

Approfondimenti

Rinaldo Rui

ultima revisione:

14 gennaio 2025

5 Oscillazioni e Onde

5.2 Lezione #22

5.2.1 Equazione Differenziale delle Onde

In tutti i casi analizzati precedentemente si osserva che le onde obbediscono alla stessa **Equazione Differenziale delle Onde**, che nel caso **unidimensionale** vale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

equazione differenziale alle derivate parziali, lineare, del II ordine. La grandezza v è una costante che ha le dimensioni di una velocità. Le soluzioni dell'equazione delle onde hanno la forma $f(x \pm vt)$. Noi ci limiteremo a dimostrare che $f(x \pm vt)$ è una soluzione. Ponendo $s = x \pm vt$, la funzione $f = f(s)$ e possiamo scrivere

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) = \pm v \frac{\partial f}{\partial s}$$

da cui

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\pm v \frac{\partial f}{\partial s} \right) = \pm v \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial s}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

Si può anche dimostrare che tutte le soluzioni sono del tipo $f(x, t) = f(x \pm vt)$.

Nel caso **tridimensionale** l'equazione generale delle onde coinvolge le tre direzioni nello spazio e la sua soluzione è del tipo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} .$$

L'equazione qui sopra viene scritta in modo più compatto utilizzando l'operatore ∇^2 (nabla quadro), un operatore differenziale (detto "Laplaciano")

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} ,$$

che permette di scrivere l'equazione generale delle onde come

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} .$$

Le onde **piane** e **sferiche** sono particolari tipi di onde tridimensionali. Le prime sono onde la cui soluzione è del tipo $f(\vec{r} \cdot \vec{u}_n \pm vt)$ in cui il versore \vec{u}_n è perpendicolare alla *superficie d'onda*. Le seconde, nel caso uniforme, sono onde che dipendono solo dalla distanza dalla sorgente e dal tempo, e la cui soluzione è un'onda del tipo

$$f(r, t) = \frac{\phi(r \pm vt)}{r}$$

in cui $\phi(r \pm vt)$ è soluzione dell'equazione d'onda unidimensionale

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} ,$$

Nel seguito degli appunti noi ci limiteremo a studiare il caso dell'onda unidimensionale.

Cerchiamo di capire il significato fisico di $f(x, t) = f(x - vt)$. Consideriamo dapprima la funzione $f(x, t)$, al tempo $t = 0$, che rappresenta la forma della perturbazione all'istante iniziale. Consideriamo un valore X tale che $X = x - vt_1$ per cui $f(X)$ rappresenta la forma della perturbazione all'istante $t = t_1$. Se ora facciamo un passaggio di coordinate da x a X , la funzione $f(X)$ ha esattamente la stessa forma della funzione $f(x, t_1)$ ovvero la funzione $f(x, t)$ dopo un tempo t_1 . $f(x - vt)$ rappresenta quindi un'onda che si propaga lungo il verso positivo di x con velocità v , **senza subire deformazioni**. E' come una traslazione rigida [fig. 1]. Analogamente, $f(x + vt)$ rappresenta un'onda che si propaga lungo il verso negativo di x .

Quindi, l'Equazione Differenziale delle Onde ha in se un parametro v che rappresenta proprio la velocità di propagazione dell'onda nella direzione x (nel caso unidimensionale).

5.2.2 Oscillazioni Armoniche (monocromatiche)

Generiamo ora una perturbazione nel punto $x = 0$ che sia un'oscillazione armonica con pulsazione costante ω . In $x = 0$, la soluzione generale

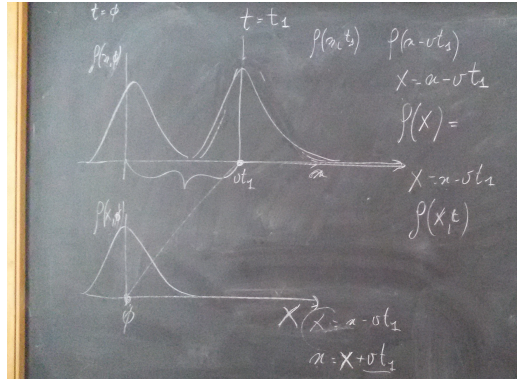


Figura 1: Rappresentazione grafica dello spostamento di un'onda

dell'equazione delle onde $f(x, t) = f(x \pm vt) = f(\pm vt)$ deve ricondursi all'equazione del moto armonico $f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$. La funzione $f(x, t)$ può essere scritta in due modi:

$$f(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t + \pi/2 + \phi) ; f(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

con k una grandezza la cui dimensione è l'inverso di una lunghezza ed ω è la pulsazione. Parliamo in questo caso di un'onda **monocromatica** di **ampiezza** A , **fase** $(kx \pm \omega t + \pi/2) + \phi$ (detta anche *fase istantanea*), e le due funzioni sono identiche. Scegliamo per semplicità la seconda delle equazioni e poniamo $\phi = 0$. Derivando:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f(x, t) ; \frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 f(x, t)$$

e quindi

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 f}{dt^2} \text{ con } v = \frac{\omega}{k} .$$

v è la **velocità di fase** mentre k prende il nome di **numero d'onda**.

Definiamo $\lambda = 2\pi/k$ e $T = 2\pi/\omega$, avremo

$$f(x, t) = A \sin(2\pi(x/\lambda \pm t/T)) .$$

Fissato t , $f(x, t)$ ha lo stesso valore per ogni variazione $\Delta x = \pm n\lambda$; fissato x , $f(x, t)$ ha lo stesso valore per ogni variazione $\Delta t = \pm nT$. Quindi λ e T sono rispettivamente il periodo **spaziale** e **temporale** dell'onda. λ prende il nome di **lunghezza d'onda** e T quello di **periodo**. Siccome $v = \omega/k$, $v = (2\pi/T)/(2\pi/\lambda) = \lambda/T = \lambda\nu$, dove $\nu = \omega/2\pi$ è la frequenza.

Bisogna fare molta attenzione in questo punto. La frequenza con cui si propaga l'onda ν dipende dalla sorgente ($\nu = \omega/2\pi$), mentre v dipende dal mezzo. Pertanto k è funzione sia del mezzo in cui si propaga l'onda che della perturbazione. Matematicamente, siccome abbiamo dimostrato che $f(x - vt)$ rappresenta una traslazione rigida dell'onda verso l'asse positivo delle x , la frequenza a $x = 0$ è la stessa in x_0 dopo il corrispondente tempo $t_0 = x_0/v$. Pertanto questo significa che variano contemporaneamente sia la velocità v che la lunghezza d'onda λ . Se l'onda si propaga da un mezzo ad un altro,

l'onda non cambia la propria frequenza, ma solo la sua velocità. Il suono si propaga in arie e nell'acqua con la stessa frequenza, ma il suono in acqua è molto più veloce (come già visto).

5.2.3 Intensità di un'onda (su una corda)

Una corda oscillante possiede una certa energia, quella che è necessaria al punto $x = 0$ per dar luogo al movimento, che si propaga lungo la corda trasportando quindi l'energia via dal punto in cui viene scaricata. Si definisce **intensità** dell'onda l'energia che attraversa una sezione della corda nell'unità di tempo e di superficie. Si misura in Watt/m² (e quindi ha la stessa dimensione di una *potenza per unità di superficie*). Immaginiamo un'onda generata da un'oscillazione armonica trasversale che si propaga nella direzione positiva delle x , la sua equazione è $y = y_0 \cos(kx - \omega t)$. Consideriamo un elemento di corda di lunghezza infinitesima dx , di massa infinitesima dm , nel punto $x = 0$ in cui viene esercitata la perturbazione che fa oscillare la corda verticalmente lungo l'asse y . L'energia del tratto oscillante sarà cinetica e potenziale. Quando l'energia cinetica è massima, l'energia potenziale è minima, cioè nulla (in quanto possiamo sempre scegliere l'energia potenziale a meno di una costante). L'energia totale quindi è uguale all'energia cinetica massima, che corrisponde alla velocità massima della perturbazione lungo y (nel caso della corda, si trascura l'energia potenziale dovuta alla forza peso, e si considera solo l'energia potenziale dovuta alla forza di richiamo della corda che aumenta all'aumentare di $|y|$). Il punto dove la corda viene perturbata corrisponde a $x = 0$ e pertanto

$$y = y_0 \cos(kx - \omega t) = y_0 \cos(-\omega t)$$

da cui, derivando, si trova la velocità lungo y

$$v_y = \partial y / \partial t = y_0 \omega \sin(-\omega t)$$

per cui $v_{y_{max}} = y_0 \omega$. L'energia cinetica massima della quantità di massa dm nel tratto dx è

$$dE = \frac{1}{2} dm v_{y_{max}}^2 = \frac{1}{2} \mu dx v_{y_{max}}^2 = \frac{1}{2} \mu y_0^2 \omega^2 dx$$

con μ **densità lineare**. Per cui alla fine:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \mu y_0^2 \omega^2 \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \mu y_0^2 \omega^2 v$$

dove v rappresenta la velocità dell'onda nella direzione x della corda, che sappiamo essere funzione del mezzo (in questo caso $v = \sqrt{T/\mu}$). Sappiamo che la densità di energia media (ovvero l'energia per unità di volume) dell'oscillatore armonico è nel nostro caso

$$\mathcal{E} = 1/2 \rho \omega^2 y_0^2$$

per cui essendo $\mu = S\rho$ (con S sezione della corda), si ottiene la potenza P :

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\rho S y_0^2 \omega^2 v_x = \mathcal{E} S v .$$

Assumendo la superficie perpendicolare al vettore velocità, si ricava il flusso di energia, ovvero l'energia trasmessa per unità di tempo e di superficie:

$$I = \frac{d^2 E}{dt d\mathbf{s}} = \frac{1}{S} \frac{dE}{dt} = \mathcal{E} v$$

e prende il nome di **Intensità** dell'onda e, come già detto, si misura in Watt/m².

Nel caso appena visto, l'ampiezza dell'oscillazione y_0 rappresenta anche l'ampiezza dell'onda che si propaga lungo l'asse x , cioè lungo la corda. Se l'oscillatore armonico che genera la perturbazione ha una densità di energia \mathcal{E}_0 all'origine ($x = 0$) e la perturbazione si espande isotropicamente nello spazio tridimensionale, abbiamo visto che l'ampiezza varia inversamente con la distanza r e pertanto

$$y(r) = y_0/r$$

e quindi anche la densità d'energia diminuisce quadraticamente con la distanza r . Essendo $S = 4\pi r^2$ la superficie della sfera, si ottiene

$$\mathcal{E} S = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r^2} \right) (4\pi r^2) = \text{cost}$$

com'è giusto che sia visto che la potenza dell'oscillatore armonico nella sorgente non cambia. In questo caso l'intensità I (per unità di superficie) dell'onda diminuisce quadraticamente con r . Nel caso tridimensionale conviene pertanto utilizzare la nozione di **flusso di Energia** (Energia per unità di tempo e di angolo solido) ovvero al posto della superficie si considera l'angolo solido sotteso $d\Omega = dS/r^2$ [fig. 2]; con quest'ultima notazione si osserva che il flusso risulta indipendente dalla distanza dalla sorgente

$$\Phi(\Omega) = \frac{d^2 E}{dt d\Omega} = \frac{d^2 E}{dt dS} \frac{dS}{d\Omega} = (\mathcal{E} v) (r^2) = \mathcal{E}_0 v = \text{costante}$$

Angolo solido $\Omega = \frac{S}{R^2}$; $d\Omega = \frac{dS}{R^2}$

Non dipende dal raggio

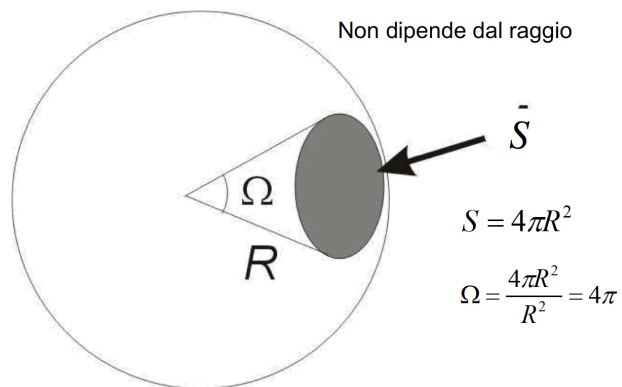


Figura 2: Rappresentazione grafica dell'angolo solido Ω