Lezione 11 maggio 2026

lunedì 11 maggio 2026 11:12

Coniche piane euclidee:

Visto: Con affinità: $Q = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{P} & c_1 \\ & & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$B' = {}^tQ^{-1} \cdot B \cdot Q^{-1}$$

- $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} B'$: il rango di B è una proprietà affine (cioè è invariante per affinità)
- $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$ $\left(A' = {}^tP^{-1} A P^{-1}\right)$ è proprietà affine
- Se invece P è anche ORTOGONALE $\left(P^{-1} = {}^tP\right)$, abbiamo anche:
  - $\det B > 0 \iff \det B' > 0$
    $< 0 \iff < 0$

e $\det A > 0 \iff \det A' > 0$
$< 0 \iff < 0$

i segni di det sono proprietà isometriche.

* * *

Mettendo insieme le cose viste:

TEO. DI CLASS. DI CONICHE EUCLIDEE:

Ogni conica di $E^2_{\mathbb{R}}$ è isometrica a una delle seguenti:

① $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0}$ ellisse

A

$$\begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \det B \overset{<0}{\neq} 0, \quad \det A > 0$$

② $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ ellisse a punti non reali

$$\begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det B > 0, \quad \det A > 0$$

③ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ ellisse degenere (1 punto reale: $(0,0)$)

$$\begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det B = 0, \quad \det A > 0 \quad (\operatorname{rg} B = 2)$$

④ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ iperbole

$$\begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \det B > 0, \quad \det A < 0$$

⑤ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ iperbole degenere (2 rette incidenti)

$\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det B = 0, \quad \det A < 0$$

⑥ $y^2 - 2px = 0$ parabola

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det B = -p^2 < 0, \quad \det A = 0$$

⑦ $a \neq 0$ $\left.\begin{array}{l} y^2 - a^2 = 0 \longrightarrow (y-a)(y+a) \text{ (2 rette parallele)} \\ y^2 + a^2 = 0 \longrightarrow \text{non ha punti reali} \end{array}\right\}$ parabole degeneri

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm a^2 \end{pmatrix} \quad \det B = 0, \quad \det A = 0, \quad \operatorname{rg} B = 2$$

⑧ $y^2 = 0$ conica doppiam. degenere (retta doppia)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \operatorname{rg} B = 1, \quad \operatorname{rg} A = 1$$

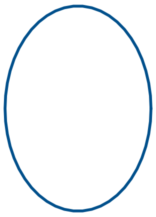
Inoltre, le coniche di questo elenco non sono tra loro isometriche.

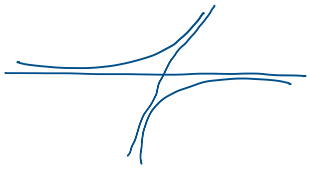
Dim. Segue dalla discussione già fatta.
L'ultimo punto si può verificare scrivendo le matrici associate e confrontando ranghi e determinanti; ovvero il corrispondente luogo degli zeri in $E^2_{\mathbb{R}}$.

* * *

Idea: se posso usare affinità che non sono isometrie, l'elenco delle classi di coniche affini per la relazione di essere affinemente equivalenti si

ACCORCIA.





Def.: Una CONICA in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ o in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ (oppure in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ con $\mathbb{K}$ qualunque)

$P=(x,y)$

è il luogo degli zeri di una eq. polinomiale di 2° grado del tipo:

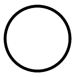
$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

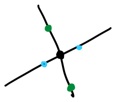
$$\in \mathbb{K}[x,y]$$

$\underbrace{\deg}_{\text{DEGREE}} F = 2$, cioè a_{11}, a_{12}, a_{22} NON TUTTI NULLI

TEO.: CLASSIFICAZIONE delle coniche affini in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$:

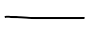
Ogni conica in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ è affin. eq. a una delle seguenti:

① $x^2+y^2-1=0$ CONICA A CENTRO  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

② $x^2+y^2=0$ CONICA A CENTRO
$(x+iy)(x-iy)=0$ DEGENERE  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det B = 0$ $\operatorname{rg} B = 2$

③ $y^2-x=0$ PARABOLA $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

④ $y^2-1=0$ PARABOLA DEGENERE
$(y-1)(y+1)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det B = 0$ $\operatorname{rg} B = 2$

⑤ $y^2=0$ CONICA DOPP. DEGENERE  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det B = 0$ $\operatorname{rg} B = 1$

TEO: Ogni conica affine in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ è affinem. equiv. a uno dei seguenti casi:

① $x^2+y^2-1=0$ ELLISSI AFFINI $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

② $x^2+y^2+1=0$ ELLISSE A PUNTI NON REALI $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

③ $x^2+y^2=0$ ELLISSE DEG. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\det B=0$ $rg\,B=2$

④ $x^2-y^2-1=0$ IPERBOLE $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

⑤ $x^2-y^2=0$ IPERB. DEG. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\det B=0$ $rg\,B=2$

⑥ $y^2-x=0$ PARABOLA $\begin{pmatrix}0&0&-1/2\\0&1&0\\-1/2&0&0\end{pmatrix}$

⑦ $y^2-1=0$, $y^2+1=0$ PARABOLE DEG. $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&\pm1\end{pmatrix}$ $\det B=0$ $rg\,B=2$

⑧ $y^2=0$ conica DOPP. DEG. $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\det B=0$ $rg\,B=1$

Dim. dei 2 Teor. insieme:

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$: Procedo come nel caso euclideo: ① elimino $2a_{12}xy$ con una opp. rotazione

② Elimino termini di primo grado con completamento dei quadrati

③ normalizzo i coefficienti:

ad es. $a_{11}\cdot a_{22}\neq 0$, trovo $a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+c_{00}=0$

$c_{00}\neq 0$: $\frac{a_{11}}{-c_{00}}x'^2+\frac{a_{22}}{-c_{00}}y'^2-1=0$, $\begin{cases}\tilde{x}=\frac{x'}{\sqrt{-\frac{c_{00}}{a_{11}}}}\\ \tilde{y}=\frac{y'}{\sqrt{-\frac{c_{00}}{a_{22}}}}\end{cases}$ $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2-1=0$

$c_{00}=0$: $\begin{cases}\tilde{x}=\frac{x'}{\sqrt{a_{11}}}\\ \tilde{y}=\frac{y'}{\sqrt{a_{22}}}\end{cases}$: $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=0$

Trovo così ① e ②

Se $a_{11}=0$, $a_{22}\neq 0$, a un certo punto

$a_{22}y'^2+2a_{13}x'+d_{00}=0$

$d_{00}\neq 0$, $a_{13}\neq 0$ $:(-d_{00})$ $\begin{cases}\tilde{x}=\frac{x'}{-2a_{13}d_{00}}\\ \tilde{y}=\frac{y'}{\sqrt{a_{22}}}\end{cases}$

$d_{00}\neq 0$, $a_{13}=0$ $a_{22}y'^2+d_{00}=0\,/:(-d_{00})$

$$\frac{a_{22}}{-d_{00}}y'^2-1=0 \qquad \begin{cases}\tilde{x}=x' \\ \tilde{y}=\dfrac{y'}{\sqrt{-\frac{d_{00}}{a_{22}}}}\end{cases}$$

$d_{00}=0$

$a_{13}\neq 0$

$$a_{22}y'^2+2a_{13}x'=0$$

$$\begin{cases}\tilde{x}=\dfrac{x'}{-2a_{13}} \\ \tilde{y}=\dfrac{y'}{\sqrt{a_{22}}}\end{cases} \qquad : \tilde{y}^2-\tilde{x}=0$$

$d_{00}=0$

$a_{13}=0$

$$: \quad a_{22}y'^2=0 \qquad \begin{cases}\tilde{x}=x' \\ \tilde{y}=\dfrac{y'}{\sqrt{a_{22}}}\end{cases}$$

$$\tilde{y}^2=0$$

Dim. nel caso reale: devo fare delle sostituzioni simili, ma tenere conto del segno dei vari coeff. (non bastano i 2 casi $\neq 0$ e $=0$)

Esempio: $a_{11}\cdot a_{22}\neq 0$

$$\begin{cases}\tilde{x}=\dfrac{x'}{\sqrt{|a_{11}|}} \\ \tilde{y}=\dfrac{y'}{\sqrt{|a_{22}|}}\end{cases} \implies ① \cdots ⑤$$

ecc.

COR. del Teo. di class. in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$:

Una conica è DEGENERE $\iff$ $\det B=0$

Inoltre:

è SEMPLIC. DEG. $\iff$ $\operatorname{rg} B=2$

(= unione 2 rette distinte

è DOPP. DEG. $\iff$ $\operatorname{rg} B=1$

Esempi:

⓪ conica dopp. degenere in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ opp. $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

$$F(x,y)=\left(L(x,y)\right)^2=(ax+by+c)^2$$

$$a^2x^2+2ab\,xy+b^2y^2+2ac\,x+2bc\,y+c^2=0$$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = 1$$

$$= a\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad = b\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \rightarrow c\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

② $F(x,y) = (x+y-1)(x-y+3) = x^2-y^2+2x+4y-3$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \underset{\text{terza colonna}}{B^{(3)}} = B^{(1)} - 2\cdot B^{(-2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}\, B = 2$?

② $F(x,y) = x^2-y^2+3xy-3$

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & -1 & 0 \\ \cline{1-2} 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\det B = -3\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix} = -3\left(-1-\frac{9}{4}\right)$$

$$\overset{!}{=} -3\left(-\frac{13}{4}\right)$$

$$= \frac{39}{4} \neq 0 \qquad \text{è non degenere}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix} \qquad p_A = (1-x)(-1-x) - \frac{9}{4}$$

$$= -(1-x)(1+x) - \frac{9}{4}$$

$$= -(1-x^2) - \frac{9}{4}$$

$$= x^2 - \frac{13}{4}$$