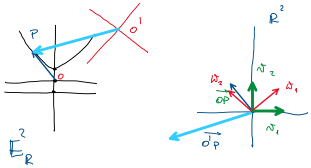
Lezione 6 maggio 2026

mercoledì 6 maggio 2026 11:12

Ieri: Visto equazioni CANONICHE per coniche.

Se ora voglio esprimere conica risp. SR cartesiano diverso:



Come cambiano le coordinate di P?

Se conosco le coord. $P = (x,y)$ in (O, v_1, v_2)

cons. una traslazione che mandi O' in O:

$$\underbrace{t_{-\overrightarrow{OO'}}}_{z = \overrightarrow{O'O}} = t_{\overrightarrow{O'O}}$$

$$t_z(O') = Q \quad \text{t.c. } \overrightarrow{O'Q} = z = \overrightarrow{O'O}$$

$$\Rightarrow Q = O$$

Cons. $t_z(P) = P'$: $\overrightarrow{PP'} = z = \overrightarrow{O'O}$

e poi cons. le coordinate di P' nel SR Cart. $(O; w_1, w_2)$

cioè scrivo le coordinate di $\overrightarrow{OP'}$ nella base $\{w_1, w_2\}$

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} + z \quad ; \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

la mappa $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \to (x',y')$

con (x,y) coord. di P in (O, v_1, v_2)

(x',y') — " — " — in (O', w_1, w_2)

$$\begin{tikzcd} E^2_R \arrow[r] & \mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$(O; v_1, v_2)$

$$P \longrightarrow (x,y) \longrightarrow (x+z_1, y+z_2) \to F_{B'}\left(\begin{pmatrix} x+z_1 \\ y+z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$B' = \{w_1, w_2\}$

$$F_{B'} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$v \to F_{B'}(v)$ = coordinate di v in B'

$\Rightarrow$ il cambio di coordinate è una affinità

$\exists$ un opportuna matrice invertibile M e

$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ t.c.

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix},\quad A^{-1}\cdot\left(\begin{pmatrix}x'-c_1\\y'-c_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Se cons. una conica con eq. canonica,

$x^2=2py$ $\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$y^2=2px$

Queste eq. vengono trasformate in eq. quadratiche.

Def.: Conica piana generale luogo di punti t.c.

$$\circledast \quad a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

$x^2-2py=0$: $a_{11}=1$, $a_{23}=-p$

$a_{ij}=0$ altrimenti

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$: $a_{11}=\frac{1}{a^2}$, $a_{22}=\frac{1}{b^2}$

$a_{33}=-1$, $a_{ij}=0$ altrimenti

Oss.

$$B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$(x\ \ y\ \ 1)$

se cons. $\underbrace{\underset{1\times3}{(x\ \ y\ \ 1)}\cdot \underset{3\times3}{B}}_{1\times3}=(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}\quad a_{12}x+a_{22}y+a_{23}\quad a_{13}x+a_{23}y+a_{33})$

$$\underbrace{\underset{1\times3}{(x\ \ y\ \ 1)}\cdot\underset{3\times3}{B}\cdot\underset{3\times1}{\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}}}_{1\times1}=a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{13}x+a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{23}y+a_{13}x+a_{23}y+a_{33}$$

$$=a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+a_{22}y^2+2a_{23}y+a_{33}\quad\circledast$$

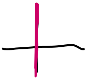
$$\circledast=0\iff(x\ y\ 1)\cdot B\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$$

Domanda: È vero che eq. del tipo $\textcircled{*}=0$ con non tutti i coeff. nulli rappresenta sempre una parabola, ellisse o iperbole?

Es. • $x^2=0$ $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$a_{11}=1\neq 0$
$a_{ij}=0$

$\underbrace{x^2=0}_{\text{RETTA DOPPIA}} \iff x=0$: in $E^2_{\mathbb{R}}$ è una retta



• $xy=0$ $B=\begin{pmatrix}0&1/2&0\\1/2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

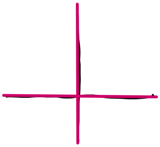
$2a_{12}=1$, $a_{12}=1/2$

$a_{ij}=0$

$$xy=0 \iff \begin{cases} x=0, \text{ opp.}\\ y=0\end{cases}$$

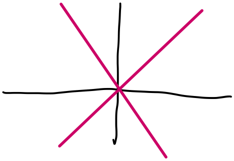
$\Downarrow$

è l'unione di 2 assi



cioè unione di 2 rette

• $x^2-y^2=0$, $(x-y)(x+y)=0$ $\begin{cases} x-y=0, \text{ opp.}\\ x+y=0\end{cases}$



• in generale, se cons.

$$(ax+by+c)\cdot(a'x+b'y+c')=0$$

è unione di 2 rette

opp. $(ax+by+c)^2 = 0$

è una RETTA DOPPIA

Def.: Una conica generale di eq.

$\circledast = 0$ si dice CONICA DEGENERE

se $\circledast$ si fattorizza come prodotto di 2 pol. di primo grado in x, y, eventualmente coincidenti.

$$\circledast = F(x,y)$$

$$F(x,y) = L_1(x,y) \cdot L_2(x,y)$$

Se $L_1 \neq L_2$, SEMPLICEMENTE DEG.

Se $L_1 = L_2$, DOPPIAMENTE DEG.

Pb.: Capire cosa rappresenta

$$F(x,y) = 0$$

OSS.: $B = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,3}$

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array}\right), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

MATR. dei COEFF di F

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$

MATRICE della PARTE QUADRATICA di F

Se in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ facciamo una ISOMETRIA:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad M \in O(2,\mathbb{R})$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\overset{3\times 3}{\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{M} & c_1 \\ & & c_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \cdot \overset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11}x + m_{12}y + c_1 \cdot 1 \\ m_{21}x + m_{22}y + c_2 \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x' = m_{11}x + m_{12}y + c_1 \\ y' = m_{21}x + m_{22}y + c_2 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

CONS. Posso controllare facilmente come cambia eq. conica generale se faccio una isometria.

$$F(x,y) = (x \;\; y \;\; 1) \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{3\times 3}{M'} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (M')^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{M} & c_1 \\ & & c_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \det M = \pm 1$$

$$\det M' = \det M \cdot \det(1) = \det M$$

in generale: $\det \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det A \cdot \det B$

$$F(x,y) = 0 \Longleftrightarrow {}^t\!\left((M')^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot B \cdot (M')^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x \;\; y \;\; 1)\, B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$= {}^t\!\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t\!\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \cdot {}^t(M')^{-1} \cdot B \cdot (M')^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x' \;\; y' \;\; 1) \cdot \underbrace{{}^t(M')^{-1} \cdot B \cdot (M')^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(M')^{-1} = N$$

${}^tN \cdot B \cdot N$ è simmetrica? Sì

$${}^t({}^tN \cdot B \cdot N) = {}^tN \cdot {}^tB \cdot {}^t({}^tN) \overset{!}{=} {}^tN \cdot B \cdot N$$

OSS.: $M \in O(2, \mathbb{R})$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{M} & c_1 \\ & & c_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Def.: B e B' si dicono CONGRUENTI se $\exists\, N \in GL(3, \mathbb{R})$

t.c. $B' = {}^tN \cdot B \cdot N$

OSS. Supp. B e B' congruenti;

$$\det B' = \det({}^tN \cdot B \cdot N) \overset{!}{=} \underbrace{\det({}^tN)} \cdot \det B \cdot \underbrace{\det N} \overset{!}{=} \det B \cdot \underbrace{(\det \overset{=}{N})^2}_{>0}$$

$$\Rightarrow \det B = 0 \Leftrightarrow \det B' = 0$$

$$\underbrace{\mathrm{sgn}}(\det B) = \mathrm{sgn}(\det B')$$

segno: $\mathbb{R}^* \rightarrow \{-1, 1\}$

$\mathrm{sgn}(r) = 1$ se $r > 0$

$\phantom{\mathrm{sgn}(r) =} -1$ se $r < 0$

Esercizio: $B' = {}^tN \cdot B \cdot N$

$\mathrm{rg}\, B' = \mathrm{rg}\, L_{B'} = \mathrm{rg}\,(L_{{}^tN} \circ L_B \circ L_N) =$

$= \dim \mathrm{Im}(L_{{}^tN} \circ L_B \circ L_N)$

$L_{B'} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$L_{B'}(v) = B' \cdot v$

$L_{B'} = L_{{}^tN} \circ L_B \circ L_N$ composiz. di AL

$$\mathrm{Im}(L_{{}^tN} \circ L_B \circ L_N) = L_{{}^tN}\Big(L_B\big(\underbrace{L_N(\mathbb{R}^3)}_{\mathbb{R}^3}\big)\Big) = L_{{}^tN}\big(\underbrace{L_B(\mathbb{R}^3)}\big)$$

N invertibile $\Longleftrightarrow$ L_N è AUTOM.

$$\mathrm{rg}\, L_B = \dim L_B(\mathbb{R}^3) = \dim L_{{}^tN}(L_B(\mathbb{R}^3))$$

perché $L_{{}^tN}$ è automorfismo.

Prossimo obiettivo: con opportune isometrie, semplificare $F(x,y)=0$.

1° CASO: Supp. $F(x,y)$ non contenga xy : $a_{12}=0$ $\Longleftrightarrow$ A è diagonale

$$B = \begin{pmatrix} \overset{A}{\boxed{\begin{matrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{matrix}}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{13} & a_{23} \end{matrix} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Due sottocasi:
- $a_{11}=0 \quad a_{22}\neq 0$ (o viceversa)
- $a_{11}\cdot a_{22} \neq 0$

- $a_{11}=0, \quad a_{22}\neq 0$

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

METODO COMPL. DEI QUADRATI:

$$a_{22}\underbrace{\left(y^2 + 2\frac{a_{23}}{a_{22}}y\right)} + 2a_{13}x + a_{33} = 0$$

$$a_{22}\left(y^2 + 2\frac{a_{23}}{a_{22}}y + \frac{a_{23}^2}{a_{22}^2}\right) - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} + 2a_{13}\left(x + \frac{a_{33}}{2a_{13}}\right) = 0$$

$a_{13} \neq 0$

$a_{13} = 0$: $\underbrace{a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33}} = 0$

se $\Delta \geq 0$: è prodotto di $L_1(y)$, $L_2(y)$

se $\Delta < 0$: non ci sono punti reali

$$a_{22}\underbrace{\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)}_{= y'}{}^2 + 2a_{13}\underbrace{\left(x + \frac{a_{33}}{2a_{13}} - \frac{a_{23}^2}{a_{13}a_{22}}\right)}_{x'}$$

$$\begin{cases} x' = x + (\ldots\ldots) \\ y' = y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases} : \quad a_{22}(y')^2 + 2a_{13}x' = 0$$

PARABOLA