Lezione 7 maggio 2026

giovedì 7 maggio 2026 11:12

Fine programma 13 o 14/5

18/5 esercizi di ricapit e preparazione
esame
↓ ricevimento
25/5 NO lezione
27/5 SIMULAZ. PROVA SCRITTA
11-14
28/5 PROVA SCRITTA (anche senza
Geo 1) Formulario A4 su entrambi i lati
vale 30/9/26
11:30 - 13:30

~ . ~ . ~ . ~

Conica in forma generale $F(x,y)=0$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

① Caso: $a_{12}=0$; $a_{11}=0$ $(a_{22}\neq 0)$

Con il Metodo completamento quadrati

e se $a_{13}\neq 0$, con una opport. traslazione

$$(y')^2 = -2\frac{a_{13}}{a_{22}}x'$$

in part. è una parabola

se $a_{13}=0$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$: $\Delta \geq 0$: 2 rette parallele, eventualmente coincidenti

$(y^2+1=0)$

(1') $a_{11}\neq 0$, $a_{22}=0$ SIMILE

$$(x')^2 = 2py'$$

② $a_{11}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$

oss. $F(x,y)=0$ $/\cdot c$, $c\neq 0$

$$\Updownarrow$$

$$c\cdot F(x,y)=0$$

A meno di moltiplicare per (-1), posso supp.

$a_{11}>0$.

Uso Met. Compl. Quadrati anche per i termini che coinvolgono x:

$$\underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{13}x} + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$a_{11}\underbrace{\left(x^2 + 2\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)} + a_{22}\underbrace{\left(y^2 + 2\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)}_{\parallel} + a_{33} = 0$$

$$= \underbrace{\left[\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}\right]} \qquad \left[\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}^2}\right]$$

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{a_{13}}{a_{11}} \\ y' = y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

Trovo una espressione del tipo:

$$\underbrace{a_{11}}\, x'^2 + \underbrace{a_{22}}\, y'^2 = h \quad /: (h)$$

Tre casi: $h > 0 \implies \underbrace{\frac{a_{11}}{h}}_{>0} \cdot x'^2 + \underbrace{\frac{a_{22}}{h}}\, y'^2 = 1$

$\boxed{h < 0}$

$h = 0$

$$\Downarrow$$

$$a^2 := \underbrace{\boxed{h/a_{11}}}_{>0} \qquad \frac{x'^2}{h/a_{11}} + \frac{y'^2}{h/a_{22}} = 1 \qquad h/a_{22} =: b^2$$

$a_{22} > 0$

ELLISSE

$a_{22} < 0$

$-h/a_{22} =: b^2$

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

IPERBOLE

$h < 0$: $a_{11} x'^2 + a_{22} y'^2 = h \quad /: (-h)$

$$-\frac{a_{11}}{h} x'^2 - \frac{a_{23}}{h} y'^2 = -1$$

$$\frac{a_{11}}{h} x'^2 + \frac{a_{22}}{h} y'^2 = 1$$

pongo: $a^2 := \frac{-h}{a_{11}}$

$$b^2 = \begin{cases} \frac{-h}{a_{22}} & \text{se } a_{22} > 0 \\ \frac{-h}{-a_{22}} = \frac{h}{a_{22}} & a_{22} < 0 \end{cases}$$

$$\left[\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad \text{opp. } \frac{y'^2}{b^2} - \frac{x'^2}{a^2} = 1 \right]$$

$$\underbrace{\frac{a_{11}}{h}}_{<0} x'^2 + \frac{a_{22}}{h} y'^2 = 1$$

<0

$$-\underbrace{\frac{x'^2}{a^2}}_{\le 0} - \underbrace{\frac{y'^2}{b^2}}_{\le 0} = 1$$

NON HA PUNTI REALI

$$\underbrace{\frac{a_{11}}{h}}_{<0} x'^2 + \underbrace{\boxed{\frac{a_{22}}{h}}}_{>0} y'^2 = 1 \qquad \frac{a_{22}}{h} = \frac{1}{b^2}$$

$$a^2 := -\frac{h}{a_{11}}$$

$$-\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \; , \quad \frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

è di nuovo IPERBOLE

Infine $h = 0$: $\underbrace{\boxed{a_{11}}}_{>0} x'^2 + \boxed{a_{22}}\, y'^2 = 0$

$a_{22} < 0$: UNIONE DI 2 RETTE

$$\underbrace{\left(\sqrt{a_{11}}\, x' - \sqrt{-a_{22}}\, y'\right) \cdot \left(\sqrt{a_{11}}\, x' + \sqrt{-a_{22}}\, y'\right)}_{\text{RETTE INCIDENTI}} = 0$$

$a_{22} > 0$: UNICO PUNTO REALE $(0,0)$

* * *

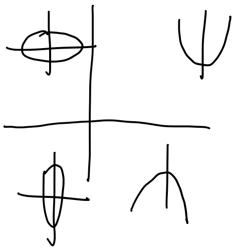
Abbiamo visto tutti i casi in cui $a_{12}=0$.

Supp. $a_{12}\neq 0$

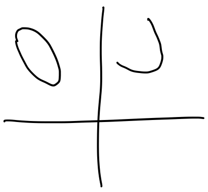
$$B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}$$

Vediamo come trovare forma canonica delle conica con ROTAZIONI

Prima: solo traslazioni



ora



Prop.: Sia $P\in O(2,\mathbb{R})$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

e $Q=\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{P} & \begin{matrix}c_1\\c_2\end{matrix}\\ \hline 0&0&1\end{array}\right)$

$$Q\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix} \iff \overset{\circledast}{\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=P\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}}$$

Allora: la conica ottenuta con l'affinità $\circledast$ ha eq. associata alla matrice

$$B'={}^t(Q^{-1})\cdot B\cdot(Q^{-1})$$

e parte quadratica $A'={}^t(P^{-1})\cdot A\cdot P^{-1}$

In particolare, se $P\in O(2,\mathbb{R})$, $P^{-1}={}^tP$

$$\Rightarrow {}^t(P^{-1})={}^t({}^tP)=P$$

$$A'=P\cdot A\cdot P^{-1}$$

Dim. Si fa la verifica.

scrive Q^{-1} usando la formula dei cofattori

* * *

Torniamo al caso generale:

per il Teorema Spettrale, possiamo diagonalizzare A in una base ortonormale:

$$A'=P\cdot A\cdot P^{-1}, \quad \text{con } P\in O(2,\mathbb{R})$$

e a meno di scambiare i 2 autovettori, possiamo supp. $\det P=1$, $P\in SO(2,\mathbb{R})$

Pongo: $Q = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{P} & \begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix} \\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)$; $Q^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{P^{-1}} & \begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix} \\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{{}^tP} & \begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix} \\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

Nuova conica C' di eq. $(x'\ y'\ 1)\cdot B'\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}=0$

dove $B' = ({}^tQ^{-1})\cdot B\cdot Q^{-1} = \underline{Q\cdot B\cdot {}^tQ}$

$Q \in SO(3,\mathbb{R})$

$A' = P\cdot A\cdot {}^tP$ diagonale

$\Rightarrow$ in $F'(x,y)$ non c'è il monomio xy

$\Rightarrow$ applico le traslazioni della discussione precedente, e ottengo FORMA CANONICA

TEOREMA: PROCEDIMENTO per TROVARE FORMA CANONICA DI CONICA:

① $F(x,y)=0 \rightsquigarrow B$ & A

diagonalizzo A

P sarà matrice di pass. da base canonica di $\mathbb{R}^2$ alla nuova base; se ha $\det P = 1$ ok, altrimenti scambio colonne

② Pongo $Q := \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{P} & \begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix} \\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

Calcolo $B' = Q\cdot B\cdot {}^tQ$

e sarà nuovo polinomio $F'(x,y)=0$

③ Uso Met. Compl. Quad. per fare opp. traslazione

ALLA FINE: abbiamo fatto una ROTAZIONE di $E^2_{\mathbb{R}}$ e poi una traslazione quindi un'isometria diretta di $E^2_{\mathbb{R}}$; siccome le coniche parabola, ellisse e iperbole sono definite da condizioni METRICHE, non abbiamo modificato la tipologia della conica

Esempio: $x^2 \underbrace{-2xy}_{2a_{12}} + y^2 + \underbrace{4}_{=2a_{13}}x + \underbrace{4}_{2a_{23}}y - 1 = 0$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_A(t) = \det\begin{pmatrix}1-t & -1\\ -1 & 1-t\end{pmatrix} = (1-t)^2 - 1$$
$$= 1-2t+t^2-1$$
$$= t^2-2t = t(t-2)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \ , \quad \lambda_2 = 2$

$V_0 = \ker\begin{pmatrix}1-0 & -1\\ -1 & 1-0\end{pmatrix}$: $x-y=0$: base ortonormale $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$V_2 = \ker\begin{pmatrix}1-2 & -1\\ -1 & 1-2\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$: $-x-y=0$

base ortonormale $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ è di riflessione

$\Rightarrow$ piuttosto $P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

② $Q := \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$B' = Q \cdot B \cdot {}^tQ = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{2\sqrt{2}}\\ 0 & \boxed{2\sqrt{2}} & -1\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow F'(x',y') = \begin{pmatrix}x' & y' & 1\end{pmatrix} B' \begin{pmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{pmatrix}$

$$2x'^2 + 4\sqrt{2}\,y' - 1 = 0 \quad /:2$$
$$x'^2 + 2\sqrt{2}\,y' - \frac{1}{2} = 0$$
$$x'^2 + 2\sqrt{2}\left(y' - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = 0$$

$\Rightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \end{cases}$ $\Downarrow$ $(x'')^2 + 2\sqrt{2}\,y'' = 0$

PARABOLA