

# Geometria 2 2025/26

## Foglio di esercizi 9

Prof. Valentina Beorchia

19 maggio 2026

1. (a) Due coniche affini  $C$  e  $C'$  di  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$  si dicono tangenti in un punto  $P \in \mathbb{A}^2$  se  $P \in C \cap C'$ ,  $P$  è non singolare per entrambe, e in tale punto le rette tangenti  $T_PC$  e  $T_PC'$  coincidono:  $T_PC = T_PC'$ .

Si caratterizzino tutte le coniche tangenti alla conica  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$  nel punto  $P = (2, 0)$ .

- (b) Due coniche affini  $C$  e  $C'$  di  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$  si dicono bitangenti nei punti  $P, Q \in \mathbb{A}^2$  se  $\{P, Q\} \subseteq C \cap C'$ ,  $P$  e  $Q$  sono non singolari per entrambe, e in tali punti le rette tangenti coincidono:

$$T_PC = T_PC', \quad T_QC = T_QC'.$$

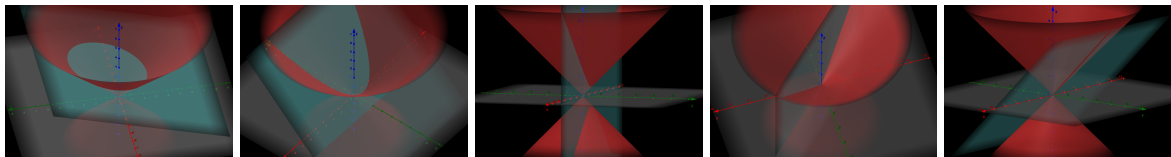
Si caratterizzino tutte le coniche bitangenti alla conica  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$  nei punti

$$P = (2, 0), \quad Q = (-2, 0).$$

2. Si verifichi che ogni conica affine piana reale può essere ottenuta come intersezione del cono circolare  $Z \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  a due falde di

$$x^2 + y^2 = z^2$$

e di un opportuno piano affine.



3. Si dimostri che le chiusure proiettive della parabola affine  $x^2 - y = 0$  e dell'iperbole affine  $xy - 1 = 0$  sono proiettivamente equivalenti.

4. Siano

$$(a_0 : a_1 : a_2), (b_0 : b_1 : b_2), (c_0 : c_1 : c_2), (d_0 : d_1 : d_2), (e_0 : e_1 : e_2), (f_0 : f_1 : f_2)$$

cinque punti di  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ . Si dimostri che esiste una unica conica proiettiva passante per i cinque punti se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0^2 & a_0a_1 & a_0a_2 & a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 \\ b_0^2 & b_0b_1 & b_0b_2 & b_1^2 & b_1b_2 & b_2^2 \\ c_0^2 & c_0c_1 & c_0c_2 & c_1^2 & c_1c_2 & c_2^2 \\ d_0^2 & d_0d_1 & d_0d_2 & d_1^2 & d_1d_2 & d_2^2 \\ e_0^2 & e_0e_1 & e_0e_2 & e_1^2 & e_1e_2 & e_2^2 \\ f_0^2 & f_0f_1 & f_0f_2 & f_1^2 & f_1f_2 & f_2^2 \end{pmatrix}$$

ha rango massimo, e che in questo caso tale conica ha equazione

$$\det \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ a_0^2 & a_0a_1 & a_0a_2 & a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 \\ b_0^2 & b_0b_1 & b_0b_2 & b_1^2 & b_1b_2 & b_2^2 \\ c_0^2 & c_0c_1 & c_0c_2 & c_1^2 & c_1c_2 & c_2^2 \\ d_0^2 & d_0d_1 & d_0d_2 & d_1^2 & d_1d_2 & d_2^2 \\ e_0^2 & e_0e_1 & e_0e_2 & e_1^2 & e_1e_2 & e_2^2 \\ f_0^2 & f_0f_1 & f_0f_2 & f_1^2 & f_1f_2 & f_2^2 \end{pmatrix} = 0.$$

5. Si verifichi che per i punti

$$(1 : 0 : 0), (1 : 0 : 1), (1 : 1 : 0), (0 : 0 : 1), (0 : 1 : 0)$$

passa un'unica conica, e si determini un'equazione di tale conica.

6. Si verifichi che per i punti

$$(1 : 0 : 0), (1 : 0 : 1), (0 : 0 : 1), (-1 : 0 : 1), (0 : 1 : 0)$$

passa più di una conica, e si determini un'equazione della generica conica passante per tali punti.