Lezione 12 maggio 2026

martedì 12 maggio 2026 11:10

Pb.: Come determinare se una conica con eq.

$F(x,y) = 0$ è A CENTRO

(cioè ammette un punto C da centro di simmetria) e eventualmente trovare le coordinate di C.

Prop.: Una conica affine in $A^2_{\mathbb{R}}$ è a centro $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$, e in questo caso il centro $C = (x_0, y_0)$ è l'unica soluzione del SL

$$\circledast \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

OSS. Matrice di coeff. è $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = A$

$\det A \neq 0 \Rightarrow \circledast$ è di CRAMER

Dim.: Conica a centro $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$ segue dal Teor. di Class. delle coniche affini e dal fatto che $\det A \neq 0$ è un invariante affine.

Supp. $\det A \neq 0$, e cerchiamo le coordinate di C.

Sia $C = (x_0, y_0) \in A^2_{\mathbb{R}}$

SIMMETRIA CENTRALE

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2x_0 - x' \\ y = 2y_0 - y' \end{cases} \quad \textcircled{**}$$

Determino (x_0, y_0) a partire dal polinomio $F(x,y)$

$C = (x_0, y_0)$ è centro di simmetria

$\Rightarrow$ $F(x,y) = 0$ e $G(x',y') = F(2x_0 - x', 2y_0 - y') = 0$

Sono 2 polinomi proporzionali.

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$G(x',y') = 0$ equivale a:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2x_0 - x' & 2y_0 - y' & 1 \end{pmatrix}}_{(2x_0 \;\; 2y_0 \;\; 0) - (x' \;\; y' \;\; -1)} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 2x_0 - x' \\ 2y_0 - y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 0 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

1 × 3 3 × 3 3 × 1

$$= \left(\underbrace{+ \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 0 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} -x' \\ -y' \\ 1 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -x' & -y' & 1 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right. +$$

perché B è simmetrica

$$+ \begin{pmatrix} -x' & -y' & 1 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} -x' \\ -y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$4 \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 0 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$-4 \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 0 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -1 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^2 \begin{pmatrix} x' & y' & -1 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Calcoliamo esplicit. i 3 addendi:

1° ADD.

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{a_{11} x_0 + a_{12} y_0} & \underbrace{a_{12} x_0 + a_{22} y_0} & \underbrace{a_{13} x_0 + a_{23} y_0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(a_{11} x_0^2 + a_{12} x_0 y_0 \right) + \left(a_{12} x_0 y_0 + a_{22} y_0^2 \right) + 0$$

$$= a_{11} x_0^2 + 2 a_{12} x_0 y_0 + a_{22} y_0^2$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

2° ADD:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 0 \end{pmatrix} \cdot B} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} x_0 + a_{12} y_0 & a_{12} x_0 + a_{22} y_0 & a_{13} x_0 + a_{23} y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(a_{11} x_0 + a_{12} y_0 \right) x' + \left(a_{12} x_0 + a_{22} y_0 \right) \cdot y' - \left(a_{13} x_0 + a_{23} y_0 \right)$$

3° ADD:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & -1 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\underbrace{a_{11}x' + a_{12}y' - a_{13}} \quad \underbrace{a_{12}x' + a_{22}y' - a_{23}} \quad \underbrace{a_{13}x' + a_{23}y' - a_{33}} \right) \begin{pmatrix} \boxed{x'} \\ \boxed{y'} \\ \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x'^2 + \underbrace{a_{12}x'y'} - a_{13}x' + \underbrace{a_{12}x'y'} + a_{22}y'^2 - a_{23}y'$$

$$- a_{13}x' - a_{23}y' + a_{33}$$

$$= a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a_{33} - 2a_{13}x' - 2a_{23}y'$$

$$\Rightarrow G(x',y') = 4 \cdot \left(a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2\right)$$

$$-4 \cdot \left((a_{11}x_0 + a_{12}y_0)\,x' + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0) \cdot y' - \underbrace{(a_{13}x_0 + a_{23}y_0)} \right)$$

$$+ a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \underbrace{a_{33}} - 2a_{13}x' - 2a_{23}y'$$

$$= \underbrace{a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2} +$$

$$+ \underbrace{\left(\boxed{-4}(a_{11}x_0 + a_{12}y_0) \boxed{-2}\, a_{13}\right)} x' + \underbrace{\left(-4(a_{12}x_0 + a_{22}y_0) - 2a_{23}\right)} y'$$

$$\underbrace{+ 4\left(a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2\right) + 4\left(a_{13}x_0 + a_{23}y_0\right) + a_{33}}$$

$G(x',y')$ è proporzionale a $F(x,y)$

$\Longleftrightarrow \exists\, \lambda \neq 0$ t.c. $G = \lambda \cdot F$

MA: la parte quadratica di G è UGUALE alla parte quadratica di F $\Rightarrow$ $\lambda = 1$.

$$\longrightarrow \begin{cases} \left(\boxed{-4}(a_{11}x_0 + a_{12}y_0) \boxed{-2}\, a_{13}\right) = 2a_{13} & \text{coeff. di } x \text{ in } F \\ \underbrace{\left(-4(a_{12}x_0 + a_{22}y_0) - 2a_{23}\right)} = 2a_{23} & \text{coeff. di } y \text{ in } F \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -4\,(\underbrace{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}}) = 0 & /:(-4) \\ -4\,(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) = 0 & /:(-4) \end{cases}$$

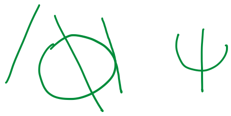
Infine:

$$4\,(a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2) + 4\,(a_{13}x_0 + a_{23}y_0) + a_{33}$$

$$4\,(\underbrace{(a_{11}x_0 + a_{12}y_0)}_{=-a_{13}})\cdot x_0 + 4\,(\underbrace{a_{12}x_0 + a_{22}y_0}_{=-a_{23}})\cdot y_0 + 4\,(a_{13}x_0 + a_{23}y_0) + a_{33} = a_{33}$$

* * *

Intersezioni tra coniche aff. e rette in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$



Oss. preliminari

Cons. retta affine non verticale (non del tipo $x = \text{cost}$)

quindi $y = mx + q$ $: r$

Conica affine $F(x,y) = 0$ $: \mathcal{C}$

Pb.: cosa dire di $\mathcal{C} \cap r$?

Studio $\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ y = mx + q \end{cases}$

Cons. $G(x) = F(x, mx+q) \in \mathbb{R}[x]$

è un polinomio, di grado ≤ 2

CASI POSSIBILI :

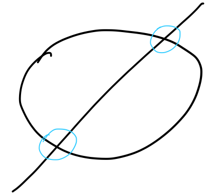
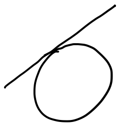
①	②	③	④	⑤	⑥
$\deg G(x) = 2$	$\deg G(x) = 2$	$\deg G(x) = 2$	$\deg G(x) = 1$	$\deg G(x) = 0$	$\deg G(x) = 0$
e ha 2 radici reali distinte	ha 2 radici coincidenti	non ha radici reali	1 radice reale	costante nulla	costante non nulla
$(\Delta > 0)$	$(\Delta = 0)$	$(\Delta < 0)$		$G(x) \equiv 0$	$G(x) = c$
	$x_1 = x_2$				$\neq 0$
	$y_1 = mx_1 + q$				

$x_1,\ x_2$

$\Rightarrow y_1 = mx_1 + q$

$y_2 = mx_2 + q$

$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in \mathcal{C} \cap r$

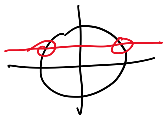



r SECANTE

es.: $\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$, $G(x) = x^2 + \frac{1}{4} - 1$

$G(x) = x^2 - \frac{3}{4} = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$

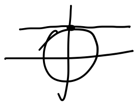


Es.: $\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ y=1 \end{cases}$ $G(x) = x^2+1-1 = x^2$

unica radice $x_1 = x_2 = 0$

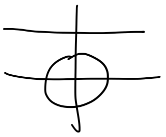
$y=1$

$(0,1)$



r: TANGENTE a $\mathcal{C}$ in $r \cap \mathcal{C}$.

③



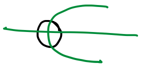
$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ y=2 \end{cases}$ $G(x) = x^2+4-1$

$= x^2+3 = 0$

non ha radici reali

r: RETTA ESTERNA alla conica

④



$\begin{cases} xy-1=0 \\ y=2 \end{cases}$ $\Rightarrow G(x) = 2x-1$

$x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$\begin{cases} \underline{y^2-x} = 0 \\ y=1 \end{cases}$ $G(x) = 1^2 - x = 1-x$

unica soluz. $x=1$

$\Rightarrow (1,1)$ unico punto di int.

⑤ $G(x)$ sia la cost. nulla :

$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ y=mx+q \end{cases}$ $G(x) = F(x, mx+q) \equiv 0$

$G(x) = 0$

$0 = 0$

$\Longleftrightarrow$ ogni punto di $r: \quad y = mx + q$

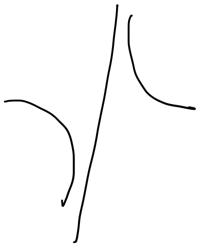
soddisfa $F(x,y) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $r \subseteq \mathcal{C}$ $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ è degenere e

r è una componente

es.: $\begin{cases} xy = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow G(x) \equiv 0$

⑥



$\begin{cases} xy - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad G(x) = -1 \neq 0$

non ha radici

Infine se r è verticale, quindi $x = k$, rifaccio il ragionamento: $\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ x = k \end{cases}$, $H(y) = F(k,y)$ e 6 casi

Dalla discussione segue:

Prop.: Date $\mathcal{C}$ e r arbitrarie, per

$r \cap \mathcal{C}$ abbiamo i casi:

ⓐ $r \subseteq \mathcal{C}$, opp.

ⓑ $\# \, r \cap \mathcal{C} = |r \cap \mathcal{C}| \leq 2$

Prop.: Supp. $\mathcal{C}$ conica non degenere

Allora $\forall \, P = (x_1, y_1) \in \mathcal{C}$, $\exists!$

retta tg. $T_P \mathcal{C}$ a $\mathcal{C}$ in P,

ed ha eq.:

$$\underbrace{(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13})}(x - x_1) + \underbrace{(a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23})}(y - y_1) = 0$$