Lezione 14 maggio 2026

giovedì 14 maggio 2026 11:13

Visto: coniche proiettive: $\subseteq \mathbb{P}^2_K$

$\mathcal{C} = \{(x_0 : x_1 : x_2) \;:\; F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$
omog. di grado 2

$$F = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$F = (x_0 \;\; x_1 \;\; x_2) \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo definito anche la chiusura proiettiva $\bar{C}$ di una conica affine $C \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$:
se C ha eq. $F(x,y) = 0$, definiamo il polinomio OMOGENEIZZATO

$$\tilde{F}(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 \cdot F\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$$

allora $\bar{C}$ ha equazione $\tilde{F}(x_0, x_1, x_2) = 0$

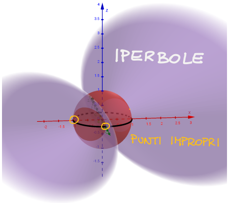
I punti di $\bar{C} \cap \{x_0 = 0\}$ si chiamano

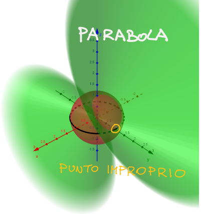
PUNTI IMPROPRI DI C.

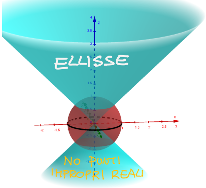
Si ha: se C iperbole $\Rightarrow$ 2 punti impropri reali e distinti

se C è parabola $\Rightarrow$ 1 punto improprio reale (doppio)

se C è ellisse $\rightarrow$ non ci sono punti impropri reali (2 complessi coniugati)







Domanda: Se $T: \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$

è una proiettività (cioè: $\exists\ M \in GL(3,\mathbb{K})$)

t.c.

$\forall\ (x_0 : x_1 : x_2)$

$$T((x_0:x_1:x_2)) = \left[M \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]$$

classe di proporzionalità

- chi è $T(\mathcal{C})$?
- se $T(\mathcal{C})$ è una conica, chi è la sua equaz.?

pongo $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{C}: \quad (x_0 \ x_1 \ x_2) \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad {}^t\left(M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \cdot B \cdot M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$= {}^t\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \cdot {}^tM^{-1}$$

$$(y_0 \ y_1 \ y_2) \cdot \underbrace{{}^tM^{-1} \cdot B \cdot M^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{OSS.:} \quad {}^t(\underbrace{{}^tM^{-1} \cdot B \cdot M^{-1}}) = {}^tM^{-1} \cdot {}^tB \cdot {}^t({}^tM^{-1})$$

$$= \underbrace{{}^tM^{-1} \cdot B \cdot M^{-1}}$$

$=$

$\Longrightarrow$ $T(\mathcal{C})$ è ancora conica di eq. $(y_0\ y_1\ y_2)\cdot \underbrace{{}^tM^{-1}\cdot B\cdot M^{-1}}_{B'}\cdot \begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix}=0$

e B' è CONGRUENTE a B

$(M^{-1} =: N,\quad {}^tN\cdot B\cdot N = B')$

in particolare, $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} B'$

COR.: $\operatorname{rg} B$ è un INVARIANTE PROIETTIVO
(è mantenuto per proiettività)

Def.: $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, B matrice

① $\operatorname{rg} B = 1$: CONICA PROI. DOPPIAMENTE DEG.

② $\operatorname{rg} B = 2$: CONICA PROI. SEMPLIC. DEG.

③ $\operatorname{rg} B = 3$: CONICA PROIETTIVA NON DEGENERE

Prop.: Una conica affine $C \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ è

- NON DEG. $\Longleftrightarrow$ $\overline{C} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ è NON DEG.
- SEMPLIC. DEG. $\Longleftrightarrow$ $\overline{C} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ è SEMPL. DEG.
- DOPP. DEG $\Longleftrightarrow$ —"— è DOPP. DEG.

* * *

Voglio classif. le classi di proiettività
nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

TEO. DI SYLVESTER:

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ opp. $\mathbb{R}$ (char $\neq 2$)

ogni matrice simmetrica è CONGRUENTE a una matrice diagonale.

$${}^tA = A \;;\; \exists\, N \in GL(n)$$

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$

t.c.

$${}^tN \cdot A \cdot N = D \text{ diagonale}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Nel caso $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} : \quad \alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = 0$$

abbiamo i Teoremi di classificazione di coniche proiettive:

Teo: Ogni conica in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è proiett. equiv. a una delle seguenti:

Ⓘ $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

Ⓘⓘ $x_0^2 + x_1^2 = 0$

(III) $x_0^2 = 0$

Dim: ogni conica è proi. equiv. a

$$\alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = 0$$

scelgo una radice $\overset{\text{quadrata}}{}$ di α_i in $\mathbb{C}$

pongo
$$\begin{cases} X_0 = \sqrt{\alpha_0}\; x_0 \\ X_1 = \sqrt{\alpha_1}\; x_1 \\ X_2 = \sqrt{\alpha_2}\; x_2 \end{cases}$$

~~se~~ $\alpha_0 \neq 0$
$\alpha_1 \neq 0$
$\alpha_2 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_0} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\alpha_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\alpha_0 \neq 0$ $(\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 0)$

se $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$

$$\begin{cases} X_0 = \sqrt{\alpha_0}\; x_0 \\ X_1 = \sqrt{\alpha_1}\; x_1 \quad = x_1 \\ X_2 = x_2 \quad = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_0} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$X_0^2 + X_1^2 = 0 \qquad\qquad X_0^2 = 0$$

Teo: Ogni conica in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è proi. equiv. a una delle seguenti:

(I) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ $\begin{pmatrix} >0 & & \\ & >0 & \\ & & >0 \end{pmatrix}$

(II) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ $\begin{pmatrix} >0 & & \\ & >0 & \\ & & <0 \end{pmatrix}$

(III) $x_0^2 + x_1^2 = 0$

(IV) $x_0^2 - x_1^2 = 0$

(V) $x_0^2 = 0$

OSS: $\alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = 0$

$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_1 < 0, \quad \alpha_2 < 0$

$$\begin{cases} X_0 = \sqrt{\alpha_0}\, x_0 \\ X_1 = \sqrt{-\alpha_1}\, x_1 \\ X_2 = \sqrt{-\alpha_2}\, x_2 \end{cases} \qquad X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 = 0 \;\Big/ \cdot(-1)$$

$$-X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$$

$$\begin{cases} \tilde{X}_0 = X_1 \\ \tilde{X}_1 = X_2 \\ \tilde{X}_2 = X_0 \end{cases} \qquad \tilde{X}_0^2 + \tilde{X}_1^2 - \tilde{X}_2^2 = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{invertibile}} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{pmatrix}$$