Lezione 13 maggio 2026

mercoledì 13 maggio 2026 11:24

Def.: $C \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ conica di eq. $F(x,y)=0$ si dice NON DEGENERE se $\det B \neq 0$.

Def.: Retta tangente a una conica non degenere C in $p \in C$

$T_p C$ è una retta t.c.

$C \cap T_p C = \{p\}$ e $P=(x_0, y_0)$, x_0 è radice doppia del polinomio $G(x) = F(x, mx+q)$

$T_p C$: $y = mx+q$

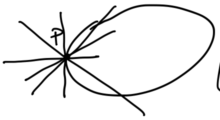
Prop.: C non degenere; $\forall p \in C$,

$\exists!\ T_p C$: $P = (x_0, y_0) \in C$

ed ha eq:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})(x-x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})(y-y_0) = 0$$

Dim.: Cons. $P = (x_0, y_0)$ e cons. la generica retta per P con eq. parametrica



$$\boxed{r: \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}} \longleftarrow$$

$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ = vett. di direzione

$C: F(x,y)=0$ $\qquad$ r

$C \cap r$: $F(x_0+mt, y_0+nt) = 0$

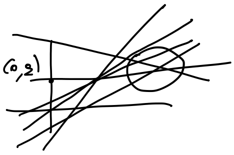
$=: G(t)$; $G(0) = F(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow t$ divide G

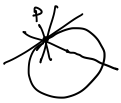
perché $P \in C$

es. $y = mx+q$, $\begin{cases} x = t \\ y = q+mt \end{cases}$

verticale : $\begin{cases} x = k \\ y = t \end{cases}$

$G(t) = F(k,t)$





È facile verificare che r è tg. $\Leftrightarrow$ la radice $t=0$ è doppia per $G(t)$

$\Leftrightarrow$ t^2 divide $G(t)$

$$G(t) = c \cdot t^2$$

Idea: scrivere $G(t)$ e imporre che il coeff. di t sia nullo.

$$F(x,y)=0 \iff (x \quad y \quad 1)\cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$F(x_0+mt,\ y_0+nt)=0$$

$$\iff$$

$$G(t)=\underbrace{(x_0+mt \quad y_0+nt \quad 1)}_{\substack{\parallel \\ (x_0 \quad y_0 \quad 1) + (mt \quad nt \quad 0)}} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x_0+mt \\ y_0+nt \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mt \\ nt \\ 0 \end{pmatrix}$$

La parte lineare di $G(t)$ è data da

$$2\,\underbrace{(x_0 \quad y_0 \quad 1)\cdot B}\begin{pmatrix} mt \\ nt \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$2\,(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13} \quad a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23} \quad *)\cdot t\begin{pmatrix} m \\ n \\ 0 \end{pmatrix}$$

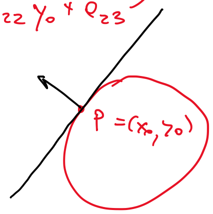
$$= 2t\Big(\underbrace{(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})\,m + (a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23})\,n}\Big)$$

in $G(t)$ manca il termine lineare

$$\iff \qquad = 0$$

$$\iff \left\langle \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}} \\ \boxed{a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



$\Rightarrow ax + by = d$ $\quad T_P C$

$d = ?$: $\quad T_P C \ni P$

$a x_0 + b y_0 = d$

$$ax + by = a x_0 + b y_0$$

$$\underbrace{a}_{}(x - x_0) + \underbrace{b}_{}(y - y_0) = 0$$

OSS.: $F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$

in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

posso $\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{13} \\ 2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_{23} \end{pmatrix}$

$$\overset{!}{=} 2 \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \nabla F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_P C \ : \ \left\langle \nabla F(x_0, y_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Def.: $P = (x_0, y_0) \in C$ si dice

SINGOLARE se $\nabla F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

P NON SINGOLARE se $\nabla F(x_0, y_0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

PROP: $\mathcal{C}$ è conica NON DEGENERE, allora ogni suo punto è NON SINGOLARE.

DIM.: OMESSA.

CASO PROIETTIVO

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Def.: Cons. $F(x_0, x_1, x_2)$ polinomio OMOGENEO DI GRADO 2, cioè del tipo

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_0x_1 + 2a_{23}x_0x_2 + a_{33}x_0^2 = F(x_0, x_1, x_2)$$

OSS. $F(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) =$

$$= a_{11}\lambda^2 x_1^2 + 2a_{12}\lambda^2 x_1x_2 + \dots + a_{33}\lambda^2 x_0^2 =$$

$$= \lambda^2 \cdot F(x_0, x_1, x_2)$$

Una CONICA PROIETTIVA è il luogo degli zeri di un polinomio omogeneo $F(x_0, x_1, x_2)$ di grado 2.

$$\mathcal{C} = \{ (\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} : F(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}) = 0 \}$$

OSS. $F(x_0, x_1, x_2) = (x_1 \ x_2 \ x_0) \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix}$

$B = (a_{ij})$ simmetrica.

Def.: Data $C \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$, di equazione $F(x, y) = 0$, la sua

CHIUSURA PROIETTIVA

$\bar{C} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è la conica proiettiva di

eq: $\underbrace{x_0^2 \cdot F\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)}_{= \tilde{F}(x_0, x_1, x_2) \text{ omogeneo}} = 0$

è OMOGENEIZZATO di F

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

$$x_0^2 \cdot F\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = \left(a_{11}\frac{x_1^2}{x_0^2} + 2a_{12}\frac{x_1x_2}{x_0^2} + a_{22}\frac{x_2^2}{x_0^2} + 2a_{13}\frac{x_1}{x_0} + 2a_{23}\frac{x_2}{x_0} + a_{33}\right) \cdot x_0^2$$

OSS.: $\bar{C} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, $\bar{C} \cap U_0 = j_0(C) \longleftrightarrow C$

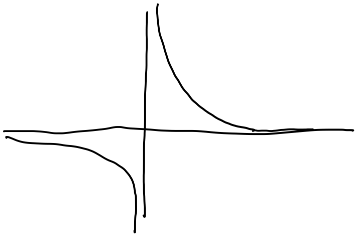
$U_0 = \{x_0 \neq 0\}$

$= \{(1 : x : y)\}$

Def.: $\bar{C} \cap \{x_0 = 0\}$: PUNTI IMPROPRI di C

Esempi:

① iperbole: $F(x,y) = xy - 1 = 0$



$$\tilde{F}(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 \cdot F\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$$

$$= x_0^2 \cdot \left(\frac{x_1x_2}{x_0^2} - 1\right)$$

$$= x_1x_2 - x_0^2$$

Punti impropri ? : $\begin{cases} x_1 x_2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ $<$

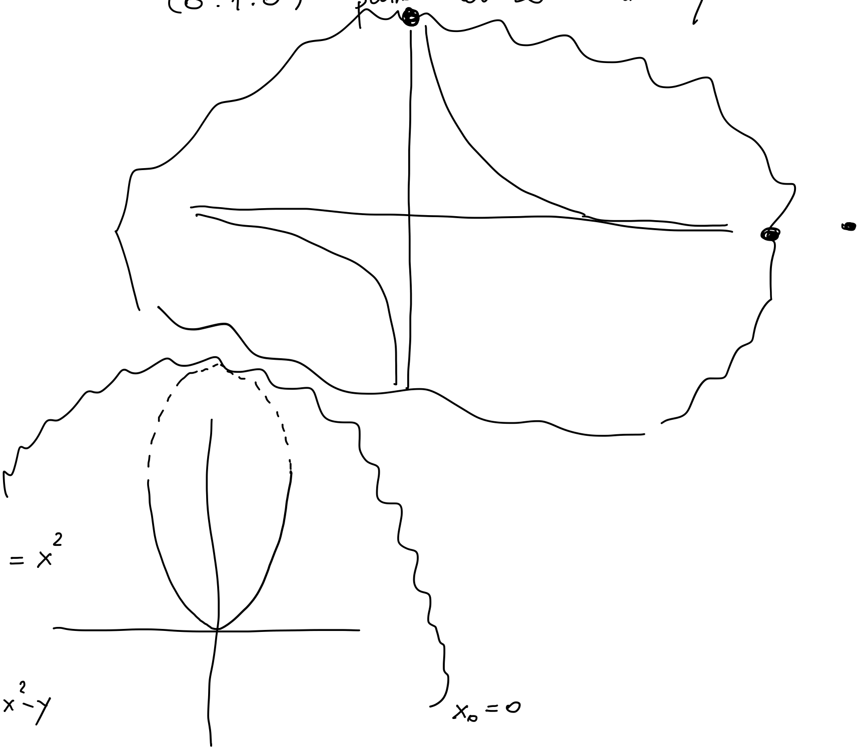
$x_1 = 0 \rightsquigarrow (0:0:1)$

$x_2 = 0 \rightsquigarrow (0:1:0)$ 2 punti impropri

$x_0 = 0$

OSS.: $(0:0:1)$ è il punto all'infinito delle rette affini $x = 0$

$(0:1:0)$ punto all'∞ di $y = 0$



② $y = x^2$

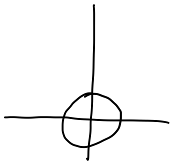
$F(x,y) = x^2 - y$

$\tilde{F}(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 \cdot F\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = x_1^2 - x_0 x_2$

punti impropri: $\begin{cases} x_1^2 - x_0 x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ doppia} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

1 punto improprio: $(0:0:1)$

③ $x^2 + y^2 = 1$



$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$\tilde{F}(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_0^2$

$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ NON CI SONO PUNTI IMPROPRI REALI

ce ne sono 2 immaginari

$(0:1:i)$ e $(0:1:-i)$