Lezione 29 aprile 2026

mercoledì 29 aprile 2026 11:17

Proiettività : per semplicità :

risb
$$\begin{tikzcd} f: \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \arrow[r] & \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \\ U_0 \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] & U_0 \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] \end{tikzcd}$$

$$U_0 = \{ (x_0 : \cdots : x_n) \ : \ x_0 \neq 0 \}$$

$$U_0 \longleftrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$$

$$j_0 : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \longrightarrow U_0 \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$$

Domanda: quali f t.c.

$$f|_{U_0} : U_0 \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$$

e $f(U_0) \subseteq U_0$ (U_0 è invariante)

e a cosa corrispondono quando identifico U_0 con $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$?

$$f : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$$

in coordinate

$$\rho Y = M \cdot X \qquad , \ \rho \in \mathbb{K}^*$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = f((x_0 : \cdots : x_n))$$

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad , \ M \in GL(n+1, \mathbb{K})$$

Sia $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \in U_0$, $x_0 \neq 0$

$$= (1 : \bar{x}_1 : \cdots : \bar{x}_n) \qquad \bar{x}_i = \frac{x_i}{x_0}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{00} & \cdots & m_{0n} \\ \vdots & & \\ m_{n0} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{m_{00} + m_{01} \bar{x}_1 + \cdots + m_{0n} \bar{x}_n} \\ \vdots \\ m_{n0} + m_{n1} \bar{x}_1 + \cdots + m_{nn} \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

$\neq 0$ per ogni scelta di $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$

in part.

per $\bar{x}_1 = \cdots = \bar{x}_n = 0 \longrightarrow m_{00} \neq 0$

Inoltre: H_0 : di eq. $x_0 = 0$

Voglio che $f(H_0) \subseteq H_0$

IPERP. ALL' ∞

$$H_0 = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus U_0$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{01} x_1 + \cdots + m_{0n} x_n \\ \vdots \\ m_{n1} x_1 + \cdots + m_{nn} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

per ogni $x_1, \dots, x_n$ NON TUTTI

NULLI

In particolare: $M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{01} \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m_{01} = 0$

$M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{02} \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m_{02} = 0$

$\vdots$

$m_{0n} = 0$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} \overset{\neq 0}{m_{00}} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{10} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \quad ⊛$$

OSS.: Ricordo che in $\mathbb{K}^{n+1}$ tutti gli automorfismi sono del tipo $M \cdot X$ M invertibile; quindi 2 automorfismi f e f' sono PROPORZIONALI $f' = \lambda \cdot f$, $\lambda \in K^*$

$\Leftrightarrow$

$M' = \lambda M$

$\Rightarrow$ due automorfismi di K^{n+1} inducono la stessa PROIETTIVITÀ di $\mathbb{P}^n_K$

$\Leftrightarrow M' = \lambda M$

$\Rightarrow$ invece di ⊛, posso cons.

$$\frac{1}{m_{00}} \cdot M = M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{m}_{10} & \cdots & \cdots & \overline{m}_{1n} \\ \vdots & & & \\ \overline{m}_{n0} & \cdots & \cdots & \overline{m}_{nn} \end{pmatrix} \quad (\ast\ast)$$

PROP.: Ogni matrice del tipo $(\ast\ast)$ (condizioni $\neq 0$) corrisponde a una proiettività
$f: \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$ t.c. $f(H_0) \subseteq H_0$
$f(U_0) \subseteq U_0$.

OSS.: H_0 è un iperpiano
f proiettività mantiene le dimensioni proiettive
$\Rightarrow f(H_0)$ è iperpiano $\Rightarrow f(H_0) = H_0$

Dim.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

* * *

Cons. ora M' di tipo $(\ast\ast)$
e la proiettività associata

$$f: \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$$

$$f(x_0 : \cdots : x_n) = \left(x_0 : \sum_{i=0}^{n} m_{1i} x_i : \cdots : \sum_{i=0}^{n} m_{ni} x_i\right)$$

Cons. $f|_{U_0} : U_0 \longrightarrow U_0$

$U_0 \xrightarrow{j_0^{-1}} \mathbb{A}^n_K \qquad j_0^{-1}\big((x_0 : \cdots : x_n)\big) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$

$j_0 : \mathbb{A}^n_K \longrightarrow U_0, \quad j_0(x_1, \ldots, x_n) = (1 : x_1 : \cdots x_n)$

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[r, "f|_{U_0}"] & U_0 \arrow[d, "j_0^{-1}"] \\ \mathbb{A}^n_K \arrow[u, "j_0"] \arrow[r, "\tilde{f}"] & \mathbb{A}^n_K \end{tikzcd}$$

Pongo $\tilde{f} := j_0^{-1} \circ f|_{U_0} \circ j_0 : \mathbb{A}^n_K \to \mathbb{A}^n_K$

$$\left(j_0^{-1} \circ f|_{U_0} \circ \underbrace{j_0}_{}\right)(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\left(j_0^{-1} \circ f|_{U_0}\right)(1 : x_1 : \dots : x_n) = j_0^{-1}\left(\left(1 : \sum_{i=0}^{n} m_{1i} x_i : \dots\right)\right)$$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_{1i} x_i}{1}, \dots, \frac{\sum m_{ni} x_i}{1} \right)$$

$$= \left(m_{10} + m_{11}x_1 + \dots + m_{1n}x_n, \dots, m_{n0} + m_{n1}x_1 + \dots + m_{nn}x_n\right)$$

$$= \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{se è invertibile,}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{10} \\ \vdots \\ m_{n0} \end{pmatrix}$$

SÌ

allora $\tilde{f}$ è un' AFFINITÀ!

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{10} & m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & & \\ m_{n0} & m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det M' \neq 0$$

$$= \det \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

Prop.: Se $f : \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$ è proiettività

t.c. $f(H_0) = H_0$, $\quad H_0 : x_0 = 0$

allora $j_0^{-1} \circ f \circ j_0 = \tilde{f} : \mathbb{A}^n_K \to \mathbb{A}^n_K$

è un' affinità

Viceversa: se cons. un' affinità

$$g : \mathbb{A}^n_K \to \mathbb{A}^n_K$$

$$y = N \cdot X + c$$

$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $N \in GL(n, K)$

si può estendere a una proiettività di $\mathbb{P}^n_K$, e precisamente quella associata alla matrice

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline c_1 & & & \\ \vdots & & N & \\ c_n & & & \end{array}\right) = M$$

* * *

DUALITÀ NEGLI SPAZI PROIETTIVI

Idea: in $\mathbb{P}^2_\mathbb{R}$ cons. le rette proiettive:

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

l'eq. $\lambda a_0 x_0 + \lambda a_1 x_1 + \lambda a_2 x_2 = 0$, $\lambda \neq 0$

rappresenta la stessa retta.

Inoltre se $a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$
$b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0$

rapp. la stessa retta $\Rightarrow$ $b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = \lambda(a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2)$ per un opportuno $\lambda \neq 0$

IDEA: introduco la funzione

$$\{\text{rette proiettive di } \mathbb{P}^2_K\} \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$$

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \longrightarrow (a_0 : a_1 : a_2)$$

per le consideraz. di prima è una biiezione

Analogamente:

$$\mathcal{H} = \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}^n_K\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

$$a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0 \longrightarrow (a_0 : \dots : a_n)$$

è biiettiva

OSS.: se $\mathcal{F}_{(\lambda:\mu)} \subseteq \mathcal{H}$ è un fascio proiettivo di iperpiani

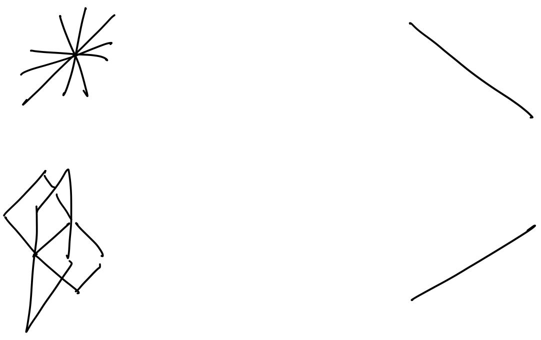
$$\mathcal{F}_{(\lambda:\mu)} : \lambda(a_0 x_0 + \dots + a_n x_n) + \mu(b_0 x_0 + \dots + b_n x_n) = 0$$
$$= (\lambda a_0 + \mu b_0) x_0 + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n) x_n = 0$$

corrisponde ai punti $(\lambda a_0 + \mu b_0 : \dots : \lambda a_n + \mu b_n)$
$$= \lambda(a_0 : \dots : a_n) + \mu(b_0 : \dots : b_n)$$

è una rapp. parametrica della RETTA PROIETTIVA in $\mathbb{P}^n_K$ passante per

$A = (a_0 : \dots : a_n)$ e $B = (b_0 : \dots : b_n)$

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$



* * *

Posso generalizzare a SP qualunque (senza usare eq. di iperpiani, e senza coordinate?) sì

Ricordo: dato V SV su K

posso cons. il suo SV DUALE

$$V^\vee (= V^*) := \underset{\text{omomorfismi}}{\mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})} \; (= \mathcal{L}(V, \mathbb{K}))$$

Sapete che: $V^\vee \cong V$

infatti: se fisso base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V

posso cons. $\mathcal{B}^\vee = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$

$$v_i^* : V \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{t.c. } v_i^*(v_j) := \delta_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Si dimostra che $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ è base di $V^\vee$; quindi

BASE DUALE

$f : V \to V^\vee$ è ISOMORFISMO

$f(v_i) = v_i^*$

Sia ora $\mathbb{P}(V)$ SP su V

Def: L'applicazione

$$\delta : \mathbb{P}(V^\vee) \longrightarrow \mathcal{H} = \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\}$$

è una BIIEZIONE e si chiama
MAPPA DI DUALITA'

$$\delta([f]) := \mathbb{P}(\ker f)$$

$V^\vee = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) \ni f$ AL nulla

$$\mathbb{P}(V^\vee) = \frac{V^\vee \setminus \{0_{V^\vee}\}}{\sim} \ni [f]$$

$f \neq 0_{V^\vee}$, $f : \underset{n+1}{V} \to \underset{1}{\mathbb{K}}$ AL

$\Downarrow$

$$\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg} f = 1 \underset{\text{Teo di Dim per AL}}{\Longrightarrow} \dim \ker f = (n+1) - 1 = n$$

cioè $\ker f$ è un iperpiano di V

In coordinate: fisso $\mathcal{B}$ base V, $\mathcal{B}^\vee$ base duale
$f \in V^\vee$

$f : V \to \mathbb{K}$, base di $\mathbb{K}$: $\{1\} = \mathcal{E}$

$\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) = (a_0 \; a_1 \; \cdots \; a_n) \neq (0 \; 0 \cdots 0)$$

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : (a_0 \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$a_0 x_0 + \dots + a_n x_n =$$

Nella $\mathcal{B}^\vee$: $(a_0, \dots, a_n)$ sono le coordinate di f

$[f] \in \mathbb{P}(V^\vee)$ ha coordinate omogenee

$$(a_0 : \dots : a_n) \longrightarrow a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$$