Geometria 3 - Curve e superfici 2025/2026
Esercizi - foglio 8

Prof. Valentina Beorchia

17 maggio 2026

1. Si consideri la seguente curva:

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (t-1, t^3, t).$$

   (a) Usando le formule per parametrizzazioni non in lughezza d'arco, ove possibile si calcolino il triedro di Frenet, la curvatura e la torsione della curva.

   (b) Si dica se la curva è biregolare.

   (c) Si dica se la curva è piana e in caso affermativo si calcoli il piano in cui è contenuta.

2. Si consideri la mappa

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, uv, \frac{u-v}{2}\right).$$

   (a) Si verifichi che $\varphi(\mathbb{R}^2)$ è una superficie regolare;

   (b) si calcolino i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale;

   (c) si calcolino curvatura gaussiana e curvatura media nel generico punto della superficie;

   (d) si dica se la superficie è rigata; in caso affermativo, si determini una direttrice;

   (e) si dica, motivando la risposta, se φ è una isometria.

3. Si consideri la superficie regolare $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$ dove $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è definita da

$$\varphi(u,v) = (2u+2v,\ u-v,\ 4uv).$$

(a) Si dimostri che S può essere rigata in due modi;

(b) Si calcoli la curvatura gaussiana di S, si classifichino i suoi punti e si dica se S è una superficie minima;

(c) Si verifichi se la mappa di Gauss associata a φ è suriettiva.

4. Si consideri una curva regolare parametrizzata per lunghezza d'arco

$$\alpha(v) = (0, \alpha_1(v), \alpha_2(v))$$

con $\alpha_1(v) > 0$ per ogni v. Sia S la superficie regolare ottenuta ruotando α attorno all'asse z e parametrizzata con

$$\varphi(u, v) = (\alpha_1(v) \cos u,\ \alpha_1(v) \sin u,\ \alpha_2(v)).$$

(a) Si dimostri che l'equazione delle geodetiche di S è la seguente:

$$\begin{cases} u'' + 2\dfrac{\alpha_1'(v)}{\alpha_1(v)}\, u'v' = 0 \\ v'' - \alpha_1(v)\, \alpha_1'(v)\, (u')^2 = 0 \end{cases}$$

(b) Si fissi u_0 e si verifichi che la curva $v \mapsto \varphi(u_0, v)$ è una geodetica, qualunque sia u_0.

(c) Si fissi v_0 e si dica quando la curva $u \mapsto \varphi(u, v_0)$ è una geodetica.

5. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ con

$$\alpha(u) = (\alpha_1(u),\ \alpha_2(u),\ -\alpha_1(u))$$

una curva parametrizzata per lunghezza d'arco.

Si definisca l'applicazione

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

con

$$\varphi(u, v) = (\alpha_1(u) + v,\ \alpha_2(u),\ -\alpha_1(u) + v).$$

Supponendo che $S = \varphi(I \times \mathbb{R})$ sia una superficie regolare e φ una parametrizzazione locale di S:

(a) Si calcolino i coefficienti della I e II forma fondamentale rispetto a φ, verificando in particolare che F ed f sono costantemente nulli;

(b) Si sfrutti il fatto che $F \equiv 0$ ed $f \equiv 0$ per verificare che nei punti non ombelicali $\partial_u\varphi$ e $\partial_v\varphi$ individuano le direzioni principali;

(c) Si calcolino le curvature normali delle curve coordinate $u \mapsto \varphi(u, v_0)$ e $v \mapsto \varphi(u_0, v)$;

(d) Si calcolino le curvature principali in ogni punto.

6. Sia S una superficie regolare.

   (a) Si dimostri che se per un punto di S passano 3 rette contenute in S, allora il punto è planare.

   (b) Sia
   $$\alpha : I \to S$$
   una curva parametrizzata per lunghezza d'arco; si supponga che la curva sia una geodetica di S e sia asintotica, cioè che la curvatura normale di S lungo α sia nulla in ogni punto della curva.

   Si dimostri che l'immagine $\alpha(I)$ è contenuta in una retta.