Lezione 28 aprile 2026

martedì 28 aprile 2026 11:12

Visto: Teo: $\varphi, \psi : V \longrightarrow V'$ isom. lineari

Allora $[\varphi] = [\psi] : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$

$\Leftrightarrow$ $\exists\ \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $\psi = \lambda \varphi$

Def.: $V = V'$, un isom. proiettivo

$f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ PROIETTIVITÀ

Oss.: Se $f = [\varphi]$, $g = [\psi]$

$\Rightarrow$ $f \circ g = [\varphi \circ \psi]$

in part. è proiettività

$f^{-1} = [\varphi^{-1}]$

$Id_{\mathbb{P}(V)} = [Id_V] = [\underset{\text{omotetie}}{\lambda \cdot Id_V}]$

$\lambda \in \mathbb{K}^*$

$\Rightarrow$ $\{\text{proiettività} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)\} =: PGL(V)$

è un GRUPPO RISP. $\circ$

GRUPPO PROIETTIVO LINEARE GENERALE

Oss.: Posso considerare

$$\alpha : \underbrace{GL(V)}_{\text{GRUPPO LINEARE}} \longrightarrow PGL(V)$$

$= \{\text{automorfismi} : V \to V\}$

$$\varphi \longrightarrow [\varphi] = f$$

è OMOMORFISMO di gruppi:

$$\alpha(f\circ\psi) = [f\circ\psi] = [f]\circ[\psi]$$
$$= \alpha(f)\circ\alpha(\psi)$$

È suriettivo? Sì per costruzione di $f = [f]$

È iniettivo? $\ker\alpha = \{ f \in GL(V) : \alpha(f) = Id_{P(V)} \}$
$$= [f] = Id_{P(V)}$$

$$[Id_V] = Id_{P(V)}$$

$\Rightarrow$ per il Teorema, tutti e soli gli endomorfismi f t.c. $[f] = Id_{P(V)}$ sono $f = \lambda\cdot Id_V$
$\lambda \neq \mathbb{K}^*$

$\Rightarrow \ker\alpha = \{$ omotetie $: \lambda\, Id_V : V \to V,\ \lambda \neq \mathbb{K}^* \}$
$$= Om(V)$$
è un sottogruppo di $GL(V)$;
è isomorfo al gruppo moltiplicativo $\mathbb{K}^*$

Per il I° Teorema di OMOMORFISMO.

$$\frac{GL(V)}{\ker\alpha} \cong PGL(V)$$

$$= GL(V) / Om(V)$$

EQUAZIONI DI PROIETTIVITÀ

Fisso base $\mathcal{B}$ in V, cons.
dim $V = n+1$

$f : V \to V$ automorfismo

Cons. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = M$

Sappiamo che

se v ha coordinate $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$f(v)$ ha coordinate $\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow [v] \in \mathbb{P}(V)$ ha coordinate omogenee $(x_0 : \dots : x_n)$

$[f(v)] \rightsquigarrow (y_0 : \dots : y_n) = (\rho y_0 : \dots : \rho y_n)$
$\rho \neq 0$

allora per costruzione

$$\begin{pmatrix} \rho y_0 \\ \vdots \\ \rho y_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

in forma compatta $\boxed{\rho Y = \overset{(n+1)\times(n+1)}{\overset{\downarrow}{M}} \cdot X}$

ISOM. PROIETT.

Teorema di Struttura per PROIETTIVITÀ:
(Fondamentale sulle proi.)

$\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(V') = n$

Se $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$

$Q_0, \dots, Q_{n+1} \in \mathbb{P}(V')$ } $(n+2)$-ple di punti in POSIZ. GENERALE

(cioè: comunque ne estraggo $n+1$, corrispondono a $n+1$ vettori LIN. INDIP.)

$\Rightarrow \exists !$ isom. proiettivo

$f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$

t.c. $f(P_i) = Q_i \quad \forall i = 0, \dots, n+2$

Dim. Esistenza

$P_i = [v_i]$, $Q_i = [w_i]$

in posiz. generale

$\Rightarrow \{v_0, \dots, v_n\}$ base di V $\qquad \{w_0, \dots, w_n\}$ base di V'

$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n \qquad w_{n+1} = \mu_0 w_0 + \dots + \mu_n w_n$

oss. $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ sono TUTTI non nulli

perché anche $\{v_{n+1}, v_1, \dots, v_n\}$ è base

$\{v_{n+1}, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}$ base

Analog. anche tutti i μ_i sono $\neq 0$.

$\Rightarrow \quad \{\underbrace{\lambda_0 v_0}_{\tilde{v}_0}, \dots, \underbrace{\lambda_n v_n}_{\tilde{v}_n}\}$ base di V, $\quad \{\underbrace{\mu_0 w_0}_{\tilde{w}_0}, \dots, \underbrace{\mu_n w_n}_{\tilde{w}_n}\}$ base di V'

Per il Teo. di Struttura per AL:

$\exists ! \; f(\lambda_i v_i) = \mu_i w_i \qquad f$ è isom.

$f : V \to V'$

$$\Longrightarrow f(v_{n+1}) = f(\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n)$$

$$\overset{!}{=} f(\lambda_0 v_0) + \dots + f(\lambda_n v_n)$$

$$\overset{!}{=} \mu_0 w_0 + \dots + \mu_n w_n = w_{n+1}$$

$$\Longrightarrow \mathsf{f} = [f] \quad , \quad \mathsf{f}(P_0) = \mathsf{f}([v_0]) = \mathsf{f}([\lambda_0 v_0]) \overset{!}{=} [f(\lambda_0 v_0)] \overset{!}{=} [\mu_0 w_0] \overset{!}{=} [w_0] = Q_0$$

$$\mathsf{f}(P_i) = Q_i$$

$$\mathsf{f}(P_{n+1}) = \mathsf{f}([v_{n+1}]) = [f(v_{n+1})] = [w_{n+1}] = P_{n+1}$$

Unicità: supp. $\mathsf{f}' : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$

$\mathsf{f}'(P_i) = Q_i \quad \forall i = 0, .., n+1$

isom. proiettivo ; cons.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(V) \arrow[r, "\mathsf{f}"] & \mathbb{P}(V') \arrow[r, "(\mathsf{f}')^{-1}"] & \mathbb{P}(V) \end{tikzcd}$$

$g := (\mathsf{f}')^{-1} \circ \mathsf{f} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$

è proiettività

Se dimostro che $g = Id_{\mathbb{P}(V)}$

allora $\mathsf{f}' = \mathsf{f}$

Pongo $g = [\psi]$; sia $g(P_i) = P_i \quad \forall i = 0, .., n+1$

$g(P_i) = [\psi(v_i)] = [v_i]$

$P_i = [v_i]$

$\Longrightarrow \psi(v_i) = \rho_i v_i \quad \forall i = 0, .., n+1$

$\Longrightarrow \psi$ ha $n+2$ autovettori $v_0, .., v_{n+1}$

comunque scelti n+1 di questi, sono LIN INDIP

Scrivo $v_{n+1} = \alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_n v_n$

α_i sono tutti non nulli

$$\psi(v_{n+1}) = \rho_{n+1} v_{n+1} = \alpha_0 \rho_{n+1} v_0 + \dots + \alpha_n \rho_{n+1} v_n$$

$$\psi(v_{n+1}) = \psi(\alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_0 \rho_0 v_0 + \dots + \alpha_n \rho_n$$ [illegible]

$$\{v_0, \dots, v_n\} \text{ base} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 \rho_{n+1} = \alpha_0 \rho_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \rho_{n+1} = \alpha_n \rho_n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 (\rho_{n+1} - \rho_0) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n (\rho_{n+1} - \rho_n) = 0 \end{cases}$$

Infine $\alpha_i \neq 0 \quad \forall\, i = 0, \dots, n+1$

$$\Longrightarrow \rho_{n+1} = \rho_0 = \dots = \rho_n$$

$\Longrightarrow$ $v_0, \dots, v_{n+1}$ sono autovettori LIN INDIP relativi a stesso autovalore ρ

$$\Longrightarrow V_\rho = V \quad \Longrightarrow \quad \psi = \rho \cdot Id_V$$

$$\Longrightarrow g = [\psi] = Id_{\mathbb{P}(V)}$$

Def.: $X, X' \subseteq \mathbb{P}(V)$ sottoinsiemi si dicono PROIETTIV. EQUIVALENTI se $\exists\, f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ proiettività che $f(X) = X'$

COR. del Teo di Struttura:

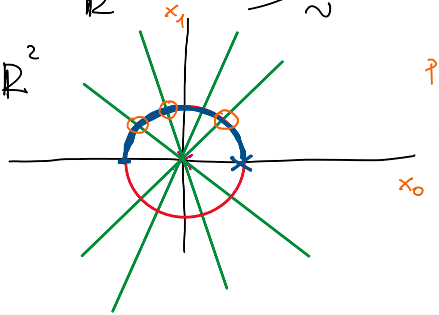
Due $(n+2)$-ple di punti in $\mathbb{P}(V)$ in posizione generale, sono SEMPRE PROIETTIVAMENTE EQUIVAL.

Esempi: $n=1$; $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$

comunque scelti $\left.\right]$ due insiemi di $n+2 = 3$ punti in posizione generale,

sono proiett. equiv.

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \frac{\mathbb{R}^2 \setminus \{ \binom{0}{0} \}}{\sim}$$



3 punti sono in posiz. generale $\Longleftrightarrow$ sono distinti

OSS. : Essere proiettivamente equivalenti

è una RELAZIONE di EQUIVALENZA

Infatti $X, X', X'' \subseteq \mathbb{P}(V)$

① $X \sim X$ perchè $Id_{\mathbb{P}(V)}(X) = X$

② $X \sim X'$, $X' = f(X)$, f proiett.

$\Rightarrow X = f^{-1}(X')$, f^{-1} è proiett.

$X' \sim X$

③ $X \sim X'$, $X' \sim X''$

$X' = f(X)$, $X'' = g(X')$

$\Rightarrow X'' = g(f(X)) = \underbrace{(g \circ f)}_{\text{proiett.}} (X)$

$\Rightarrow X \sim X''$