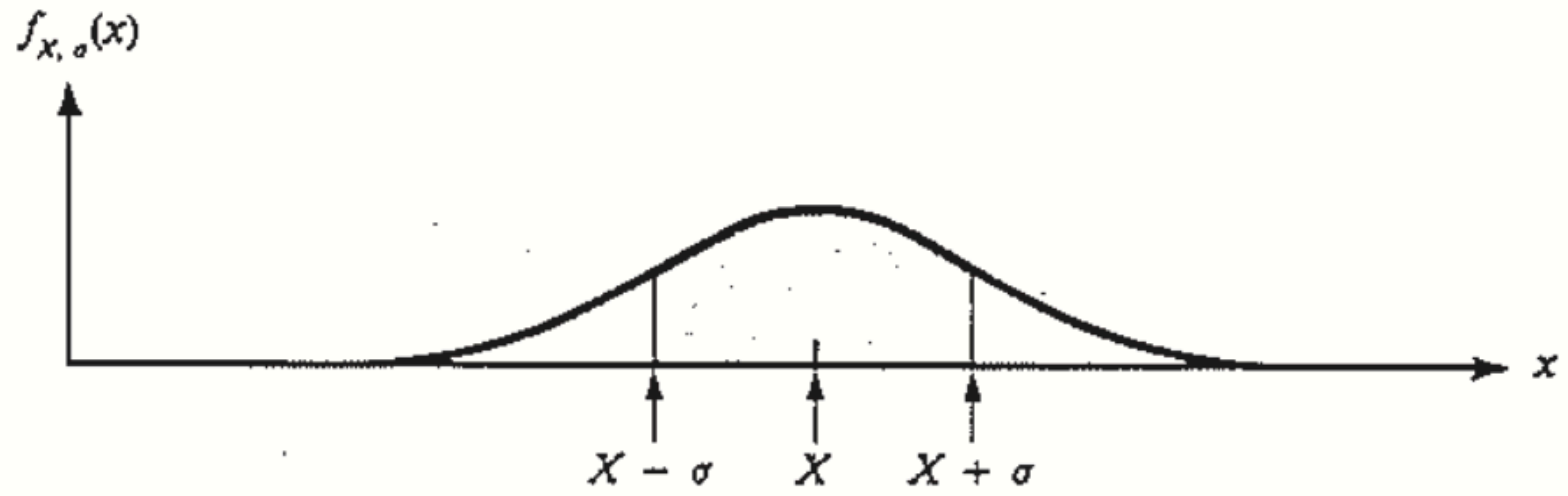


Figura 5.11. *L'area ombreggiata tra* X $\pm$ σ *è la probabilità di una misura entro una deviazione standard di* X.

Deviazione standard come limite di confidenza del 68%

$$P(\text{entro } t\,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-z^2/2}\, dz$$

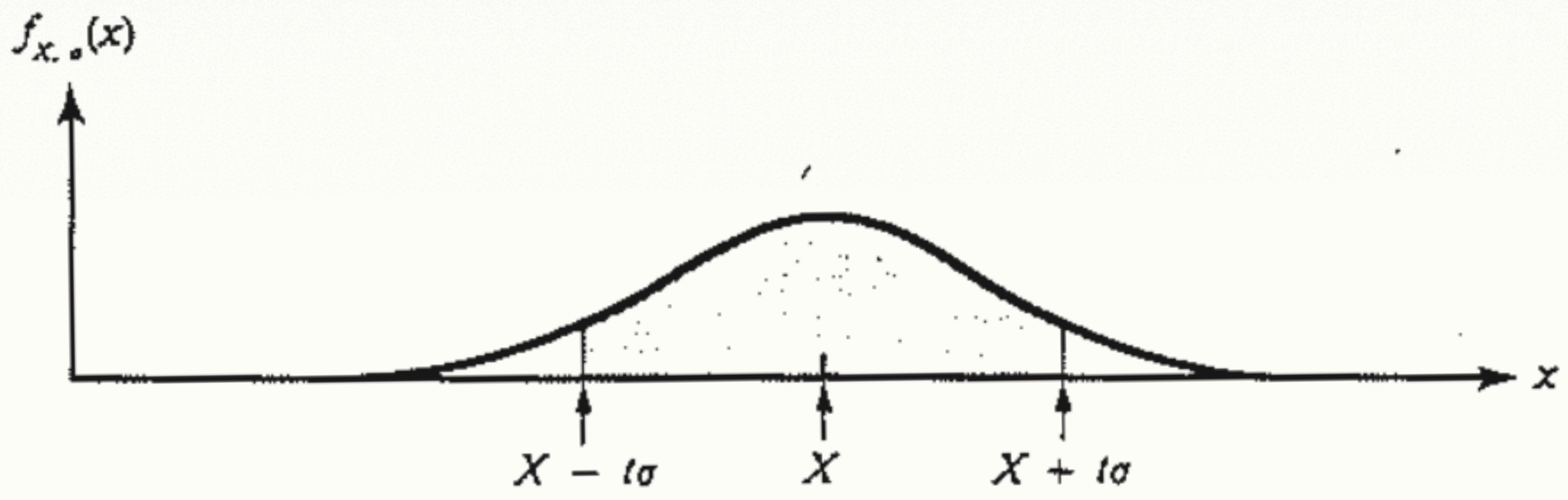
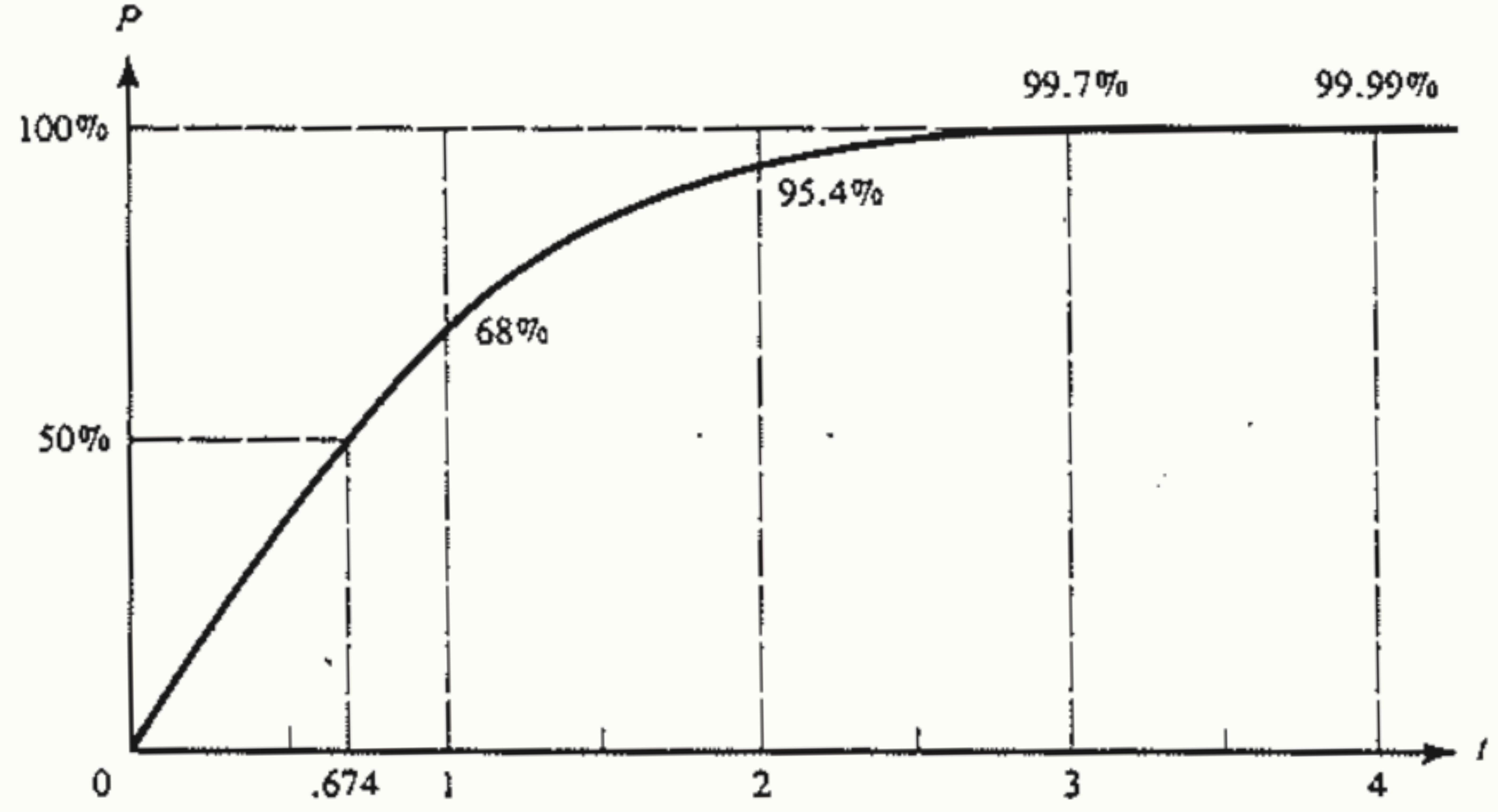


Figura 5.12. *L'area ombreggiata tra* X ± tσ *è la probabilità di una misura entro* t *deviazioni standard di* X.

Livelli di confidenza



t	0	.25	.5	.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
P (%)	0	20	38	55	68	79	87	92	95.4	98.8	99.7	99.95	99.99

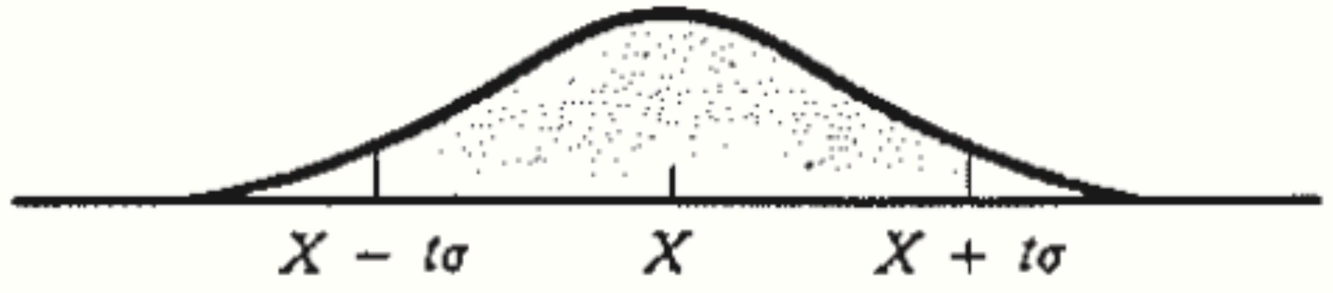
Figura 5.13. *La probabilità* P*(entro* tσ*) che una misura di* x *cada entro* t *deviazioni standard del valore vero* x = X*. Due nomi comuni per questa funzione sono l'"integrale normale degli errori" e la "funzione degli errori"*, erf*(*t*)*.

Livelli di confidenza e funzione degli errori

APPENDICE A

Integrale Normale degli Errori, I

Tabella A. La probabilità percentuale, $P(\text{entro } t\sigma) = \int_{X - t\sigma}^{X + t\sigma} f_{X,\sigma}(x)dx$, come una funzione di t.



$$P(\text{entro } t\sigma) = P(X - t\sigma \leqslant x \leqslant X + t\sigma)$$
$$= \int_{X - t\sigma}^{X + t\sigma} f_{X,\sigma}(x)\, dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-z^2/2}\, dz.$$

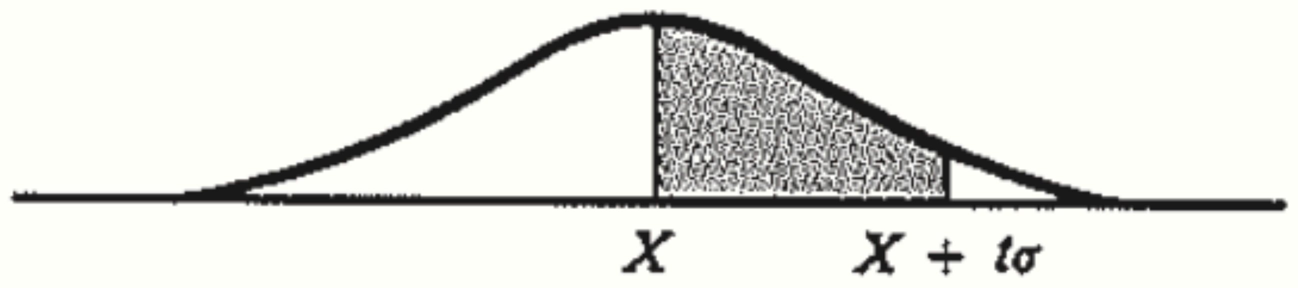
t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.80	1.60	2.39	3.19	3.99	4.78	5.58	6.38	7.17
0.1	7.97	8.76	9.55	10.34	11.13	11.92	12.71	13.50	14.28	15.07
0.2	15.85	16.63	17.41	18.19	18.97	19.74	20.51	21.28	22.05	22.82
0.3	23.58	24.34	25.10	25.86	26.61	27.37	28.12	28.86	29.61	30.35
0.4	31.08	31.82	32.55	33.28	34.01	34.73	35.45	36.16	36.88	37.59
0.5	38.29	38.99	39.69	40.39	41.08	41.77	42.45	43.13	43.81	44.48
0.6	45.15	45.81	46.47	47.13	47.78	48.43	49.07	49.71	50.35	50.98
0.7	51.61	52.23	52.85	53.46	54.07	54.67	55.27	55.87	56.46	57.05
0.8	57.63	58.21	58.78	59.35	59.91	60.47	61.02	61.57	62.11	62.65
0.9	63.19	63.72	64.24	64.76	65.28	65.79	66.29	66.80	67.29	67.78
1.0	68.27	68.75	69.23	69.70	70.17	70.63	71.09	71.54	71.99	72.43
1.1	72.87	73.30	73.73	74.15	74.57	74.99	75.40	75.80	76.20	76.60
1.2	76.99	77.37	77.75	78.13	78.50	78.87	79.23	79.59	79.95	80.29
1.3	80.64	80.98	81.32	81.65	81.98	82.30	82.62	82.93	83.24	83.55
1.4	83.85	84.15	84.44	84.73	85.01	85.29	85.57	85.84	86.11	86.38
1.5	86.64	86.90	87.15	87.40	87.64	87.89	88.12	88.36	88.59	88.82
1.6	89.04	89.26	89.48	89.69	89.90	90.11	90.31	90.51	90.70	90.90
1.7	91.09	91.27	91.46	91.64	91.81	91.99	92.16	92.33	92.49	92.65
1.8	92.81	92.97	93.12	93.28	93.42	93.57	93.71	93.85	93.99	94.12
1.9	94.26	94.39	94.51	94.64	94.76	94.88	95.00	95.12	95.23	95.34
2.0	95.45	95.56	95.66	95.76	95.86	95.96	96.06	96.15	96.25	96.34
2.1	96.43	96.51	96.60	96.68	96.76	96.84	96.92	97.00	97.07	97.15
2.2	97.22	97.29	97.36	97.43	97.49	97.56	97.62	97.68	97.74	97.80
2.3	97.86	97.91	97.97	98.02	98.07	98.12	98.17	98.22	98.27	98.32
2.4	98.36	98.40	98.45	98.49	98.53	98.57	98.61	98.65	98.69	98.72
2.5	98.76	98.79	98.83	98.86	98.89	98.92	98.95	98.98	99.01	99.04
2.6	99.07	99.09	99.12	99.15	99.17	99.20	99.22	99.24	99.26	99.29
2.7	99.31	99.33	99.35	99.37	99.39	99.40	99.42	99.44	99.46	99.47
2.8	99.49	99.50	99.52	99.53	99.55	99.56	99.58	99.59	99.60	99.61
2.9	99.63	99.64	99.65	99.66	99.67	99.68	99.69	99.70	99.71	99.72
3.0	99.73	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3.5	99.95	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.0	99.994	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.5	99.9993	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5.0	99.99994	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Livelli di confidenza e funzione degli errori

APPENDICE B

Integrale Normale degli Errori, II

Tabella B. La probabilità percentuale, $Q(t)=\int_X^{X+t\sigma} f_{X,\sigma}(x)dx$, come una funzione di t.



$$Q(t) = \int_X^{X+t\sigma} f_{X,\sigma}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-z^2/2}\,dz.$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.40	0.80	1.20	1.60	1.99	2.39	2.79	3.19	3.59
0.1	3.98	4.38	4.78	5.17	5.57	5.96	6.36	6.75	7.14	7.53
0.2	7.93	8.32	8.71	9.10	9.48	9.87	10.26	10.64	11.03	11.41
0.3	11.79	12.17	12.55	12.93	13.31	13.68	14.06	14.43	14.80	15.17
0.4	15.54	15.91	16.28	16.64	17.00	17.36	17.72	18.08	18.44	18.79
0.5	19.15	19.50	19.85	20.19	20.54	20.88	21.23	21.57	21.90	22.24
0.6	22.57	22.91	23.24	23.57	23.89	24.22	24.54	24.86	25.17	25.49
0.7	25.80	26.11	26.42	26.73	27.04	27.34	27.64	27.94	28.23	28.52
0.8	28.81	29.10	29.39	29.67	29.95	30.23	30.51	30.78	31.06	31.33
0.9	31.59	31.86	32.12	32.38	32.64	32.89	33.15	33.40	33.65	33.89
1.0	34.13	34.38	34.61	34.85	35.08	35.31	35.54	35.77	35.99	36.21
1.1	36.43	36.65	36.86	37.08	37.29	37.49	37.70	37.90	38.10	38.30
1.2	38.49	38.69	38.88	39.07	39.25	39.44	39.62	39.80	39.97	40.15
1.3	40.32	40.49	40.66	40.82	40.99	41.15	41.31	41.47	41.62	41.77
1.4	41.92	42.07	42.22	42.36	42.51	42.65	42.79	42.92	43.06	43.19
1.5	43.32	43.45	43.57	43.70	43.82	43.94	44.06	44.18	44.29	44.41
1.6	44.52	44.63	44.74	44.84	44.95	45.05	45.15	45.25	45.35	45.45
1.7	45.54	45.64	45.73	45.82	45.91	45.99	46.08	46.16	46.25	46.33
1.8	46.41	46.49	46.56	46.64	46.71	46.78	46.86	46.93	46.99	47.06
1.9	47.13	47.19	47.26	47.32	47.38	47.44	47.50	47.56	47.61	47.67
2.0	47.72	47.78	47.83	47.88	47.93	47.98	48.03	48.08	48.12	48.17
2.1	48.21	48.26	48.30	48.34	48.38	48.42	48.46	48.50	48.54	48.57
2.2	48.61	48.64	48.68	48.71	48.75	48.78	48.81	48.84	48.87	48.90
2.3	48.93	48.96	48.98	49.01	49.04	49.06	49.09	49.11	49.13	49.16
2.4	49.18	49.20	49.22	49.25	49.27	49.29	49.31	49.32	49.34	49.36
2.5	49.38	49.40	49.41	49.43	49.45	49.46	49.48	49.49	49.51	49.52
2.6	49.53	49.55	49.56	49.57	49.59	49.60	49.61	49.62	49.63	49.64
2.7	49.65	49.66	49.67	49.68	49.69	49.70	49.71	49.72	49.73	49.74
2.8	49.74	49.75	49.76	49.77	49.77	49.78	49.79	49.79	49.80	49.81
2.9	49.81	49.82	49.82	49.83	49.84	49.84	49.85	49.85	49.86	49.86
3.0	49.87	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3.5	49.98	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.0	49.997	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.5	49.9997	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5.0	49.99997	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Distribuzione normale ed intervalli di probabilità